حساب الحاسوب ـــ نظام عد جديد
طرق رياضية وخوارزميات وتطبيقاتها

بشّار بشير التكله[1] و محمد بشير قابيل[1] ومحي الدين وايناخ[2]
[1] قسم الرياضيات ـــ كلية العلوم ـــ جامعة دمشق ـــ سورية
[2] المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

تاريخ الإيداع 2006/08/16
قبل للنشر في 2007/02/04

الملخص

يهدف هذا البحث إلى معالجة تمثيل الأعداد الكسرية والأعداد الصغيرة في الحاسوب بطريقة جديـــدة تماماً وذلك في محاولة لتحسين دقة تمثيل هذه الأعداد لهذا أقترح نظاماً جديداً لتمثيل الأعداد الكسرية في الحاسوب بنظام السلسلة المتباعدة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ حيث تسمح فكرة هذا البحث بتمثيل الكسور غير المنتهية في النظامين العشري والثنائي بكسور منتهية وفق نظام العدّ الجديد. مع الأخذ بالحسبان طريقتـــي صـــياغة الأعداد في الحاسب وهما: النقطة الثابتة والنقطة العائمة.

توضع خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية في الحاسوب، مع العديد من الأمثلـــة، ويبـــرهن أن هذا التمثيل وحيد. ثم تتم مناقشة العمليات الحسابية في هذا التمثيل الجديد بشرح خوارزمياتها وتطبيقهـــا على أمثلة عديدة ولكل حالة فيها.

يبرهن بعد ذلك على وحدانية عملية الجمع (أي إن ناتج جمع كسرين حسب خوارزمية الجمع ممثَّـــل بالتمثيل الجديد نفسه). ثم تدرس باقي خواص النظام ومنها التحويل من نظم العد القياسية وإليها.

يحدد في هذا البحث بعض العوامل التي تؤخذ عادةً عند اختيار نظم عدّ في هذا التمثيل الجديد وهـــي: تحديد نوع الأعداد – مجال الأعداد القابلة للتمثيل – حساب الدقة في التمثيل الجديد.

أخيراً، يتم إيجاد البرمجيات لخوارزمية التمثيل الجديد، وخوارزمية الجمـــع باللغـــة البرمجيـــة C^{++} لدراسة أدائها.

الكلمات المفتاحية: حساب الحاسوب، النقطة الثابتة، النقطة العائمة، تمثيـــل الأعـــداد الكسرية، خوارزميات وتطبيقات.

Computer arithmetic- a new number system, mathematical methods, algorithms and its practices

Bashar Basher Takleh[1], Mohamed Basher Kabil[1] and Mohedin Whiynhk[2]

[1] Department of Mathematics-Faculty of science- Damascus University- Syria.
[2] Higher Institute of Applied Sciences and Technology (HIAST)

Received 16/08/2006
Accepted 04/02/2007

ABSTRACT

The purpose of this research is to enhance fractional numbers precision according to the new representation of fractional numbers, adding some extra cost to the hardware so we suggest a new number system per representing of fractional numbers in computers, that depends on the series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$.

With mathematical, algorithmic study, and its hardware of our research, we consider the two principal formats of real numbers in computers: fixed- point, floating- point and the cost of the hardware required to store and process the numbers.

we show the algorithm of the new representation of fractional numbers in computers, with some examples. Then we give a proof that the representation is single, and study arithmetic operations on it. we present an addition algorithm on the new representation and show its correctness.

Then we show in the new representation of fractional numbers: the range of numbers to be represented, the precision of the number which refers to the maximum accuracy of the representation and the cost of the hardware required to store and process the numbers.

Finally, we show the practical programs for (algorithm of the new representation of fractional numbers, addition operation in the new representation of fractional numbers)

Key words: Computer arithmetic, Fixed point, Floating point, Fractional numbers representation, Algorithms and Practices.

المقــدمة

يؤدي علم الحساب بالحاسوب (computer arithmetic) دوراً مهماً بمـا يتـضمنه مـن عمليات الحساب الأساسية مثل (الجمع، الطرح، الضرب والتقسيم)، والعمليات الحـسابية الأخرى الأكثر صعوبة مثل (الجذر التربيعي وغيرها ...)، وكـذلك التوابـع الأساسـية (الأسي، المثلثي،...) في بناء الحاسب وتصميمه.

ويشمل أيضاً تمثيل الأعداد في الحاسوب (نظم العد) ووحـدات حـساب النقطـة الثابتـة والنقطة العائمة، وخوارزميات الحسابات الصحيحة والحقيقية إضافة إلى بنيـة الحاسـوب (Hardware) وتصميمه وتنفيذه لهذه الخوارزميات [5].

تعالج التعليمات الحسابية في الحاسوب البيانات لتعطي النتائج الضرورية من أجـل حـل المسائل الحسابية. هذه التعليمات هي التي تؤدي الحسابات في علم الحساب بالحاسـوب. وإن معالج الحساب هو الجزء من وحدة الحساب والمنطق (ALU) الذي ينفّـذ عمليـات الحساب.

يؤدي النظام الثنائي دوراً محورياً لتمثيل القيم العددية في وحدة الحـساب، حيـث تمثّـل الأعداد الصحيحة في الحواسيب الرقمية بأعداد ثنائية بطول ثابت. ويعدُّ نظام العدّ الثنائي المسمى الإتمام إلى اثنين الأكثر استعمالاً لتمثيل الأعداد السالبة بوحدات الحـساب، لكـن يوجد العديد من نظم العدّ الأخرى المفيدة لتطبيقات محددة. ومنها نظم عد الأساس السالب (Negative-Radix Number Systems) [5] ونظم عدّ الطويلـة والإشـارة (Signed – Magnitude Number Systems) [5] .

وتوجد نظم عدّ غيـر قياسـية أخـرى مثـل نظـام العـد ذي الأسـاس اللوغـاريتمي (Logarithmic Number System) [1] ونظـام عـدّ الرواسـب (The Residue Number System) [5]. ومن هذه النظم أيضاً نظام العدّ الجديد في الحاسوب الـذي أقترحـه بهذا البحث بطريقة جديدة ومبتكرة لتمثيل الأعـداد الكـسرية والأعـداد الـصغيرة فـي الحاسوب.

فكلما توصلنا إلى وضع نظم عدّ جديدة تحسّن من دقة تمثيلها للأعداد، وإلى وضع خوارزميات العمليات الحسابية عليها بحيث تكون ذات سرعة وأداءٍ عالٍ وكلفةٍ بسيطة، وصلنا لبناء بنيان مادي أفضل.

نعرّف أولاً بطريقتنا صياغة الأعداد في الحاسوب وهما: صياغة النقطة الثابتة (Fixed-point) وصياغة النقطة العائمة(Floating- point)، حيث تخصص صياغة النقطة الثابتة لمجال محدود ومنتهٍ من القيم وتتطلب بنياناً مادياً بسيطاً نسبياً، أما صياغة الأعداد بطريقة النقطة العائمة فتخصص لمجال كبير جداً من القيم ولكنها تتطلب المعالجة ببنيان مادي أكثر كلفة.[2], [3], [4]

تمثيل النقطة الثابتة (Fixed-Point Representation): [2], [3], [4]

ترمّز الأعداد المستعملة في حسابات محددة بالإشارة والطويلة للعدد وأحياناً بالنقطة العشرية، حيث الإشارة ضرورية لعمليات الحساب فيما إذا كان العدد موجباً أو سالباً. فيحتاج موضع النقطة العشرية (أو الثنائية) لتمثيل الكسور أو أعداد مختلطة من صحيح وكسري. ويمكن أن تعدَّ الإشارة لأي عدد مجموعة مؤلفة من عنصرين + و- بحيث تحدد هذه المجموعة الترميز الثنائي لبت (bit) واحدة. يمثّل اصطلاحاً + بـ 0 و- بـ 1. ونحتاج لتمثيل العدد الثنائي ذي الإشارة في المسجل $(n+1)bit$:$(n)bit$ للعدد و$(1)\ bit$ للإشارة. ويوضع بت الإشارة عادة في الموضع أقصى اليسار في المسجل. أما تمثيل النقطة العشرية (أو الثنائية) في المسجل فهو صعب وذلك لحقيقة كونه يميز بالموضع بين قلابين في المسجل.

