المحاضرة ⑧ كثيرات الحدود

علاقات فيت :

علاقات فيت هي علاقات تربط بين معاملات كثير الحدود و أصفاره. ليكن $f(x)$ كثير حدود من الدرجة n حيث :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad , \quad a_0 \neq 0$$

و بحسب النظرية الأساسية في الجبر يمكن كتابة $f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{i=n}(x - x_i)$ حيث $\{x_i\,; i = 1, \cdots, n\}$ جذور $f(x)$.

علاقات فيت للمعادلة : $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ التي جذورها : x_1 , x_2 .

- $S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_0}$
- $S_2 = x_1 \cdot x_2 = +\frac{a_2}{a_0}$

علاقات فيت للمعادلة : $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ التي جذورها : x_1 , x_2 , x_3 .

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$
- $S_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = +\frac{a_2}{a_0}$
- $S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$

علاقات فيت للمعادلة : $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$ التي جذورها : x_1 , x_2 , x_3, x_4 .

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{a_1}{a_0}$
- $S_2 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = +\frac{a_2}{a_0}$
- $S_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{a_3}{a_0}$
- $S_4 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = +\frac{a_3}{a_0}$

مسألة دورة : بفرض كثير الحدود المعطل بالعلاقة : $P(x) = x^3 - 14x^2 + 56x - \lambda$ و المطلوب :

1) إذا علمت أن a, b, c هي جذور للمعادلة $P(x) = 0$ و أن هذه الجذور تحقق العلاقة: $(a+1)(b+1)(c+1) = 135$ ، عيّن قيمة الثابت $\lambda \in \mathbb{R}$

2) بفرض $\lambda = 64$ وأن الجذور a, b, c تشكل ثلاثة حدود متعاقبة في متتالية هندسية أساسها $(q = 2)$ ، أوجد الجذور a, b, c

الحل :

1) تعيّن قيمة الثابت $\lambda \in \mathbb{R}$: نبدأ بكتابة علاقات فييت ، $a_0 = 1 \, , a_1 = -14 \, , a_2 = 56 \, , a_3 = -\lambda$

- $a + b + c = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(-14)}{1} = 14 \to \boxed{a + b + c = 14} \cdots (1)$
- $ab + bc + ac = +\frac{a_2}{a_0} = +\frac{(56)}{1} = 56 \to \boxed{ab + bc + ac = 56} \cdots (2)$
- $a \cdot b \cdot c = -\frac{a_3}{a_0} = -\frac{(-\lambda)}{1} = \lambda \to \boxed{a \cdot b \cdot c = \lambda} \cdots (3)$
- $\underbrace{(a+1)(b+1)(c+1)}_{135} = \underbrace{(a \cdot b \cdot c)}_{\lambda} + \underbrace{(a+b+c)}_{14} + \underbrace{(ab+bc+ac)}_{56} + 1$
- $\boxed{\lambda = 64}$

2) إن الجذور a, b, c تشكل ثلاثة حدود متعاقبة في متتالية هندسية أساسها $(q = 2)$ ، يمكن أن نفرض ترتيب هذه الجذور على النحو التالي :

- $\begin{bmatrix} a & \to & \frac{b}{q} \\ b & \to & b \\ c & \to & q \cdot b \end{bmatrix}$
- $(3) \to (b/q)(b)(q \cdot b) = 64 \to b^3 = 64 \to \boxed{b = \sqrt[3]{64} = 4} \to$

$$\begin{bmatrix} a = \frac{4}{2} = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \times 4 = 8 \end{bmatrix}$$

دورة 2007 / فصـــــل 2 / : عـّـــين جــــــذور المعادلـــــة : $P(x) = x^3 - 7x + \lambda$ إذا علمـــــت أن أحــــــد جذورها يساوي ضعف جذر آخر من جذورها ، ثم عيّن قيمة الثابت λ .

الحل :

نعيد كتابة المعادلة بالشكل : $x^3 + 0x^2 - 7x + \lambda = 0$.

فتكون المعاملات العددية لها: $a_0 = 1 \, , a_1 = 0 \, , a_2 = -7 \, , a_3 = +\lambda$

نفرض جذور المعادلة : $a \, , 2a \, , c$ و بتالي تكون علاقات فيت هي :

- $a + 2a + c = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(0)}{1} = 0 \rightarrow \boxed{3a + c = 0} \cdots ①$
- $a(2a) + a(c) + 2a(c) = +\frac{a_2}{a_0} = +\frac{(-7)}{1} = -7 \rightarrow \boxed{2a^2 + 3ac = -7} \cdots ②$
- $a \cdot 2a \cdot c = -\frac{a_3}{a_0} = -\frac{(+\lambda)}{1} = -\lambda \rightarrow \boxed{2a^2 \cdot c = -\lambda} \cdots ③$
- $③ \rightarrow \boxed{c = -3a} \cdots ④$
- $④ \rightarrow ② : \; 2a^2 + 3a(-3a) = -7 \; \rightarrow \; a^2 = 1$
- $\mathrm{a}^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} a = +1 & \overset{④}{\rightarrow} & c = -3 & \overset{③}{\rightarrow} & \lambda = +6 \\ a = -1 & \overset{④}{\rightarrow} & c = +3 & \overset{③}{\rightarrow} & \lambda = -6 \end{cases}$

الطرائق التقريبية في حل المعادلات الجبرية و المعادلات المتسامية

أولاً: تمهيد :

ليكن $f(x)$ تابعاً عددياً مستمراً في مجال ما I . نسمي كل معادلة من الشكل $f(x) = 0$ معادلة متسامية و نميزها عن المعادلة $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ التي نسميها معادلة كثير حدود أو معادلة جبرية .

