المحددات ((المعينات)) DETERMINANTS

أولاً : المحددات من المرتبة الثانية و المرتبة الثالثة :

- نسمي الكائن الرياضي : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محدداً من المرتبة الثانية ، حيث a,b,c,d مقادير عددية و نسمي المقدار $\Delta=ad-bc$ قيمة أو مفكوك أو منشور المحدد Δ.
- نسمي الكائن الرياضي : $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ محدداً من المرتبة الثالثة ، و هو مؤلف من ثلاثة أعمدة و ثلاثة أسطر ، ندعو العناصر a_{11},a_{22},a_{33} عناصر القطر الرئيسي ، بينما ندعو العناصر a_{13},a_{22},a_{31} عناصر القطر الثانوي .

يمكن نشر هذا المحدد بعدة طرق نذكر منها :

❶ طريقة ساروس (*Sarrus*) :

هذه الطريقة لا تطبّق إلا لمحددات المرتبة الثالثة

خطوات تطبيق طريقة ساروس :

- نكرّر عناصر العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد المراد نشره.
- نأخذ المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الرئيسي و القطرين الموازيين له مطروحاً منه المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الثانوي و القطرين الموازيين له.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

الحل : نكرّر عناصر العمودين الأول و الثاني على يمين المحدد Δ.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

نأخذ المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الرئيسي و القطرين الموازيين له مطروحاً منه المجموع الجبري لجداءات عناصر القطر الثانوي و القطرين الموازيين له

$$\Delta=[(1)(-2)(2)+(2)(1)(1)+(-3)(-1)(1)]-[(-3)(-2)(1)+(1)(1)(1)+(2)(-1)(2)]$$

$$\Delta=[(-4)+(2)+(3)]-[(6)+(1)+(-4)]=-2$$

❷ طريقة بيزو (*Bezout*) :

و هي الطريقة العامة في نشر المحدد وفق أحد أسطره أو أحد أعمدته

و لكن قبل البدء بشرح هذه الطريقة لابد من ذكر بعض التعاريف المهمة :

❷ ⬅ ❶ : **صغير العنصر *Minor*** : إن صغير العنصر a_{ij} في المحدد Δ هو المحدد الناتج من حذف سطر و عمود العنصر a_{ij} و نرمزله بالرمز $M(a_{ij})$.

تطبيق (★): في المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **أوجد صغير العنصر** a_{11} **و** a_{32}

$$M(a_{32})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad ، \quad M(a_{11})=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

❷ ⬅ ❷ : **المتمم الجبري *Cofactor*** : إن المتمم الجبري للعنصر a_{ij} هو صغير العنصر a_{ij} مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ و نرمزله بالرمز $A_{ij}=(-1)^{i+j}M(a_{ij})$.

تطبيق : في المحدد Δ في التطبيق (★) أوجد المتمم الجبري للعنصر a_{11} و a_{32}

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M(a_{11})=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M(a_{32})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

❷ ⬅ ❸ : **منقول محدد *Transpose of determinant*** : هو المحدد Δ^T الناتج من جعل أسطر المحدد Δ أعمدة و أعمدته أسطراً مع المحافظة على الترتيب ، إن قيمة المحدد تساوي قيمة منقوله أي $\Delta^T=\Delta$

مبرهنة بيزو : إن مفكوك محدد يساوي مجموع جداء عناصر أحد أسطره (أعمدته) في متمماتها الجبرية.

تطبيق : يُنشر المحدد Δ في التطبيق (★) وفق السطر الأول بالعلاقة :

$$\Delta=a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$$

ملاحظة مهمة جداً :

عند نشر محدد بطريقة بيزو ينصح دوماً بالنشر وفق السطر (العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار.