وهناك طريقتان لتحديد موضع النقطة العشرية في المسجل: بإعطائه الموضع الثابت أو باستعمال تمثيل النقطة – العائمة.

تفترض طريقة النقطة – الثابتة أن النقطة العشرية دائماً ثابتة في موضع واحد، والموضعان الأكثر استعمالاً هما:

1- النقطة العشرية في أقصى اليسار من المسجل لتجعل العدد المخزن هو عدداً كسرياً.

2- النقطة العشرية في أقصى اليمين من المسجل لتجعل العدد المخزن هو عدداً صحيحاً.

وفي كلتا الحالات، لا تمثّل النقطة العشرية فعلياً بل تفترض من حقيقة أن العدد المخــزن في المسجل يعالج كعدد كسري أو كعدد صحيح.

ــ تمثيل النقطة – العائمة (Floating-Point Representation):[2,3,4]

إن مجال الأعداد التي يمكن أن تمثّل بترميز عدد النقطة الثابتة غيــر ملائــم لتطبيقــات عديدة، بشكل خاص في حالة الأعداد الصغيرة جداً والكبيرة جداً. فتسمح مجموعة الرموز العلمية التالية بتمثيل العدد باستعمال عدة أرقام. مثال، من السهل أن نكتب المقدار بالشكل: $10^{18} \times 1.0$ ويكــون كعــدد صــحيح فــي تمثيــل النقطــة الثابتــة بالــشكل: 1000000000000000000

يتألف تمثيل النقطة العائمة من قسمين: القسم الأول ويمثل الإشارة وعدد النقطة – الثابتــة ويدعى الجزء العشري (mantissa) ويكون كسراً. ويدل القسم الثاني على موضع النقطة العشرية (أو الثنائية) ويدعى الأس.

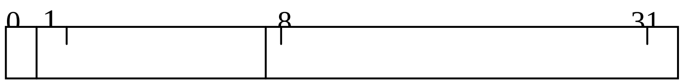
مثال: يمثل العدد العشري 6132.789+ في النقطة العائمة كالآتي:

الإشارة		الإشارة	
0	6132789	0	04
	الجزء العشري		الأس

يدل 0 في الجزء العشري في الموضع أقصى اليسار على + . والجزء العشري على عدد نقطة ثابتة كسري، لذا تفترض النقطة العشرية لتكون على اليسار في الرقم الأكثر أهمية. ويعدُّ تمثيل عدد النقطة العائمة غير وحيد لأنه يمكن للعدد نفسه أن يمثّل بأكثر من طريقة واحدة.

مثال: 0.000001×10^{24} ، 0.1×10^{19} ، 1.0×10^{18}

فهذه كلها صيغ نقطة عائمة ممكنة للمقدار نفسه. أما صياغة النقطة العائمة المكونة مــن 32- بت (32_bit)فهي بالشكل:



الإشارة (sign)   (exponent) الأس   الجزء العشري (mantissa)

وتوجد خوارزميات للعمليات الحسابية الأساسية في صياغة النقطة الثابتة وصياغة النقطة العائمة في [3] والمستعملة في تصميم المعالجات الحسابية في الحواسيب الحديثة.إن النقطة العائمة تعالج الأعداد الصغيرة والأعداد الكبيرة في الحاسوب لأنها تتعامل مع مجال واسع للأسس، أما الجديد في بحثنا فهو تمثيل الأعداد الكسرية والأعداد الصغيرة فقط بخلاف التمثيلات السابقة بطريقة جديدة وتهدف لتحسين الدقة في تمثيل هذه الأعداد.

مسألة البحث وعملياته وتطبيقاته :

ــ التمثيل الجديد للأعداد الكسرية في الحاسب (New Representing of Fractional Numbers(NRRN)) :

تمثّل الأعداد الكسرية في الحاسوب بنظام السلسلة المتباعدة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ بالشكل الآتي:

يضرب الكسر بمقلوب حدود السلسلة بدءاً بالحد 2، ما دام أن القسم الصحيح للناتج مساوياً للصفر يتم الاحتفاظ بالصفر، ونتابع حتى يتم الحصول على قسم صحيح أكبر من الصفر فيحتفظ ببسط الحد 1. ومنه يتم الحصول على كسر جديد مساوٍ للكسر القديم مطروحاً منه حد السلسلة الذي تم الوصول إليه.

$$(0.1)_{10} = \frac{1}{10} = 0\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{3} + ... + 0\times\frac{1}{9} + 1\times\frac{1}{10} = (0.000000001)_{NRRN}$$

أمثلة:

$$(0.2)_{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0\times\frac{1}{2} + 0\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{4} + 1\times\frac{1}{5} = (0.0001)_{NRRN}$$

$$(0.3)_{10} = \frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = (0.0010000000000000001)_{NRRN}$$

هنا تركنا الحد $\frac{1}{4}$ ووحدنا مقامات الحد $\frac{3}{10} - \frac{1}{4}$ فحصلنا على كسور جديدة. ومنه لدينا في تمثيل هذا الكسر العشري 1 في الخانة 4 وفي الخانة 20 بدءاً من الحد 2 وما بينهما أصفار وهكذا لباقي الكسور.....

$$(0.4)_{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=(0.01000000000001)_{NRRN}$$

$$(0.12)_{10}=\frac{12}{100}=\frac{1}{9}+\frac{12}{100}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\frac{8}{100\times 9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{113}+\frac{1}{113\times 225}$$

هنا لدينا 1 في الخانة رقم 9 وفي الخانة رقم 113 وفي الخانة رقم 225×113 وبينهما أصفار ونجد تباعداً في الخانات، ولكن في الوقت نفسه لدينا دقة عالية (سيتم حساب الدقة في التمثيل الجديد في فقرة لاحقة) وذلك لكون السلسلة متباعدة. وهكذا يمكننا بالطريقة نفسها إيجاد التمثيل لأي كسر وذلك بتطبيق الخوارزمية الآتية عليه.

ويمكن تعميم هذه الطريقة لتمثيل الكسور بنظام: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$ وحيث $a\leq 1$

ــ خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية في الحاسوب بنظام السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$:

(The New Representation Algorithm of Fractional Numbers in Computers)

1- إيجاد مقلوب الكسر، ثم إيجاد القسم الصحيح لهذا المقلوب، وتتم إضافة 1 إليه، ثم إيجاد مقلوب الناتج (يسجل الناتج).

2- الكسر الجديد = الكسر القديم – مقلوب الناتج. والعودة إلى (1)

ــ وحدانية التمثيل (Proof that the Representation is Unique) :

تمثيل الكسر بنظام السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ هو تمثيلٌ وحيدٌ :

البرهان: ليكن X كسراً، نأخذ أكبر حد من الشكل $\frac{1}{n}$ أصغر منه أو يساويه بالشكل

$$X=\frac{1}{n}+X-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+X'$$

حيث $X'=X-\frac{1}{n}$. نفرض أنه يوجد لـ X تمثيلان مختلفان

$$X=(0000.......1..........)_1$$
$$=(0000........1.......)_2$$

نفرض أن أول اختلاف حصل في الخانة i

التمثيل الأول في الخانة i هو 1 والتمثيل الثاني في الخانة i هو0. ونفرض أن مجموع القيم من أول خانة إلى الخانة i-1 هي $\tilde{X}$ فيكون $X-\tilde{X}$ كسراً جديداً يمثل بطــريقتين، ولكن لتمثيل الكسر توجد طريقة واحدة حسب الخوارزمية المتبعة وهي أن نأخذ أكبر حد من الشكل $\frac{1}{n}$ أصغر منه أو يساويه. ونظراً لأن التمثيل الأول في الخانةi هــو 1 فهــذا يعني أنه وجد أكبر حد وهو $\frac{1}{i+1}$ أصغر من الكسر $X-\tilde{X}$ أما التمثيل الثاني فلا يتوافق مع التعريف، ومن ثم فالتمثيل وحيد.

