المصفوفات MATRICES

أولاً : تعاريف أساسية :

❶ تعريف المصفوفة (Matrix) : المصفوفة A من المرتبة أو السعة $(n \times m)$ هي مجموعة العناصر العددية المرتبة ضمن جدول مستطيل ذي n سطراً و m عموداً و تكتب بالشكل التالي :

$$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

نسمي المقادير a_{ij} عناصر المصفوفة $A_{n\times m}$ حيث يرمز الدليل الأيسر (i) إلى رقم السطر الذي يوجد فيه العنصر، في حين يرمز الدليل الأيمن (j) إلى رقم العمود الذي يوجد فيه العنصر.

❷ تساوي مصفوفتين (Equality of matrices) : تتساوى مصفوفتان $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ و نكتب $A = B$ إذا كان لهما المرتبة (السعة) ذاتها و تساوت جميع العناصر المتقابلة .

❸ منقول مصفوفة A^T (Transpose of a matrix) : هي تلك المصفوفة الناتجة عن المصفوفة A بجعل أسطرها أعمدة و أعمدتها أسطراً شرط المحافظة على الترتيب.

❹ مرافق مصفوفة $\bar{A}$ (Conjugate of a matrix) : بفرض المصفوفة العقدية $A = (a_{ij})$ ، فمرافق المصفوفة A هي تلك المصفوفة التي تحقق العلاقة $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$ حيث $\overline{a_{ij}}$ هو مرافق العدد العقدي a_{ij}

❺ المصفوفة المربعة (Square matrix) : هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الأسطر و عدد الأعمدة أي $m = n$ و يسمى العدد n عندها مرتبة المصفوفة و نرمز لها بالرمز $A_n = (a_{ij})$

❻ المصفوفة المستطيلة (Rectangular matrix) : هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الأسطر لا يساوي عدد الأعمدة أي $m \neq n$ و يسمى العدد n البعد الأفقي للمصفوفة و العدد m البعد الشاقولي للمصفوفة

❼ القطر الرئيسي للمصفوفة المربعة (Main diagonal of a matrix) : نسمي عناصر المصفوفة المربعة الواقعة على الخط الواصل بين العنصرين a_{11} و a_{nn} القطر الرئيسي.

❽ القطر الثانوي للمصفوفة المربعة (secondary diagonal of a matrix): نسمي عناصر المصفوفة المربعة الواقعة على الخط الواصل بين العنصرين a_{1n} و a_{n1} القطر الثانوي.

❾ محدد مصفوفة مربعة (Determinant of a matrix): يمكن إلحاق أي مصفوفة مربعة بمحدد من المرتبة ذاتها، عناصره هي عناصر المصفوفة نفسها و بالترتيب ذاته و نرمز له $detA$ أو $|A|$.

- تكون المصفوفة A مصفوفة شاذة (غير قلوبة = ليس لها معكوس) عندما $detA = 0$.
- تكون المصفوفة A قلوبة (غير شاذة = لها معكوس) عندما $detA \neq 0$.

ثانياً : أنواع المصفوفات:

المصفوفة	السعة	الشكل العام
المصفوفة السطرية *(Row Matrix)* : هي المصفوفة التي تحوي سطراً واحداً و n عموداً	$1 \times n$	$A_{1n} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$
المصفوفة العمودية *(Column Matrix)* : هي المصفوفة التي تحوي عموداً واحداً و n سطراً	$n \times 1$	$A_{n1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
المصفوفة وحيدة العنصر: هي المصفوفة التي تحوي عنصراً واحداً	1×1	$A_{11} = [a_{11}]$
المصفوفة الصفرية *(Zero Matrix)* : هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار. (مربعة أو مستطيلة)	$m \times n$	$A_{n\times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
المصفوفة الواحدية *(Unit Matrix)* : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي تساوي الواحد.	$n \times n$	$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$
المصفوفة السلمية *(Scalar Matrix)* : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي تساوي عدد ثابت λ.	$n \times n$	$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$
المصفوفة القطرية *(Diagonal Matrix)* : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار عدا عناصر القطر الرئيسي ليس عدداً ثابتاً بالضرورة.	$n \times n$	$D_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
المصفوفة المثلثية *(Triangular Matrix)* : هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق أو تحت القطر الرئيسي أصفار.	$n \times n$	$L_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, U_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$
المصفوفة المتناظرة *(Symmetric Matrix)* : هي مصفوفة مربعة تحقق عناصرها العلاقة $a_{ij} = a_{ji}$	$n \times n$	$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a & d & \cdots & c \\ d & b & \cdots & f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & f & \cdots & z \end{bmatrix}$
المصفوفة المتناظرة تخالفياً *(Skew-Symmetric Matrix)* : هي مصفوفة مربعة تحقق عناصرها العلاقة $a_{ij} = -a_{ji}$	$n \times n$	$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & -d & \cdots & -c \\ d & 0 & \cdots & -f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & f & \cdots & 0 \end{bmatrix}$
المصفوفة الهرميتية *(Hermitian Matrix)* : هي مصفوفة عقدية مربعة تحقق الشرط $(\bar{A})^T = A$	$n \times n$	المصفوفة الهرميتية التخالفية *(Skew-Hermitian Matrix)* هي مصفوفة عقدية مربعة تحقق الشرط $(\bar{A})^T = -A$