تمرين: احسب قيمة المحدد التالي: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

ننشر وفق العمود الثاني (يحوي أكبر عدداً من الأصفار):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}=(-1)^{3+2}\times(1)\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-(4-6)=\boxed{+2}$$

ثانياً : خواص المحددات :

① تنعدم قيمة المحدد إذا حوى سطراً (عموداً) جميع عناصره أصفار . $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 5 & 0 & 6\end{vmatrix}=0$

② تنعدم قيمة المحدد إذا تطابق فيه سطران (عمودان) . $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 7 & 1\\ 3 & 9 & 3\\ 5 & 0 & 5\end{vmatrix}=0$

③ تنعدم قيمة المحدد إذا تناسب فيه سطران (عمودان) . $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 7 & 2\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 2 & 8\end{vmatrix}=0$

④ إن تبديل موقعي سطرين (عمودين) في محدد يغير فقط من إشارته.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 6\end{vmatrix}=\boxed{+2}\quad , \quad \Delta_2=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{vmatrix}=\boxed{-2}$$

⑤ لضرب محدد بعد ثابت غير معدوم نضرب جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة بهذا العدد ، و بالعكس عند إخراج عامل مشترك فإننا نخرجه من جميع عناصر أحد الأسطر أو أحد الأعمدة .

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ 4 & 6 & 2 & 4\\ 9 & 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=(2)\begin{vmatrix}0 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2}\\ 9 & 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=(2)(3)\begin{vmatrix}0 & 7 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{2}\\ \boxed{3} & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0}\end{vmatrix}$$

⑥ يمكن تجزئة جميع عناصر سطر ما أو عمود ما إلى مجموع عنصرين ثم نقوم بتجزئة المحدد المعطى إلى مجموع محددين يماثلان المحدد الأصلي و يختلفان معه فقط بالسطر أو العمود المجزء ، حيث يتم توزيع عناصر السطر المجزء على المحددين المذكورين.

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ 11 & 15 & 12 & 5\\ 8 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ 1+10 & 7+8 & 8+4 & 3+2\\ 8 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ 8 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}}_{R2,R3\ \text{تطابق}}+\underbrace{\begin{vmatrix}5 & 4 & 2 & 1\\ 1 & 7 & 8 & 3\\ 10 & 8 & 4 & 2\\ 8 & 11 & 2 & 0\end{vmatrix}}_{R1,R3\ \text{تناسب}}=0+0=0$$

⑦ لا تتغير قيمة المحدد إذا جمعنا إلى عناصر أحد أسطره (أعمدته) العناصر المقابلة لها في سطر (عمود) آخر مضروبة بعدد ما غير معدوم.

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}}_{\substack{R2\to R2-R1\\ R3\to R3-R1}}=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 4 & 4 & 4\\ 8 & 8 & 8 & 8\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}}_{R2,R3\ \text{تناسب}}=0$$

تمارين داعمة على خواص المحددات

التمرين الأول : احسب قيمة المحدد Δ التالي : $\Delta=\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & 3a & 7x \\ 1+2b & 2 & 3b & 7x \\ 1+2c & 3 & 3c & 7x \\ 1+2d & 4 & 3d & 7x \end{vmatrix}$

الحل : بالاعتماد على خاصية تجزئة المحدد إلى محددين نجد :

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3a & 7x \\ 1 & 2 & 3b & 7x \\ 1 & 3 & 3c & 7x \\ 1 & 4 & 3d & 7x \end{vmatrix}}_{C1,C4\text{تناسب}}+\underbrace{\begin{vmatrix} 2a & 1 & 3a & 7x \\ 2b & 2 & 3b & 7x \\ 2c & 3 & 3c & 7x \\ 2d & 4 & 3d & 7x \end{vmatrix}}_{C1,C3\text{تناسب}}=0+0=0$$

التمرين الثاني : احسب (λ) التي تجعل قيمة المحدد $\Delta=30$ ، $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد وفق العمود الرابع بعد أن نجري عليه التحويل $R_4 \to R_4 - R_1$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

ننشر المحدد الثلاثي وفق السطر الأخير:

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 4 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=(-1)(+5)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix}=(-5)(-3\lambda)=15\lambda$$

$$\left.\begin{matrix} \Delta=30 \\ \Delta=15\lambda \end{matrix}\right\} \to 30=15\lambda \to \boxed{\lambda=2}$$