ــ إثبات أن خوارزمية التمثيل منتهية وأنه يمكن تمثيل أي كسر وفق هذه الخوارزمية:

إن عدد الخطوات في هذه الخوارزمية محدود، ومن ثم لإيجاد التمثيل لأي كسر وفق هذه الخوارزمية سيكون منتهياً حتى يتم إيجاد قيم الواحدات الخانية لهــذا الكــسر. إذاً لكوننــا نتعامل مع الأعداد المنتهية والأمثلة السابقة أثبتت ذلك، فإن خوارزمية التمثيــل منتهيــة.

ولإثبات أنه يمكن تمثيل أي كسر وفق هذه الخوارزمية:

ما دام أي كسر يمكن أن يكتب بدلالة السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$، من ثم يمكن أن يطبّق علــى هــذا الكسر خوارزمية التمثيل الجديد لإيجاد قيم الواحدات الخانية فيــه. وإن عــدد الخطــوات المطلوبة لإيجاد هذه القيم لأي كسر وفق خوارزمية التمثيل الجديد هو عدد محدود حتــى لو تكرر استعمال خوارزمية التمثيل عدة مرات لإيجاد قيم الواحدات الخانية لأي كــسر. ويختلف عدد مرات تطبيق هذه الخوارزمية من كسر إلى آخر، فعندما يكون الكسر مــثلاً 0.3 يكون عدد مرات تطبيق خوارزمية التمثيل محدوداً ولكنه قليل، بينما إذا كان الكــسر مثلاً 0.3756 فسيكون عدد مرات تطبيق خوارزمية التمثيل الجديد عليه أكبر من ســابقه ولكنه في الوقت نفسه محدود. ومن ثم فإن خوارزمية التمثيل الجديد منتهيــة فــي كلتــا الحالات، وكذلك يمكن تمثيل أي كسر وفقاً لهذه الخوارزمية.

ــ حساب كلفة خوارزمية التمثيل الجديد: لحساب كلفة خوارزمية التمثيل الجديــد علينــا حساب عدد العمليات الحسابية في هذه الخوارزمية لإيجاد التمثيــل لأي كــسر، وحــسب السلسلة المعيارية (والتي ستشرح في فقرة لاحقة) فإن العدد الأعظمي لتمثيــل أي كــسر

وفق هذه الخوارزمية سيكون 7 حدود. أي لدينا في الحالة العامة 7 مـــرات وهـــو عـــدد تطبيق خوارزمية التمثيل على أي كسر لإيجاد قيم الواحدات الخانية فيه. بشكل عـــام، إذا كان k هو عدد مرات تطبيق خوارزمية التمثيل الجديد على أي كـــسر، وكـــان L عـــدد العمليات الحسابية في كل مرة تطبّق فيها خوارزمية التمثيل الجديد، فيكون عدد العمليـــات الحسابية في هذه الخوارزمية لإيجاد التمثيل لأي كسر هو K×L .أما حساب كلفة البنيـــان المادي لهذه الخوارزمية فهو زمن تنفيذ هذه الخوارزمية ببنية الحاسب.

عمليات الحساب (Arithmetic Operations):

عملية الجمع (Addition Operation):

أ- إذا كان الكسران متماثلين تماماً (أي نتج لدينا تضاعف في الحدود المتماثلة)، فتستعمل القاعدة الآتية:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\begin{cases}\dfrac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)} & n \text{ زوجي} \\[2ex] \dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}+\dfrac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\times n} & n \text{ فردي}\end{cases} \qquad (*)$$

ولتفـــسير هـــذه القاعـــدة: فإنـــه فـــي حالـــة n زوجـــي فـــإن $n = 2n_1$ يكـــون $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2n_1}+\frac{1}{2n_1}=\frac{1}{n_1}=\frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)}$ ، وفي حالة n فردي فإن $n = 2n_1+1$ ومن ثـــم يكون $\frac{1}{2n_1+1}+\frac{1}{2n_1+1}=\frac{2}{2n_1+1}$ وتطبّق خوارزميـــة التمثيـــل الجديـــد للأعـــداد الكسرية على الطرف الأيمن من المساواة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{2}{2n_1+1}=\frac{1}{n_1+1}+\frac{2}{2n_1+1}-\frac{1}{n_1+1}=\frac{1}{n_1+1}+\frac{1}{(2n_1+1)\times(n_1+1)}=\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)\times n}$$

يتم تطبيق هذه القاعدة على المثال الآتي: 20 4 2 0.8

+ 0.3 4 20

+	2	4	10	
				4
	2		10	
+			2	
	1		10	

$1.1=1+0.1=1+\frac{1}{10}=(1 \quad 10)_{NRRN}$

ب- إذا كان الكسران غير متماثلين (مختلفين): فتتم عملية الجمع في نظام العد الجديد للأعداد الكسرية بالشكل الآتي: بفرض لدينا الكسران $\frac{1}{n}$ و $\frac{1}{m}$ والمطلوب جمعهما:

1- ترتب القيم التي تحوي واحدات في خاناتها للكسرين في متتالية من القيم.

2- يتم الجمع من اليمين لأول حدين بالشكل الآتي: $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{n+m}{n\times m}=\frac{1}{\left[\frac{n\times m}{n+m}\right]}$

إذا كان $\frac{n\times m}{n+m}$ صحيحاً فيبقى نفسه كما هو، أما إذا كان $\frac{n\times m}{n+m}$ كسرياً فيضاف 1 إلى القسم الصحيح منه. أي في حالة $\frac{n\times m}{n+m}$ كسري فيمثل العدد الكسري $\frac{1}{\left[\frac{n\times m}{n+m}\right]}$ حسب خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية وهي أخذ أكبر كسر موجود فيه (للعدد الكسري) أصغر منه.

3 - إذا نتج لدينا تضاعف في الحدود المتماثلة فيتم جمع الحدين المتماثلين وفق القاعدة (*) السابقة.

4- ترتب القيم الناتجة ثم تجري عملية الجمع للحدين التاليين. وهكذا........

مثال :

0.3	3		15		
+ 0.4		4		20	
0.7	3	4	15	20	

يبدأ الجمع من اليمين لأول حدين وهما 20 و15 بالشكل الآتي:

$\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{7}{60}=\frac{1}{\left(\frac{60}{7}\right)}, \frac{60}{7}=8.57142857....$ نظراً لأن $\frac{60}{7}$ كسرياً نأخذ القسم الصحيح منه ونضيف إليه 1 فيصبح 9 وتطبّق عليه خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية بالشكل الآتي:

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{7}{60}=\frac{1}{\left(\frac{60}{7}\right)}$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{7}{60}-\frac{1}{9}=\frac{1}{9}+\frac{3}{(60\times 9)}=\frac{1}{9}+\frac{1}{180}$$

ترتيب القيم الناتجة 100 9 4 3 ثم جمع الحدين التاليين 9 و4 بالشكل الآتي:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}=\frac{1}{\left(\frac{36}{13}\right)}$ $\frac{36}{13}=2.769230...$ كسري فنأخذ منه القسم الصحيح ونضيف إليه 1 فيصبح 3 وتطبّق عليه خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية بالشكل الآتي:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{13}{36}=\frac{1}{\left(\frac{36}{13}\right)}=\frac{1}{3}+\frac{13}{36}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$$

ترتيب القيم الناتجة 180 36 3 3

وهنا نتج لدينا تضاعف في الحدود المتماثلة فيتم جمعها حسب القاعدة السابقة (*) فيكون لدينا $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$

ترتيب القيم (الحدود) الناتجة 180 36 6 2

ومن ثم جمع الحدين 180 و 36 بالشكل الآتي:

$\frac{1}{36}+\frac{1}{180}=\frac{6}{180}=\frac{1}{30}$ ترتيب الحدود الناتجة 30 6 2

وأخيراً جمع الحدين 30 و 6 بالشكل الآتي: $\frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

فيكون : $5=(0.1001)_{NRRN}$ $0.7=2$

السلسلة المعيارية (The Standard Series):

إذا مثّل الحدين x وy حسب التمثيل الجديد، وتمّت عليهما عملية الجمع وكان ناتج الجمع هو z بحيث يكتب z بشكل يكون ناتج جمع كل حدين متتاليين هو نفسه. فهل تمثيلz هو تمثيل وحيد؟ (أي البحث في z عن أكبر كسر فيه أصغر منه أو يساويه). لذلك نقترح السلسلة المعيارية: سنأخذ أسوأ حالة وهي البدء من الحد $\frac{1}{q}$ عندئذ ما هو الحد التالي لهذا الحد الذي إذا جمع له يبقى ناتج الجمع هو نفسه. نجد أن هذا الحد هو $\frac{1}{q(q-1)+1}$ ونتابع بهذه السلسلة. وبذلك نثبت حسب السلسلة المعيارية أن أي عدد يكتب على شكل مجموع حدود من السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ يحقق أن مجموع كل حدين متتاليين هو نفسه. وسنثبت أن هذا التمثيل وحيد حسب المبرهنة الآتية.

إثبات وحدانية الجمع حسب الاستقراء الرياضي القوي (Proof that the Addition Operation is Unique):

مبرهنة: ناتج جمع أي كسرين حسب خوارزمية الجمع هو الناتج نفسه حسب خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية.

البرهان:

إذا كان $X=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_n}$ حيث إن: $y_i > y_{i-1}$: $i = 2,3,\ldots..,n$

مع فرض أن مجموع كل حدين متتاليين هو نفسه (حسب السلسلة المعيارية). من أجل $n=2$ محققة ونجد أن أكبر حد في المجموع $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}$ هو $\frac{1}{y_1}$

نفرض صحة العلاقة حتى $n=k$ ولنثبت صحتها من أجل $n=k+1$:

إن $\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_{k+1}}$ محققـــة وفيهـــا $\frac{1}{y_2}$ هـــو أكبـــر حـــد فيهـــا و $\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_{k+1}}$ محققة وفيها $\frac{1}{y_3}$ هو أكبر حد فيها و .... و إن $\frac{1}{y_k}+\frac{1}{y_{k+1}}$ محققة وفيها $\frac{1}{y_k}$ هو أكبر حد فيها

ولدينا $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_k}$ محققة وفيها $\frac{1}{y_1}$ هو أكبر حد فيها من الفرض.

إذاً يكون التمثيل وحيداً، أي $\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_{k+1}}$ هو تمثيـــل وحيـــد. ومـــن ثـــم $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+.....\frac{1}{y_{k+1}}<\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2-1}$ لأن $\frac{1}{y_2}$ هـــو أكبـــر حـــد فـــي المجمـــوع $\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_{k+1}}$ ونظراً لأن مجمـــوع الحـــدين $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}$ هـــو نفـــسه يكـــون:

$$y_2 \geq y_1(y_1-1)+1 \Rightarrow y_2-1 \geq y_1(y_1-1)$$

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_{k+1}}<\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2-1}\leq\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_1(y_1-1)}$$

وحيث إن $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_1(y_1-1)}=\frac{1}{y_1}\left(1+\frac{1}{y_1-1}\right)=\frac{1}{y_1}\left(\frac{y_1}{y_1-1}\right)$ هذا يعني أن $\frac{1}{y_1}$ هو أكبر حد في المجموع $\sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{y_j}$، و أن $\frac{1}{y_i}$ هو أكبر حد في المجموع $\sum_{j=i}^{k+1}\frac{1}{y_j}$ إذاً التمثيـــل وحيد والعلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$ فهي صحيحة $\forall n\geq 2$.

إذاً يكون $\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+......+\frac{1}{y_{k+1}}<\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2-1}\leq\frac{1}{(y_1-1)}$

عملية الطرح (Subtraction Operation):

المطروح منه	x_1	x_2	x_3	x_n
المطروح	y'_1	y'_2	y'_3	y'_n

الحالة 1:

1- ترتيب القيم الناتجة $x_1 \quad y'_1 \quad x_2 \quad y'_2 \ ... \ x_n \quad y'_n$

2- البحث عن إشارة أول قيمة من اليسار فإن كانت موجبة نستمر في البحث في القيم التالية له حتى تتغير إشارة القيمة. وعندئذ يطرح الحدان المختلفان بالإشارة (الأصغر من الأكبر) ...... - +....... + ونستمر بهذه العملية حتى نحصل على النتيجة أن كل الحدود موجبة.

3- جمع هذه الحدود للحصول على الناتج فإن نتج لدينا من عملية الجمع 1 في بسط الناتج فيكون خرجاً، وإلا تطبّق عليه خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية.

الحالة 2:

1- ترتيب القيم الناتجة $y'_1 x_1 \quad y'_2\ x_2 \quad y'_n \dots x_n$

2- البحث عن إشارة أول قيمة من اليسار فإن كانت سالبة نستمر في البحث في القيم التالية له حتى تتغير إشارة القيمة. وعندئذ يطرح الحدان المختلفان بالإشارة (الأكبر من الأصغر) -....... - +...... ونستمر حتى نحصل على النتيجة أن كل الحدود سالبة.

3- جمع هذه الحدود للحصول على الناتج ونضع أمامه إشارة ناقص، فإن نتج لدينا من عملية الجمع 1 في بسط الناتج فيكون خرجاً، وإلا تطبّق عليه خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية.

ولنطبّق هذه الخوارزمية على الأمثلة الآتية:

مثال:

0.4	3		15	
0.3		4′		20′
0.4-0.3=	3	4′	15	20′

بعد ترتيب القيم الناتجة نلاحظ أن هذا المثال ينطبق على (الحالة 1) فالحد الأول على اليسار موجب ولنستمر في البحث عن إشارة الحدود التالية له حتى تتغير فنجد أنها تغيرت عند الحد الثاني لذا يطرح الحد الأصغر من الأكبر: $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ ترتيب القيم الناتجة بالشكل الآتي: 20’ 15 12

نتابع عملية البحث عن إشارة الحدود التالية له حتى تتغير فنجد أنها تغيــرت عنــد الحــد الثالث فيطرح الحد الأصغر من الأكبر: $\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{1}{60}$ يتم ترتيب القيم الناتجة من جديــد:

12 60

فنجد أن كل الحدود أصبحت موجبة لذا تجمع هذه الحدود حسب خوارزمية الجمع:

$\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{1}{10}=(0.000000001)_{NRRN}$ وهو الناتج المطلوب وهو وحيد .

مثال:

$$\begin{array}{l}
\quad 0.4 \qquad 3 \qquad 15 \\
\underline{\quad 08 \quad 2' \qquad 4' \qquad 20' \quad} \\
0.4\text{-}0.8 = 2' \quad 3 \quad 15 \quad 4' \quad 20'
\end{array}$$

بعد ترتيب القيم الناتجة نلاحظ أن هذا المثال ينطبق على (الحالة 2) فالحــد الأول علــى اليسار سالب ولنستمر في البحث عن إشارة الحدود التالية له حتى تتغير. فنجد أنها تغيرت عند الحد الثاني لذا يطرح الحد الأكبر من الأصغر $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$ ترتيب القيم الناتجــة

$4' \quad 6' \quad 15 \quad 20'$

نتابع عملية البحث عن إشارة الحدود التالية له حتى تتغير فنجد أنها تغيــرت عنــد الحــد الثالث فيطرح الحد الأكبر من الأصغر $\frac{1}{15}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{10}$ تتم عملية ترتيب القيم الناتجة من جديد $4' \quad 10' \quad 20'$:

فنجد أن كل الحدود أصبحت سالبة لذا تجمع هذه الحدود حسب خوارزمية الجمع:

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=-(\frac{1}{3}+\frac{1}{15})=-(0.0100000000001)_{NRRN}$ وهو الناتج المطلوب وهــو وحيد.