ثالثاً : العمليات على المصفوفات:

❶ جمع (طرح) مصفوفتين أو أكثر : لجمع (لطرح) مصفوفتين $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ لهما المرتبة (السعة) ذاتها نجمع (نطرح) العناصر المتقابلة.

خواص جمع المصفوفات :

1) $A+B=B+A$
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$
3) $A+0=0+A=A$
4) لكل مصفوفة $A=(a_{ij})$ نظير بالنسبة لعملية الجمع هو المصفوفة $-A=(-a_{ij})$ و $A+(-A)=0$
5) $det(A+B)\neq det(A)+det(B)$

❷ ضرب مصفوفة بعدد : لضرب مصفوفة $A=(a_{ij})$ بعدد α نضرب جميع عناصر المصفوفة بهذا العدد.

خواص ضرب مصفوفة بعدد: إذا كان α,β أعداد حقيقية ، و A,B مصفوفتين لهما نفس المرتبة فإن :

1) $\alpha A+\beta A=(\alpha+\beta)A$
2) $\alpha A+\alpha B=\alpha(A+B)$
3) $\alpha.(\beta A)=(\alpha.\beta)A$
4) $det(\alpha A)=\alpha^n det(A)$ حيث n مرتبة المصفوفة المربعة A

❸ جداء المصفوفات : لتكن المصفوفتان $A=(a_{ij})_{np}$ و $B=(b_{ij})_{pm}$. إن جداء $A.B$ هو مصفوفة جديدة هي $C=(c_{ij})_{nm}$ حيث c_{ij} هو حاصل مجموع جداءات عناصر السطر (i) في المصفوفة A بعناصر العمود (j) في المصفوفة B

خواص جداء المصفوفات :

1) $(A+B).C=A.C+B.C$ و $C.(A+B)=C.A+C.B$
2) $(A.B).C=A.(B.C)$
3) $A.I=I.A=A$ حيث يقصد بـ I :المصفوفة الواحدية
4) $A.0=0.A=0$ حيث يقصد بـ 0 :المصفوفة الصفرية
5) $det(AB)=det(A)\times det(B)$ حيث $A_{n\times n}$ و $B_{n\times n}$

ملاحظات مهمة :

1) إن شرط جداء مصفوفتين هو تساوي دليليهما القريبين ، و تكون سعة المصفوفة الناتجة جداء دليليهما البعيدين.

$$A_{n\times\boxed{p}}\ .\ B_{\boxed{p}\times m}=C_{n\times m}$$

2) إذا كان الجداء $A.B$ معرفاً فليس من الضروري أن يكون الجداء $B.A$ معرفاً أيضاً.