التمرين الثالث : علل انعدام قيمة المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{a+b}{5} & \genfrac{}{}{0pt}{}{a+c}{6} & \genfrac{}{}{0pt}{}{a+d}{7} & \genfrac{}{}{0pt}{}{c+d}{8} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{c+d}{6} & \genfrac{}{}{0pt}{}{d+b}{5} & \genfrac{}{}{0pt}{}{c+b}{4} & \genfrac{}{}{0pt}{}{a+b}{3} \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويلات السطرية التالية: $R_2 \to R_2 + R_4$ ، $R_1 \to R_1 + R_3$

$$\Delta=\begin{vmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{(a+b+c+d)}{11} & \genfrac{}{}{0pt}{}{(a+b+c+d)}{11} & \genfrac{}{}{0pt}{}{(a+b+c+d)}{11} & \genfrac{}{}{0pt}{}{(a+b+c+d)}{11} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{c+d}{6} & \genfrac{}{}{0pt}{}{d+b}{5} & \genfrac{}{}{0pt}{}{c+b}{4} & \genfrac{}{}{0pt}{}{a+b}{3} \end{vmatrix}$$

$$\Delta=11(a+b+c+d)\underbrace{\begin{vmatrix} \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1} & \genfrac{}{}{0pt}{}{1}{1} \\ \genfrac{}{}{0pt}{}{c+d}{6} & \genfrac{}{}{0pt}{}{d+b}{5} & \genfrac{}{}{0pt}{}{c+b}{4} & \genfrac{}{}{0pt}{}{a+b}{3} \end{vmatrix}}_{R1,R2\text{ تطابق}}=0$$

التمرين الرابع : علل انعدام قيمة المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos^2\gamma \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل: $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos^2\gamma \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos^2\alpha - sin^2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos^2\beta - sin^2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos^2\gamma - sin^2\gamma \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos2\alpha & cos2\alpha \\ sin^2\beta & cos2\beta & cos2\beta \\ sin^2\gamma & cos2\gamma & cos2\gamma \end{vmatrix}}_{\text{تطابق } C2,C3}=0$$

التمرين الخامس : علل انعدام قيمة المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ x+7 & x+8 & x+9 \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل: $R_3 \rightarrow R_3 + R_1$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ 2x+8 & 2x+10 & 2x+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ 2(x+4) & 2(x+5) & 2(x+6) \end{vmatrix}=2\times\underbrace{\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ x+4 & x+5 & x+6 \\ x+4 & x+5 & x+6 \end{vmatrix}}_{\text{تطابق } R2,R3}=0$$

☙☙☙ تمارين غير محلولة على المحددات ❧❧❧

أولاً : احسب قيمة كل من المحددات التالية :

❶ $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ ❷ $\Delta=\begin{vmatrix} x & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ ❸ $\Delta=\begin{vmatrix} e^x & -5 \\ e^x & 2 \end{vmatrix}$ ❹ $\Delta=\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

ثانياً : حل كل من المعادلات التالية :

❶ $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ x & x \end{vmatrix}$ ❷ $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & x \end{vmatrix}$ ❸ $\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} sinx & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ ❹ $\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ 4 & e^x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

ثالثاً : بالاستفادة من خواص المحددات ، علل انعدام قيمة كل من المحددات التالية :

❶ $\Delta=\begin{vmatrix} 12 & 0 & 21 \\ 16 & 0 & 61 \\ 18 & 0 & 81 \end{vmatrix}$ ❷ $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & x-1 & 1 \\ 4 & x-2 & 2 \\ 6 & x-3 & 3 \end{vmatrix}$ ❸ $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & x+1 & 2y \\ 4 & x+1 & 2y \\ 6 & x+1 & 2y \end{vmatrix}$

❹ $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ ❺ $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ❻ $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & sin^2x & cos^2x \\ 3 & sin^2y & cos^2y \\ 3 & sin^2z & cos^2z \end{vmatrix}$