عملية الضرب (Multiplication Operation):

ليكن لدينا $X \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots\ldots. \quad x_n$

$Y \quad y_1 \quad y_2 \ldots \quad y_n$

تضرب حدود X و Y، والخطوة التالية هي ترتيب القيم الناتجة في متتالية، ثم تطبّق عليها خوارزمية الجمع.

مثال :

0.3	4	20		
0.4	3	15		
0.3×0.4=	12	60	60	300

بعد ترتيب القيم الناتجة عن ضرب حدود 0.3 و0.4 تطبّق خطوات خوارزمية الجمع السابقة بدأً من اليمين بالشكل الآتي: أولاً يتم جمع 60 +60 لأنهما حدان متماثلان حسب قاعدة الجمع (*) فنجد أن 30=60+60، ثم ترتب القيم الناتجة 300 30 12، ثم تطبيق خوارزمية الجمع على الحدين التاليين من اليمين فنجد:

$$\frac{1}{300}+\frac{1}{30}=\frac{1}{28}+\frac{8}{(28\times300)}$$
$$=\frac{1}{28}+\frac{8}{8400}=\frac{1}{28}+\frac{1}{1050}$$

ترتيب القيم الناتجة بالشكل: 1050 28 12

ومن ثم تطبيق خوارزمية الجمع على الحدين التاليين من اليمين بالشكل:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{28}=\frac{40}{336}=\frac{1}{9}+\frac{40}{336}-\frac{1}{9}$$
$$=\frac{1}{9}+\frac{24}{3024}=\frac{1}{9}+\frac{1}{126}$$

ترتّب القيم الناتجة 1050 126 9، ثم تطبق خوارزمية الجمع على الحدين التاليين من اليمين ما دام مجموعها ليس نفسه نجد:

$$\frac{1}{126}+\frac{1}{1050}=\frac{1176}{132300}=\frac{1}{113}+\frac{1176}{132300}-\frac{1}{113}$$
$$=\frac{1}{113}+\frac{588}{14949900}=\frac{1}{113}+\frac{1}{25425}$$

وأخيراً يكون الناتج : $0.12=0.3\times0.4=(\frac{1}{9}+\frac{1}{113}+\frac{1}{25425})_{NRRN}$

عملية التقسيم (Division Operation):

خوارزمية التقسيم: ليكن $\frac{x}{y}=\frac{t}{y}+\frac{(x-t)}{y}$ وحيث إن: $0<t<x$

1- ليكن $\frac{t}{y}=\frac{1}{z_1}$ بحيث يكون $x>t=\frac{y}{z_1}$

2- البحث عن أصغر z_1 صحيح بحيث يكون $x > \frac{y}{z_1}$ فنجد: $\frac{x}{y} = \frac{1}{z_1} + \frac{x'}{y}$ وحيث

$$x' = x - t$$

3- تكرر العملية السابقة على $\frac{x'}{y}$: ليكن $\frac{t'}{y} = \frac{1}{z_2}$ وبحيث يكون $x' > t' = \frac{y}{z_2}$ عندئذ يتم

البحث عن أصغر z_2 صحيح بحيث يكون $x' > t' = \frac{y}{z_2}$ ومن ثم يكون

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{x''}{y}$$

ونتوقف عن تكرار العملية السابقة إذا حصلنا على $x' = x - t = 1$ وإلا تكرر العملية فنحسب x'' و...

مثال: لنوجد ناتج $\frac{0.4}{0.5}$ بتطبيق خوارزمية التقسيم نجد:

$$\frac{x}{y} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{t}{0.5} + \frac{(0.4 - t)}{0.5}$$

$$\frac{t}{0.5} = \frac{1}{z_1}, x = 0.4 > t = \frac{0.5}{z_1}$$

نبحث عن أصغر Z_1 صحيح بحيث يكون: $z_1 \geq \frac{0.5}{0.4}$ فنجد أن $Z_1=2$ ومنه فإن $t = \frac{0.5}{2} = 0.25$ نعوض فنجد: $\frac{0.4}{0.5} = \frac{1}{2} + \frac{(0.4-0.25)}{0.5} = \frac{1}{2} + \frac{0.15}{0.5}$، نبحث الآن عن أصغر Z_2 صحيح بحيث يكون $z_2 = \frac{0.50}{0.15}$ فنجد أن $Z_2=4$ ومنه نعوض فنجد:

$$\frac{0.4}{0.5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{(0.15-0.125)}{0.5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0.025}{0.5}$$

ولنبحث عن أصغر Z_3 صحيح بحيث يكون: $z_3 \geq \frac{0.500}{0.025}$ ومنه نجد $Z_3 = 20$ ومن ثم يكون: $\frac{0.4}{0.5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$ وهو تمثيل وحيد .

مثال: في حالة كان لدينا $\frac{4}{3}=\frac{0.4}{0.3}=\frac{x}{y}$ ولتطبيق خوارزمية التقسيم في هذه الحالة نقوم بالإجراء الآتي $\frac{4}{3}=1+\frac{1}{3}=1+\frac{0.1}{0.3}$ نعالج 1 كعدد صحيح في النظام الثنائي، ونعالج $\frac{0.1}{0.3}$ حسب خوارزمية التقسيم

$$\text{(a)} \qquad \frac{x}{y}=\frac{0.1}{0.3}=\frac{t}{0.3}+\frac{(0.1-t)}{0.3}$$

$$\frac{t}{0.3}=\frac{1}{z_1},\ x=0.1>t=\frac{0.3}{z_1}$$

نبحث عن أصغر Z_1 صحيح بحيث يكون $z_1 \geq \frac{0.3}{0.1}$ ومنه نجد Z_1=3 ومن ثم $t=\frac{0.3}{3}=0.1$ ونعوض في (a) فنجد: $\frac{1}{3}=\frac{0.1}{0.3}+\frac{0}{0.3}=\frac{0.1}{0.3}$ وهو الناتج وهو وحيد.

ملاحظة مهمة:

إن جميع خوارزميات العمليات الحسابية (الجمع – الطرح – الضرب- التقسيم) هي خوارزميات منتهية بسبب:

1- أننا نتعامل مع أعداد منتهية.

2- عدد الخطوات في خوارزميات العمليات الحسابية محدود.

3- تهدف خوارزميات العمليات الحسابية إلى إيجاد العمليات الحسابية على الكسور باستعمال خوارزمية التمثيل الجديد وهي خوارزمية منتهية كما أثبتنا ذلك.

تباعد الخانات (Farness of Bits): لا توجد مشكلة رياضية تدعى تباعد الخانات لأن عدد العمليات الحسابية لا يتجاوز عدداً محدوداً من الخطوات، بل هي مشكلة في الحاسوب لأن العدد الأعظمي لعدد الخانات في الحاسوب محدود. مثلاً عند ضرب 0.6 و0.7 ينتج لدينا في الناتج النهائي $0.42=(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{300})_{NRRN}$ ولكي نمثل هذا العدد في الحاسوب وبحيث لا يتجاوز عدد خانات الحاسوب. فإن أحد الافتراضات لتمثيل عدد هو استعمال السلسلة المعيارية: نضع $X=\frac{1}{z_1}+x'$ حيث $\frac{1}{z_1}$ هو الحد الأول في المتسلسلة،

ثم يحسب x' الحد الثاني في المتسلسلة وهو $\frac{1}{z_2}$ وحيث $z_2 = z_1(z_1 - 1) + 1$، ثم يحسب Z_3 وحيث $z_3 = z_2(z_2 - 1) + 1$ وهكذا تحسب باقي الحدود بالشكل: $z_i = z_{i-1}(z_{i-1} - 1) + 1$ وهذه العلاقة هي نتيجة للبرهان الآتي: إن المجموع $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ فيه $\frac{1}{z_1}$ هو أكبر حد ومجموع هذين الحدين هو نفسه (حسب السلسلة المعيارية)

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \le \frac{1}{(z_1 - 1)} \Rightarrow \frac{1}{z_2} < \frac{1}{(z_1 - 1)} - \frac{1}{z_1} \Rightarrow \frac{1}{z_2} < \frac{1}{z_1(z_1 - 1)}$$
$$\Rightarrow z_2 > z_1(z_1 - 1)$$
$$\Rightarrow z_2 \ge z_1(z_1 - 1) + 1 \Rightarrow z_i \ge z_{i-1}(z_{i-1} - 1) + 1$$

لنضع القيم الناتجة فنجد (b) $X = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ... + \frac{1}{z_n}$ فإذا بدأ من $z_1 = 2$ نجد:

$$\text{(c)} \quad X = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \frac{1}{(3 \times 10^6)} + \frac{1}{(9 \times 10^{12})}$$

أما إذا تم البدء من $z_1 = 4$ فنجد $X = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + ...$ وهكذا لباقي الأعداد.