ومن الواضح أن المعادلات الجبرية هي حالات خاصة من المعادلات المتسامية . و من أجل الاختصار و عندما لا يكون هناك ضرورة لإظهار نوع المعادلة (جبرية أو متسامية) فإننا نقتصر على كلمة "معادلة" حيث لا يحدث التباس .

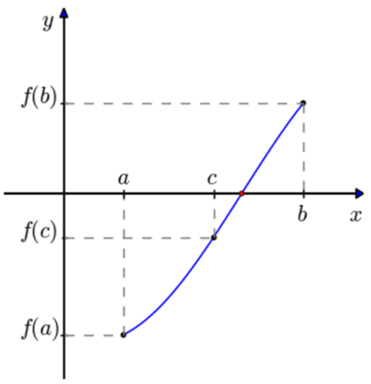
إن مسألة إيجاد جذور معادلة متسامية أمر في غاية الأهمية من جهة ، و في غاية الصعوبة من جهة ثانية . و لا توجد للأسف قوانين جاهزة لحل المعادلات المتسامية كما في حالة المعادلة التربيعية أو التكعيبية أو الرباعية ، أكثر من ذلك فقد برهن العالمان غالوا و آبل أنه لا يوجد قانون يعطي حلول المعادلة الجبرية بدلالة الأمثال إذا كانت درجة كثير الحدود $n \geq 0$. كيف سيكون الحال إذاً في حالة المعادلات المتسامية ، بالطبع سيكون أسوء ، أي لا يوجد قانون للحل. من هنا نشأت فكرة إيجاد حلول تقريبية للمعادلة $f(x) = 0$.

ثانياً: الطرائق التقريبية :

في البداية لابد من الإشارة إلى أن جميع الطرائق التقريبية تفترض سلفاً معرفتنا لمجال $[a, b]$ يحوي جذراً واحداً فقط للمعادلة $f(x) = 0$ المراد حلها ، و يكون هدف هذه الطرائق التقريبية هو الاقتراب من الجذر المضبوط بالقدر الذي نريد.

سنتعرف في هذا البحث على طريقتين تقريبيتين في إيجاد جذور المعادلات (جبرية أو متسامية) و نبدأ الآن بعرض كل منها.

طريقة التقسيم النصفي :



لتكن لدينا المعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x)$ تابع مستمر في المجال $[a, b]$ و يحقق الشرط التالي $f(a)f(b) < 0$ ، لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$ الواقع في المجال $[a, b]$ ، نقسم هذا المجال إلى نصفين ، فنحصل على القيمة $c = \frac{a+b}{2}$ فإذا كانت $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ كان $c = \frac{a+b}{2}$ هو جذر للمعادلة $f(x) = 0$

أما إذا كانت $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ ، عندئذٍ نختار من نصفي المجالين الجديدين $[c,b]$ و $[a,c]$ ذلك المجال الذي تكون للتابع $f(x)$ على طرفيه إشارتان مختلفتان . نكرر هذا العمل مرات متتالية حتى الوصول إلى الجذر الذي نبحث عنه بالدقة المطلوبة.

ملاحظة : يمكننا حساب عدد الخطوات اللازمة للحصول على جذر للمعادلة $f(x) = 0$ بحيث لا يتجاوز الخطأ في حساب الجذر القيمة ε و ذلك باستخدام المتراجحة التالية : $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$ ، حيث n هو عدد الخطوات اللازمة .

مثال عددي : باستخدام طريقة التقسيم النصفي

أوجد جذراً واقعاً في المجال $[0,1]$ للمعادلة $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$ مكتفياً بالجذر الناتج عن التقريب الخامس ، ثم حدد عدد الخطوات اللازم للحصول على جذر لا يتعدى الخطأ فيه $\varepsilon = 10^{-2}$.

(قرب النتائج التي تحصل عليها لدقة أربعة أرقام عشرية).

الحل :

x_n	a	إشارة $f(a)$	$c = \frac{a+b}{2}$	إشارة $f(c)$	b	إشارة $f(b)$
x_0	0.0000	-	0.5000	-	1.0000	+
x_1	0.5000	-	0.7500	-	1.0000	+
x_2	0.7500	-	0.8750	+	1.0000	+
x_3	0.7500	-	0.8125	-	0.8750	+
x_4	0.8125	-	0.8438	-	0.8750	+
x_5	0.8434	-	0.8594	-	0.8750	+

إن الجذر الناتج عن التقريب الخامس هو $x_5 = 0.8594$

إن عدد الخطوات اللازمة للحصول على جذر للمعادلة السابقة لا يتجاوز الخطأ فيه القيمة ε يتم حسابه باستخدام المتراجحة التالية : $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$ ، حيث n هو عدد الخطوات اللازمة .

- $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \rightarrow \frac{1-0}{2^{n+1}} \leq 10^{-2} \rightarrow \frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2}$
- $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-2} \rightarrow \frac{1}{10^{-2}} \leq 2^{n+1} \rightarrow 100 \leq 2^{n+1}$
- $ln(100) \leq ln(2^{n+1})$

- $ln(100) \leq (n+1)ln(2)$
- $\frac{ln(100)}{ln(2)} \leq n+1$
- $n \geq \frac{ln(100)}{ln(2)} - 1 \rightarrow n \geq 6.64 - 1 = 5.64 \rightarrow \boxed{n = 6}$