ثالثاً : طرائق حساب المحددات من المراتب العليا :

① طريقة تخفيض مرتبة المحدد Δ_n :

فكرة الطريقة : نجعل جميع عناصر أحد الأسطر (أحد الأعمدة) أصفاراً عدا عنصر واحد فقط ثم ننشر المحدد Δ_n وفق هذا السطر (العمود) فنحصل على محدد من المرتبة Δ_{n-1} ثم نكرر هذه العملية على المحدد الناتج و نستمر بذلك حتى نحصل على محدد من المرتبة الثانية Δ_2.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويلات السطرية : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \to R_3 - 3R_1$ ، $R_4 \to R_4 - 4R_1$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&-7\\0&-2&-8&-10\\0&-7&-10&-13\end{vmatrix}$$

ننشر وفق العمود الأول :

$$\Delta=(+1)\begin{vmatrix}-1&-2&-7\\-2&-8&-10\\-7&-10&-13\end{vmatrix}$$

نجري التحويلات السطرية : $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ، $R_3 \to R_3 - 7R_1$

$$\Delta=(+1)\begin{vmatrix}-1&-2&-7\\0&-4&4\\0&4&36\end{vmatrix}=(+1)(-1)\begin{vmatrix}-4&4\\4&36\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(+1)(-1)[(-4)(36)-(4)(4)]=-(-160)=\boxed{160}$$

② طريقة تحويل المحدد Δ_n إلى الشكل المثلثي:

فكرة الطريقة : تعتمد هذه الطريقة على تحويل المحدد إلى محدد مثلثي علوي أو سفلي و ذلك بجعل جميع العناصر الواقعة فوق قطره الرئيسي أو تحت قطره الرئيسي أصفاراً ، و بذلك تكون قيمة المحدد مساوية لجداء عناصر قطره الرئيسي.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\5&1&1&1\end{vmatrix}$

الحل : نجمع جميع الأعمدة إلى العمود الأول :

$$\Delta=\begin{vmatrix}8&1&1&5\\8&5&1&1\\8&1&5&1\\8&1&1&1\end{vmatrix}=(8)\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&5&1&1\\1&1&5&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}\quad \begin{matrix}R2\to R2-R1\\R3\to R3-R1\\R4\to R4-R1\end{matrix}$$

$$\Delta=(8)\begin{vmatrix}1&1&1&5\\0&4&0&-4\\0&0&4&-4\\0&0&0&-4\end{vmatrix}=(8)(1)(4)(4)(-4)=-512$$

تمرين: احسب قيمة المحدد التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\1&e^x+3&5&7\\1&3&e^{-x}+5&7\\1&3&5&8\end{vmatrix}$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\1&e^x+3&5&7\\1&3&e^{-x}+5&7\\1&3&5&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boxed{1}&3&5&7\\0&\boxed{e^x}&0&0\\0&0&\boxed{e^{-x}}&0\\0&0&0&\boxed{1}\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(1)(e^x)(e^{-x})(1)=\boxed{1}$$

③ طريقة تفريق المحدد إلى محددين أو أكثر:

فكرة الطريقة : تعتمد هذه الطريقة على تحليل المحدد وفق أحد أعمدته أو احد أسطره إلى محددين أو أكثر من نفس المرتبة ، بحيث نحصل على محددات جديدة تكون أسهل في عملية حساب القيمة.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي $\Delta_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\0&2&2&\cdots&2&2&2\\0&0&3&\cdots&3&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2&n-2&n-2\\0&0&0&\cdots&0&n-1&n-1\\x&x&x&\cdots&x&x&x+n\end{vmatrix}$

الحل : نكتب المحدد Δ_n بالشكل التالي : (انظر السطر الأخير)

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\0&2&2&\cdots&2&2&2\\0&0&3&\cdots&3&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2&n-2&n-2\\0&0&0&\cdots&0&n-1&n-1\\0+x&0+x&0+x&\cdots&0+x&0+x&n+x\end{vmatrix}$$