ينتج لدينا من العلاقة (c) $X = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} + \frac{1}{z_5} + \frac{1}{z_6} + \frac{1}{z_7}$ أي سبعة حدود فقط (السلسلة المعيارية). فنأخذ من(b) قيم المقامات ونضعها في متتالية $(z_1, z_2, ..., z_n)$ لتمثّل في الحاسوب كل قيمة من القيم السابقة بصندوق خاص بها. إذا كانت خانات $z_i; i = 1,2,....,n$ متساوية فالدقة المطلوبة هي الحد الأخير z_n وهي صناديق لها السعة نفسها. أما إذا كانت خانات z_i مختلفة فسوف توجد بينها فواصل أي سعة الصناديق مختلفة. ولنوضح هذا التمثيل بالمثال الآتي:

عندما يضرب 0.6 و 0.7 فينتج لدينا $0.42 = (\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{300})_{NRRN}$

لنسمي $z_1 = 3, z_2 = 12, z_3 = 300$ والتي تمثّل في الحاسوب بالشكل

Z_1	Z_2	Z_3

إذا كانت الصناديق لها السعة نفسها نضع قيم $z_1 = 3, z_2 = 12, z_3 = 300$ في الصناديق بعد أن تحوّل قيمها إلى قيم ثنائية. أما إذا كانت سعة الصناديق مختلفة فتمثل قيم

$z_1 = 3, z_2 = 12, z_3 = 300$ في الصناديق بعد أن تحّول قيمها إلى قيم ثنائية، ويوضع بين تلك القيم فاصل. والدقة تساوي عدد خانات الحد الأخير بمتتالية القيم وتساوي سعة الصندوق، والكلفة تساوي عدد الخانات وتساوي (الدقة×7). حيث 7 هو العدد الأعظمي للقيم الناتجة والدقة هي سعة الصندوق .

التحويل من التمثيلات القياسية وإليها:

(Conversion of Numbers from / to Conventional Representations):

ــ تحويل كسر من النظام العشري ممثّل بنظام العد الجديد إلى عدد نقطة عائمة:

يعطى عدد النقطة العائمة بالشكل $M \times B^E$، حيثM هو الجزء العشري والذي يكون عادة كسراً، E الأس وهو عدد صحيح، B الأساس. ولتحويل العدد الكسري من النظام العشري الممثّل بنظام العد الجديد إلى عدد نقطة عائمة حيث الأساس B هو حصراً 2 (لأننا سنستعمل أساس النظام الثنائي ولأن العملية التي ستجري كأنها عملية ضرب الكسر بـ 2 وتقسيمه على 2) بالشكل الآتي:

1- يجمع الكسر إلى نفسه (أي كأنها عملية ضرب الكسر بـ 2)

2- بعد جمع القسم الكسري الممثل بنظام العد الجديد يظهر لدينا قسم صحيح يتم تمثيله بالنظام الثنائي (لأن تمثيله حسب خوارزمية التمثيل الجديد ستكون كلفتة كبيرة في حالة كان العدد الصحيح كبيراً، ولذلك نفضل استعمال النظام الثنائي في حالة الأعداد الصحيحة)، وقسم كسري يمثل بنظام العد الجديد ثم يضرب بقوة أساسها2 وأسها -1 (أي كأنها عملية ضرب الكسر بـ 2 وتقسيمه على 2) مرة واحدة.

فإذا كررنا العملية K مرة، فيتم ضرب القسم الكسري الممثل بنظام العد الجديد بالقوة2^{-k}. مع الحرص على جمع الأقسام الصحيحة مع الأقسام الصحيحة وإضافة الناتج الصحيح من الجمع الناتج عن جمع الأقسام الكسرية مع بعضها إليها. وحيثk هي عدد مرات ضرب القسم الكسري.

مثال: ليكن لدينا العدد الكسري بالنظام العشري 0.754 والممثّل بنظام العد الجديد ولنحوله لعدد فاصلة عائمة: يعطى 0.754 حسب خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية بالشكل الآتي:

$$0.754 = \frac{1}{2} + 0.254 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0.254 - \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{0.27}{5}$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{19} + \frac{0.27}{5} - \frac{1}{19} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{19} + \frac{0.13}{95}$$
$$0.754 = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{19}$$

يجمع الكسر مع نفسه أي:

$$\begin{array}{rrrrr} & 2 & 5 & 19 & \\ + & 2 & 5 & 19 & \\ \hline 1 & 3 & 15 & 10 & 190 \end{array}$$

وحسب خوارزمية الجمع 190 10 15 3 1

ولنرتب هذه القيم بمتتالية مرتبة (190 15 10 3) . 1

فنتج لدينا 1 وهو قسم صحيح يمثل بالنظام الثنائي للسبب المذكور أعلاه، وقسم كسري الممثل بنظام العد الجديد وهو (190 15 10 3) فيضرب بقوة أساسها 2 وأسها1 − لأننا جمعنا القسم الكسري مع نفسه مرة واحدة 2^{-1} × (190 15 10 3)1.= 0.754، فإذا كررت الخوارزمية السابقة K مرة (وتحدد قيمة k من عدد مرات جمع القسم الكسري مع نفسه حتى ينتج لدينا قسم صحيح) فينتج لدينا عدد النقطة العائمة $M \times 2^{-K}$ حيث M مؤلف من قسم صحيح يمثّل بالنظام الثنائي وقسم كسري ممثل بنظام العد الجديد، وفي حالة تكرار خوارزمية التحويل نأخذ بالحسبان جمع الأقسام الصحيحة إلى الأقسام الصحيحة وإضافة الناتج الصحيح من جمع الأقسام الكسرية إليها.

ــ **العكس**: **تحويل كسر ممثل بنظام العد الجديد إلى كسر بالنظام العشري**:

1- تقسيم الكسر على2 يعني ضرب مقامات الكسور للعدد الكسري الممثل بنظام العد الجديد بـــ 2.

2- تحويل ذلك الكسر لشكله الوحيد وتتم عملية الجمع عليه بدءاً من اليمين، ثم ضربه بقوة أساسها 2 وأسها 1+ .

فإذا كررت الخوارزمية k مرة، فإنه يضرب بقوة 2^{+k}. حيث k هي عدد مرات تقسيم القسم الكسري على 2 وهنا لا يظهر لدينا قسم صحيح .

مثال: لدينا الكسر الممثل بنظام العد الجديد $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ يقسم هذا الكسر على 2 فيصبح $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ حسب خوارزمية الجمع وخوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية يكون لدينا

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}=\frac{1}{\left(\frac{12}{5}\right)}=\frac{1}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

ثم يضرب القسم الكسري الناتج بقوة 2^1 بالشكل الآتي:

$0.(\ 2 \quad 3\ ) = 0.(\ 3 \quad 12\ ) \times 2^1$ وهنا لا ينتج قسم صحيح .

ــ تحويل عدد كسري من النظام الثنائي إلى نظام العد الجديد:

1- يكتب الكسر الثنائي بدلالة تمثيل النظام الثنائي (أي يكتب الكسر الثنائي حسب وزن خاناته)

2- ينتج لدينا مجموعة كسور

3- تطبق خوارزمية الجمع على الكسور الناتجة حتى نحصل على الناتج الوحيد فيكون هو التمثيل بدلالة نظام العد الجديد.

مثال: لنطبّق هذه الخوارزمية على المثال الآتي: ليكن لدينا العدد الكسري الثنائي $(0.101)_2$ ولنحوله إلى نظام العدّ الجديد للأعداد الكسرية: يعطى هذا الكسر الثنائي بالنظام الثنائي بالشكل الآتي:

$$(0.1011)_2=(1\times\frac{1}{2})+(0\times\frac{1}{4})+(1\times\frac{1}{8})+(1\times\frac{1}{16})=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

ولجمع هذه الكسور من اليمين لدينا القاعدة الآتية لمعرفة هل الكسران يجمعان أم لا:

إذا كان لدينا الكسرين $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ وكان $x\,(x\text{-}1)+1 \leq y$ عندئذ لا يجمعان، وإذا كان $x(x\text{-}1)+1 > y$ يجمعان.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{3}{16}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{48}$$

$$(0.1011)_2=(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{48})_{NRRN}$$

ــ تحويل كسر من نظام العد الجديد إلى النظام الثنائي:

1- يجمع الكسر مع نفسه

2- إذا نتج قسم صحيح 1 من ناتج جمع الكسر مع نفسه نكتبه وإلا نكتب 0

3- نعيد جمع الكسر مع نفسه حتى نصل إلى تكرار في القيم الناتجة أو نهاية.

مثال: لنشرح خوارزمية هذا التحويل بالمثال الآتي: لدينا الكسر 0.3 الممثل بنظام العد الجديد بالشكل الآتي:

NRRN (20 4) = 0.3 ولنحوله إلى نظام العد الثنائي، فنضربه بـ 2 أي نجمعه لنفسه فإن نتج لدينا قسم صحيح وهو 1 فقط عند الجمع نكتبه وإلا نكتب0، ونكرر ذلك الجمع حتى نصل لتكرار أو نهاية.

يجمع الكسر مع نفسه 0.3 4 20

+ 0.3 4 20

وحسب قاعدة الجمع نجد 2 10 و من هنا نضع 0

+ 2 10

1 5 ومن هنا نضع 1

يجمع الكسر مع نفسه من جديد 5 +

3 15

يجمع مع نفسه + 3 15 ومن هنا نضع 0

2 6 8 120

والآن تطبّق خوارزمية الجمع من اليمين فنجد :

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{120}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{7}{24}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24}$$

ترتّب القيم الناتجة 120 24 4 2 ويتم الجمع من اليمين $\frac{1}{24}+\frac{1}{120}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$

ترتّب القيم الناتجة 2 4 20 ومن هنا نضع 0

يجمع مع نفسه + 2 4 20

1 2 10 ومن هنا نضع 1

ويتم جمعه مع نفسه   +   2   10

1   5   ومن هنا نضع 1

يجمع مع نفسه   +   5

3   15   ومن هنا نضع 0

فيكون لدينا $0.3 = (4 \quad 20)NRRN = (0.0\overline{1001})_2$

اختيار نظام العد الجديد :

يوجد عددٌ من العوامل التي تؤخذ بالحسبان عند إيجاد تمثيل للأعداد في الحاسوب ومنها: (أنماط الأعداد التي تمثّل - مجال الأعداد القابلة للتمثيل - دقة العدد التي تتعلق بالدقة العظمى للتمثيل- كلفة البنية الصلبة (Hardware) المطلوبة لتخزين الأعداد ومعالجتها) ولنحدد العوامل الثلاثة الأولى منها فقط في اختيارنا لنظام العد الجديد في الحاسوب، وهدفنا أن يمثّل أي كسر بنظام العد الجديد بحيث يكون لدينا خطأ تمثيل صغير، مما يجعل تمثيل الكسر وفقاً لصياغة الأعداد بنظام العد الجديد عالي الدقة:

1- تخصص صياغة الأعداد في نظام العد الجديد لمجال كبير جداً من القيم الكسرية، والقيم الصغيرة. وتتطلب معالجتها برمجيات بكلفةٍ صغيرةٍ.

2- تمثيل أي كسر بنظام العد الجديد الذي يعتمد على السلسلة المتباعدة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ هو تمثيلٌ وحيدٌ.

3- إن مجال الأعداد القابلة للتمثيل في نظام العد الجديد هو: $0 < x < 1$

4- تعرّف الدقة في التمثيل الجديد للأعداد الكسرية بأنها المسافة بين كسرين متتاليين من متتالية القيم الناتجة وتساوي الحد الأخير في متتالية القيم الناتجة. ولقياس دقة التمثيل نحسب خطأ التمثيل النسبي الأعظمي والذي يساوي نصف حجم الخطوة النسبي. ولنحسب حجم الخطوة النسبي في نظام العد الجديد:

ليكن x كسراً ويقع ضمن مجال أعداد نظام العد الجديد، يوجد تمثيلان متتاليان F1 وF2 من متتالية القيم الناتجة في السلسلة المعيارية ويحقق $F_1 \le x \le F_2$.

$F_1 = \frac{1}{q}$ و $F_2 = \frac{1}{q(q-1)+1}$ فيكون حجم الخطوة النسبي :

$$d(x) = \frac{\frac{1}{q(q-1)+1} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{q}} = \frac{q}{q(q-1)+1} - 1$$

ومنه نجد أن خطأ التمثيل في نظام العد الجديد صغير .

مثال: إذا مثّل كسر بنظام العد الجديد فينتج لدينا حسب السلسلة المعيارية 7 حدود (وهو العدد الأعظمي للقيم الناتجة حسب السلسلة المعيارية) بالشكل: $\frac{1}{q} + \frac{1}{q(q-1)+1} + ...$. فالحد $\frac{1}{q(q-1)+1}$ أكبر من باقي الحدود التي تليه وحتى آخر السلسلة، وعليه فالخطأ في الحد $\frac{1}{q}$ هو $\frac{2}{q(q-1)+1}$ أي الخطأ المرتكب بالتمثيل هو ضعف الحد الذي يليه وهذا الخطأ صغير جداً.

5- توجد علاقة تبادلية بين الدقة والمجال فزيادة حجم القيم الناتجة يعزز من الدقة، وهذا ما يحققه نظام العد الجديد فكلما كانت القيم الناتجة عن خوارزمية التمثيل الجديد كبيرة حقّق هذا دقة عالية. وحسب السلسلة المعيارية ينتج لدينا 7 حدود (وهو العدد الأعظمي للقيم الناتجة) والحد الأخير فيه هو $\frac{1}{9 \times 10^{12}}$ (أي لدينا 1 في الخانة 9×10^{12} وهو كبير جداً ومن ثم الدقة عالية جداً).

وبقي لدينا العامل الأخير وهو كلفة البنية الصلبة (Hardware) المطلوبة لتخزين الأعداد ومعالجتها ويتطلب التصميم والتنفيذ للتمثيل الجديد وعملياته الحسابية في البنية الصلبة للحاسوب بإيجاد (مسار البيانات – خوارزمية التحكم- بناء مخطط الحالة- إنشاء جدول الحالة- استنتاج المخارج- ثم إيجاد دارة التحكم)، صياغة التعليمات وحجزها للنظام المقترح بذاكرة الحاسوب، وأخيراً تصميم وحدة الحساب والمنطق الخاصة بهذا النظام. وهذا سيكون في بحثٍ آخر يعالج حجم الذاكرة اللازم وسرعة أداء العمليات للتمثيل الجديد، وحساب كلفتها. وإجراء مقارنة مع مثيلاتها في طريقة التمثيل بالفاصلة العائمة

وذلك في محاولة بحثية لإثبات سرعتها العالية وكلفتها القليلة، كما حققت في هذا البحث لتمثيل الأعداد الكسرية والأعداد الصغيرة في الحاسوب دقة تمثيل عالية.