نكتب المحدد Δ_n على شكل مجموع محددين يختلفان فقط بالسطر الأخير كما يلي:

$$\Delta_n=\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\0&2&2&\cdots&2&2&2\\0&0&3&\cdots&3&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2&n-2&n-2\\0&0&0&\cdots&0&n-1&n-1\\0&0&0&\cdots&0&0&n\end{vmatrix}}_{=1\times2\times3\times\cdots(n-2)(n-1)(n)=n!}+\underbrace{\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1&1&1\\0&2&2&\cdots&2&2&2\\0&0&3&\cdots&3&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&n-2&n-2&n-2\\0&0&0&\cdots&0&n-1&n-1\\x&x&x&\cdots&x&x&x\end{vmatrix}}_{R_1,R_n\ \text{تناسب}}$$

$$\Delta_n=[1\times2\times3\times\cdots(n-2)(n-1)(n)]+[0]=n!+0=n!$$

④ طريقة إخراج المضاريب الخطية (محدد فاندرموند) :

محدد فاندرموند : محدد من نوع خاص ، سطره الأول جميع العناصر فيه قيمتها تساوي الواحد أما السطر الثاني فهو كيفي ، السطر الثالث يكون مربع السطر الثاني ، السطر الرابع يكون مكعب السطر الثاني . هكذا ...

يأخذ محدد فاندرموند أحد الشكلين التاليين:

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3\end{vmatrix}$$

$$V=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

$$V=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3\\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3\\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3\\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3\end{vmatrix}$$

$$V=(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)$$

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد التالي $V=\begin{vmatrix}1 & sin\alpha & sin^2\alpha\\ 1 & sin\beta & sin^2\beta\\ 1 & sin\gamma & sin^2\gamma\end{vmatrix}$

$$V=(sin\gamma-sin\beta)(sin\gamma-sin\alpha)(sin\beta-sin\alpha)$$

تمرين :استبدل الرمز (★) بالعدد المناسب حتى يكون المحدد الآتي هو محدد فاندرموند ثم احسب قيمته :

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \star & \star & \star\\ \star & \star & \star & \star\\ \star & -1 & 8 & -8\end{vmatrix}$$

الحل:

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 8 & -8\end{vmatrix}$$

$$V=(-2-2)(-2+1)(-2-1)(2+1)(2-1)(-1-1)=\boxed{72}$$

رابعاً : المحدد المتناظر و المحدد المتناظر تخالفياً :

المحدد المتناظر : نسمي المحدد الذي تحقق عناصره العلاقة $a_{ij} = a_{ji}$ من أجل جميع قيم i, j محدداً متناظراً بالنسبة لقطره الرئيسي.

تطبيق عددي: ليكن المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 2 & 3 & \gamma \\ 3 & \gamma & 8 \end{vmatrix}$ **و المطلوب تحديد قيم الثوابت الحقيقية** (α, β, γ) **التي تجعل المحدد** Δ **محدداً متناظراً قيمته تساوي** $(+1)$.

الحل : من شروط المسألة نجد :

- المحدد متناظر ← $\alpha = 2 \ \ , \ \ \beta = 3$
- $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & \gamma \\ 3 & \gamma & 8 \end{vmatrix} = +1$ ننشر المحدد Δ حسب ساروس فنجد

$$-\gamma^2 + 12\gamma - 35 = +1$$

$$\gamma^2 - 12\gamma + 36 = 0$$

$$(\gamma - 6)^2 = 0 \ \rightarrow \ \gamma - 6 = 0 \ \rightarrow \ \gamma = 6$$

إذاً قيم الثوابت هي : $\boxed{\alpha = 2 \ \ , \ \ \beta = 3 \ \ , \ \ \gamma = 6}$

المحدد المتناظر تخالفياً : نسمي المحدد الذي تحقق عناصره العلاقة $a_{ij} = -a_{ji}$ من أجل جميع قيم i, j محدداً متناظراً تخالفياً بالنسبة لقطره الرئيسي.

ملاحظة : عناصر القطر الرئيسي في المحدد المتناظر تخالفياً جميعها أصفار.

مبرهنة مهمة جداً : إذا كانت مرتبة المحدد المتناظر تخالفياً فردية فإن قيمة هذا المحدد معدومة.

تطبيق عددي: احسب قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z & 2u \\ -7x & 0 & 7w & 7f & 7g \\ -5y & -5w & 0 & 5h & 5k \\ -3z & -3f & -3h & 0 & 3w \\ -4u & -4g & -4k & -4w & 0 \end{vmatrix}$

الحل : نخرج من السطر الأول العامل المشترك (2) و من السطر الثاني العامل المشترك (7) و من السطر الثالث العامل المشترك (5) و من السطر الرابع العامل المشترك (3) و من السطر الخامس العامل المشترك (4) فنجد :

$$\Delta = [(2)(7)(5)(3)(4)] \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & x & y & z & u \\ -x & 0 & w & f & g \\ -y & -w & 0 & h & k \\ -z & -f & -h & 0 & w \\ -u & -g & -k & -w & 0 \end{vmatrix}}_{\text{معدوم}} = 0$$

تمرين: اثبت صحة العلاقة التالية : $\Delta=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -a & b\\ -1 & a & 0 & -c\\ 1 & -b & c & 0\end{vmatrix}=(b-a-c)^2$

الحل : نجري التحويلات التالية : $R_3 \to R_3+R_2$ ، $R_4 \to R_4-R_2$ و ننشر وفق السطر الثاني .

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -a & b\\ 0 & a & -a & b-c\\ 0 & -b & a+c & -b\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-1 & 1 & -1\\ a & -a & b-c\\ -b & a+c & -b\end{vmatrix}$$

نجري التحويلات التالية : $C_2 \to C_2+C_1$ ، $C_3 \to C_3-C_1$ و ننشر وفق العمود الثالث .

$$\Delta=(-1)\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ a & 0 & b-c-a\\ -b & a+c-b & 0\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(-1)[-(b-c-a)]\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -b & a+c-b\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(b-c-a)[(-1)(a+c-b)-(0)(-b)]$$

$$\Delta=(b-c-a)(b-c-a)=(b-c-a)^2$$

ʚʚʚʚʚʚʚʚʚʚʚʚ ɞɞɞɞɞɞɞɞɞɞɞɞ

ʚʚʚ تمارين عامة على بحث المحددات ɞɞɞ

التمرين الأول : احسب قيمة المحدد Δ التالي : $\Delta=\begin{vmatrix}x & sin\theta & cos\theta\\ -sin\theta & -x & 1\\ cos\theta & 1 & x\end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد Δ بطريقة بيزو وذلك وفق السطر الأول :

$$\Delta=(+x)\begin{vmatrix}-x & 1\\ 1 & x\end{vmatrix}+(-sinx)\begin{vmatrix}-sin\theta & 1\\ cos\theta & x\end{vmatrix}+(cos\theta)\begin{vmatrix}-sin\theta & -x\\ cos\theta & 1\end{vmatrix}$$

$$\Delta=(+x)(-x^2-1)+(-sin\theta)(-x.sin\theta-cos\theta)+(cos\theta)(-sin\theta+xcos\theta)$$

$$\Delta=-x^3-x+x.sin^2\theta+sin\theta cos\theta-sin\theta cos\theta+xcos^2\theta$$

$$\Delta=-x^3-x+x(sin^2\theta+cos^2\theta)=-x^3-x+x=\boxed{-x^3}$$

التمرين الثاني : اثبت قيمة المحدد Δ الآتي مستقلة عن المتغير θ $\Delta=\begin{vmatrix}cos\theta & 0 & -sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ sin\theta & 0 & cos\theta\end{vmatrix}$

الحل : ننشر المحدد Δ بطريقة بيزو وذلك وفق العمود الثاني :

$$\Delta=(+1)\begin{vmatrix}cos\theta & -sin\theta\\ sin\theta & cos\theta\end{vmatrix}=(+1)[(cos\theta)(cos\theta)-(-sin\theta)(sin\theta)]$$

$$\Delta=cos^2\theta+sin^2\theta \to \boxed{\Delta=1}$$

التمرين الثالث : احسب قيمة المحدد Δ التالي : $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & -\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & 0 & -\cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$

الحل : قيمة المحدد Δ تساوي الصفر كونه محدد متناظر تخالفياً مرتبته فردية .