عالج النظام المقترح قضية تمثيل العدد الكسري ضمن عدد خانات الحاسوب، أيضاً يعدُّ النظام رياضياً ونظرياً من خلال خوارزمياته المقدّمة ذا كلفة مقبولة وسرعة مقبولة حيث تمّ حساب كلفة الخوارزمية، لكن ما زالت بعض القضايا مثل (تمثيل العدد الكسري ضمن عدد خانات الحاسوب مقارنة مع مثيله في تمثيل الفاصلة العائمة ومعاييره المستعملة - حجم الذاكرة اللازم وسرعة أداء العمليات للتمثيل الجديد - كلفة البنية الصلبة (Hardware) المطلوبة لتخزين الأعداد ومعالجتها) بحاجة لدراسة بحثية ومعالجة للحكم على استعمال النظام الجديد المقترح في الحاسوب.

البرمجيات:

يتم إيجاد البرامج لخوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية، وخوارزمية الجمع بلغة C++ لدراسة أدائها فيما يأتي:

```
//arith.cpp : Defines the entry point for the console application.
//
#include "stdafx.h"
#include <iostream.h>
#include <math.h>
int represent (long x, long y, long n[]){
	int len=0;
	if (x>y){
		long t=x;
		x=y;
		y=t;
	}
	long z1=y/x;
	while ((y %x)!=0){
		n[len++]=z1+1;
		x=(z1+1)*x-y;
```

```
                y=y*(z1+1);
                if (x==1)
                        Break;
                z1=y/x;
        }
                n[len++]=z1;
        return len;
}
void show (long n[], int x){
        cout<<"n" =;
        for (int i=0; i<x; i++)
                cout << n[i]<< "," ;
        cout << "\n";
}
void sort (long m[], long n) { //n is the length of m
    long aux;
    for (int i=0; i<=n-2; i++)
      for (int j=n-1; j>i; j--)
        if (m[j-1] > m[j]){
          aux=m[j-1];
          m[j-1]=m[j];
          m[j]=aux;
}
}
int merge (long x1[], int len1, long x2[], int len2, long x3 []){
        int i=0,j=0,k=0;
        sort(x1,len1);
        sort(x2,len2);
        while ((i<len1) && (j<len2))
                x3[k++]=(x1[i]<x2[j])? x1[i++]:x2[j++];
        if (i==len1)
                for (i=j; i<len2; i++)
                        x3[k++]=x2[i] ;
        else
```

```
                for (j=i; j<len1; j++)
                        x3[k++]=x1[j] ;
        return k;
}
int add (long x[], int len, long y []){
        int k=0, i, p, j;
        long aux[30];
        for (i=len-1; i>0; i=i-2){
                long m2=x[i];
                long n2=x[i-1];
                if ((n2==m2) && ((n2 % 2) == 0))
                        y[k++]=n2/2;
                else if ((n2==m2) && ((n2 % 2) != 0  )){
                        y[k++]=(n2+1)/2;
                        y[k++]=(n2+1)*n2/2;
                }else if (((n2*m2)%(n2+m2))==0)
                        y[k++]=(n2*m2)/(n2+m2);
                else{
                        p=represent(n2,m2,aux);
                        for (j=0; j<p; j++)
                                y[k++]=aux[j];
                }
        }
    if (i==0)
                y[k++]=x[0];
        return k;
}
int main(int argc, char* argv[]){
        long y1[30],y2[30],y3[30],y4[30];
        int len1,len2,len3,len4;
        int  x,y, Rxy;
        cout<<"Enter x and y of the first number:\n";
        cin>>x>>y;
        len1=represent(x,y,y1);
        cout<<"Here it is in the new representation:\n";
        show(y1,len1);
```

```
        cout<<"Enter x and y of the second number:\n";
        cin>>x>>y;
        len2=represent(x,y,y2);
        cout<<"Here it is in the new representation:\n";
        show(y2,len2);
    len3=merge(y1,len1,y2,len2,y3);
        cout<<"Here is the merging of the two numbers:\n";
        show(y3,len3);
    len4=add(y3,len3,y4);
        cout<<"Here is the sum:\n";
        show(y4,len4);
        cout<<"Here is the sum after ordering it:\n";
        sort(y4,len4);
        show(y4,len4);
        return 0;
}
```

النتائج والعمل المستقبلي:

قدمنا بعد دراسة تمثيل الأعداد في الحاسوب، تمثيلاً جديداً للأعداد الكسرية يعتمد على نظام السلسلة المتباعدة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ القادر على تمثيل الأعداد الصغيرة بطريقة جديدة تماماً وبدقة عالية. حيث تسمح فكرة البحث بتمثيل الكسور غير المنتهية في النظامين العشري والثنائي بكسور منتهية وفق التمثيل الجديد.

فتمّ إيجاد خوارزمية التمثيل الذي هو بدلالة0 و1 مع العديد من الأمثلة، وبرهان وحدانيته. وتمّت مناقشة العمليات الحسابية في هذا النظام وفقاً لهذا التمثيل بشرح خوارزمياتها وتطبيقها على أمثلة عديدة، وبرهان وحدانية عملية الجمع (أي إن ناتج جمع كسرين حسب خوارزمية الجمع ممثّل بخوارزمية التمثيل الجديد نفسها).

ونتيجة للتمثيل الجديد حصل تباعد في الخانات، وقد أمكن إيجاد حلٍ لها بشكل يتناسب مع العدد الأعظمي لعدد خانات الحاسوب وهذه النتائج ذات دقة عالية. كما تمّ إيجاد التحويلات بين نظام العد الجديد ونظم العد القياسية. وأخيراً، نوقشت بعض العوامل التي تؤخذ بالحسبان في اختيار نظم العدّ عادةً في إيجاد نظام العد الجديد.

أما العمل المستقبلي فهو حساب كلفة البنية الصلبة (Hardware) المطلوبة لتخزين الأعداد ومعالجتها ويتطلب التصميم والتنفيذ للتمثيل الجديد وعملياته الحسابية في البنية الصلبة للحاسوب بإيجاد (مسار البيانات –خوارزمية التحكم-بناء مخطط الحالة-إنشاء جدول الحالة-استنتاج المخارج-ثم إيجاد دارة التحكم)، صياغة التعليمات وحجزها للنظام المقترح بذاكرة الحاسوب، ومعالجة حجم الذاكرة اللازم وسرعة أداء العمليات للتمثيل الجديد، وحساب كلفتها. وإجراء مقارنة مع مثيلاتها في طريقة التمثيل بالفاصلة العائمة وذلك في محاولة بحثية لإثبات سرعتها العالية وكلفتها القليلة.

والعمل المستقبلي الآخر هو تطبيق خوارزمية التمثيل الجديد للأعداد الكسرية بنظم الترميز لإيجاد مشذّر لها، حيث مهمة المشذر بنظم الترميز هو التعديل في ترتيب سلسلة بتات، بحيث يحصل تبديل ذو بعثرة كبيرة في ترتيب خاناتها الواحدية، ومن ثم نحصل على مشذر جيد لنظم الترميز.

REFERENCES

[1]Alexopoulos, A.G., and Swartz land, JR. E. E.(1975). “The Sign/ Logarithm Number System,” IEEE Trans. On computer, USA.

[2]Hayes, J. P. (1979). “Computer Architecture And Organization,” Mc Graw-Hill, USA.

[3] Hennessy, J.L., and Patterson, D.A. (1998). “Computer Organization And Design.” Morgan Kaufman Publishers, Inc.USA

[4]Morris Mano, M. (1982). “Computer System Architecture.” Prentice Hall, Knglewood. Gliffs, NJ.USA .

[5]Scott, N. R. (1985). “Computer Number Systems And Arithmetic.” Prentice Hall, Knglewood Gliffs, NJ.USA .