التمرين الرابع : احسب قيمة Δ_n: $\Delta_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

الحل : نجري التحويل التالي $C_1 \to \sum_1^n c_i$:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 3+(n-1)(1) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3+(n-1)(1) & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3+(n-1)(1) & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ 3+(n-1)(1) & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3+(n-1)(1) & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

نخرج من العمود الأول $[3+(n-1)]$ كعامل مشترك :

$$\Delta_n=[3+(n-1)]\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

نجري التحويل التالي $R_i \to R_i - R_1$ فنحصل على محدد مثلثي علوي:

$$\Delta_n=[3+(n-1)]\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}=[3+(n-1)](2)^{n-1}$$

و بالتالي فإن قيمة المحدد Δ هي : $\boxed{\Delta_n=[3+(n-1)](2)^{n-1}}$

التمرين الخامس: اثبت أن $\Delta=\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}=(a+b+2x)(a+b-2x)(b-a)^2$

$$\Delta=\underbrace{\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix}}_{C_1\to C_1+C_2+C_3+C_4}=\begin{vmatrix} a+b+2x & a & b & x \\ a+b+2x & x & x & b \\ a+b+2x & x & x & a \\ a+b+2x & b & a & x \end{vmatrix}$$

$$\Delta=(a+b+2x)\begin{vmatrix} 1 & a & b & x \\ 1 & x & x & b \\ 1 & x & x & a \\ 1 & b & a & x \end{vmatrix}\begin{matrix} R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1 \\ R_4\to R_4-R_1 \end{matrix}$$

$$\Delta = (a+b+2x)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & b & x \\ 0 & x-a & x-b & b-x \\ 0 & x-a & x-b & a-x \\ 0 & b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}}_{\text{وفق } C_1}$$

$$\Delta = (a+b+2x)(1)\underbrace{\begin{vmatrix} x-a & x-b & b-x \\ x-a & x-b & a-x \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}}_{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\Delta = (a+b+2x)\underbrace{\begin{vmatrix} x-a & x-b & b-x \\ 0 & 0 & a-b \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix}}_{\text{وفق } R_2}$$

$$\Delta = (a+b+2x)[-(a-b)]\underbrace{\begin{vmatrix} x-a & x-b \\ b-a & a-b \end{vmatrix}}_{\text{إخراج } (b-a)}$$

$$\Delta = (a+b+2x)(b-a)(b-a)\begin{vmatrix} x-a & x-b \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a+b+2x)(b-a)^2[-x+a-x+b] \to \boxed{\Delta = (a+b+2x)(a+b-2x)(b-a)^2}$$

التمرين السادس : اثبت أن $\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}}_{L1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & x & z^2 \end{vmatrix}}_{L2}$

$$L1 = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = \frac{xyz}{xyz}\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}}_{\substack{R_1 \to xR_1 \\ R_2 \to yR_2 \\ R_3 \to zR_3}} = \frac{1}{xyz}\underbrace{\begin{vmatrix} x & x^2 & xyz \\ y & y^2 & xyz \\ z & z^2 & xyz \end{vmatrix}}_{C_3 \to \frac{C_3}{xyz}}$$

$$L1 = \underbrace{\begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}}_{C_1 \leftrightarrow C_3} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}}_{C_2 \leftrightarrow C_3} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & x & z^2 \end{vmatrix} = L2$$

التمرين السابع: احسب قيمة المحدد $\Delta = \begin{vmatrix} e^{x-y} & 1 & e^{z-y} \\ e^{x-z} & e^{y-z} & 1 \\ 1 & e^{y-x} & e^{z-x} \end{vmatrix}$

الحل : نكتب المحدد Δ بالشكل الآتي ، ثم نخرج من العمود الأول العامل المشترك (e^{-y}) و من السطر الثاني العامل المشترك (e^{-z}) و من السطر الثالث العامل المشترك (e^{-x}) فنجد :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x e^{-y} & e^y e^{-y} & e^z e^{-y} \\ e^x e^{-z} & e^y e^{-z} & e^z e^{-z} \\ e^x e^{-x} & e^y e^{-x} & e^z e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x}e^{-y}e^{-z}\underbrace{\begin{vmatrix} e^x & e^y & e^z \\ e^x & e^y & e^z \\ e^x & e^y & e^z \end{vmatrix}}_{\text{تطابق}} = 0 = L2$$

التمرين الثامن: ف1- 2021-2022 : بفرض المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & x \\ 2 & 4 & sinx & 0 \\ -1 & -2 & sinx & cosx \end{vmatrix}$ ، فإن قيمة المحدد هي:

Ⓐ $\Delta= x + sin2x$ Ⓑ $\Delta= 5 + sinx + cosx$ Ⓒ $\Delta= 4 \cdot sinx \cdot cosx$ Ⓓ $\Delta= sin2x$

فكرة الحل : محاولة تخفيض مرتبة المحدد أو تحويله إلى محدد مثلثي و ذلك بهدف تسهيل عملية حساب قيمته.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & x \\ 2 & 4 & sinx & 0 \\ -1 & -2 & sinx & cosx \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{matrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 0 & sinx & 0 \\ 0 & 0 & sinx & cosx \end{vmatrix} R_4 \to R_4 - R_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 0 & sinx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cosx \end{vmatrix} = (1)(2)(sinx)(cosx) = \boxed{sin2x}$$

التمرين التاسع: ف2- 2021-2022 : بفرض المحدد $\Delta=\begin{vmatrix} (4-t) & 3 & 2 & 1 \\ 4 & (3-t) & 2 & 1 \\ 4 & 3 & (2-t) & 1 \\ 4 & 3 & 2 & (1-t) \end{vmatrix}$ ، فإن قيمة المحدد هي:

Ⓐ $\Delta= t^4 - 10t^3$ Ⓑ $\Delta= -t^4 + 10t^3$ Ⓒ $\Delta= -t^4 - 10t^3$ Ⓓ كل الإجابات السابقة

$$\Delta=\begin{vmatrix} (4-t) & 3 & 2 & 1 \\ 4 & (3-t) & 2 & 1 \\ 4 & 3 & (2-t) & 1 \\ 4 & 3 & 2 & (1-t) \end{vmatrix} C_1 \to \sum_{i=1}^{i=4} C_i \to \Delta=\begin{vmatrix} (10-t) & 3 & 2 & 1 \\ (10-t) & (3-t) & 2 & 1 \\ (10-t) & 3 & (2-t) & 1 \\ (10-t) & 3 & 2 & (1-t) \end{vmatrix}$$

$$\Delta= (10-t)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & (3-t) & 2 & 1 \\ 1 & 3 & (2-t) & 1 \\ 1 & 3 & 2 & (1-t) \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 - C_1 \end{matrix}$$

$$\Delta= (10-t)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t \end{vmatrix} = (10-t)(-t)(-t)(-t)$$

$$\Delta= (10-t)(-t^3) = -10t^3 + t^4 \quad \to \quad \boxed{\Delta= t^4 - 10t^3}$$

التمرين العاشر: اثبت أن $\underbrace{\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix}}_{L1} = \underbrace{4a^2b^2c^2}_{L2}$

$$L_1 = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ c & c & -c \end{vmatrix} = abc \times abc \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (abc)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$L_1 = (abc)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (abc)^2 \times (2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (abc)^2 \times (2)[(1) - (-1)] = 44a^2b^2c^2$$