3) جداء المصفوفات ليس تبديلياً بالضرورة أي $A.B = B.A$

4) إذا كان $A.B = A.C$ فليس بالضرورة أن يكون $B = C$

5) إذا كان $A.B = 0$ فليس بالضرورة أن يكون $A = 0 \; Or \; B = 0$ يمكن أن يكون $A \neq 0$ و $B \neq 0$

خواص منقول مصفوفة :

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) $(A.B)^T = B^T.A^T$

4) $(\lambda A)^T = \lambda.A^T$

5) $det(A^T) = detA$

رابعاً : المصفوفة الجامدة (لا متناهية) : نقول إن المصفوفة A إنها مصفوفة لا متناهية أو جامدة عندما يتحقق $A = A^2$

تمارين متنوعة:

التمرين الأول : لتكون المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و المطلوب حساب :

❶ $A.B$ ❷ $B.A$ ❸ A^T ❹ $B.A^T$

❶ $A_{2\times3}.B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8+3 & 0-6+6 & -1+2+0 \\ -4+0+4 & 0+0+8 & 2+0+0 \end{bmatrix}$

$$A_{2\times3}.B_{3\times3} = \begin{bmatrix} 13 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

❷

$B_{3\times\boxed{3}}.A_{\boxed{2}\times3}$ $\quad 2 \neq 3 \rightarrow$ العملية غير ممكنة

❸ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

❹ $B.A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-3 & -4+0+4 \\ 4-6+3 & -8+0+4 \\ 1+4+0 & -2+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

التمرين الثاني: لتكن المصفوفات $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} b & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & c \\ d & 4 \end{bmatrix}$ ، و بفرض a و b و c و d أعداد حقيقية . و المطلوب عين قيمة كل من a و b و c و d إذا علمت أن $A + B = C$

- $A + B = C \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ d & 4 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} -2+b & 3-1 \\ 1+2 & a-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ d & 4 \end{bmatrix} \to \begin{cases} -2+b=1 \to b=3 \\ 1+2=d \to d=3 \\ 3-1=c \to c=2 \\ a-4=4 \to a=8 \end{cases}$

التمرين الثالث: عيّن العددين a, b لتكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ حلاً للمعادلة المصفوفية $A^2 + aA + bI = 0$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

نعوض A^2, A في المعادلة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5+2a+b & 4+a+0 \\ 4+a+0 & 5+2a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{Bmatrix} 5+2a+b=0 \\ 4+a+0=0 \end{Bmatrix} \to \begin{matrix} a=-4 \\ b=+3 \end{matrix}$$

التمرين الرابع: لتكون المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ و المطلوب : $B.A$, $A.B$ ماذا تلاحظ؟

$$A.B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -54 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن :

1) $A.B \neq B.A$ و ضرب المصفوفات عملية غير تبديلية.

2) رغم أن $A \neq 0$ و $B \neq 0$ إلا أن $B.A = 0$ أي ليس من الضروري أن تكون إحدى المصفوفتين أو كلتاهما صفرية حتى يكون حاصل الضرب لهما مساوياً المصفوفة الصفرية.

التمرين الخامس: لتكون المصفوفات $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ و المطلوب حساب : $A.B$, $A.C$ ماذا تلاحظ؟

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A.C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن : $A.B = A.C$ رغم أن $B \neq C$

التمرين السادس: لتكون $B = \begin{bmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}$ و المطلوب حساب :

$A.B$, $B.A$ ماذا تدعى هذه الحالة؟

$$A.B = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta & -cos\alpha sin\beta - sin\alpha cos\beta \\ sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta & -sin\alpha sin\beta + cos\alpha cos\beta \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta & -(cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta) \\ sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta & cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta) \\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

و بنفس الأسلوب نجد :

$$B.A = \begin{bmatrix} cos(\alpha+\beta) & -sin(\alpha+\beta) \\ sin(\alpha+\beta) & cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

ندعو المصفوفتان A, B في هذه الحالة بالمصفوفتين المتبادلتين.

التمرين السابع : أثبت أن المصفوفة A هرميتية تخالفية $A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$

- $A = \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix}$
- $\bar{A} = \begin{bmatrix} -3i & 3-4i & 4+5i \\ -3-4i & +4i & 5-6i \\ -4+5i & -5-6i & 0 \end{bmatrix}$
- $(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} -3i & -3-4i & -4+5i \\ 3-4i & +4i & -5-6i \\ 4+5i & 5-6i & 0 \end{bmatrix}$
- $(\bar{A})^T = - \begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix} = -A$
- $(\bar{A})^T = -A \rightarrow$ مصفوفة هرميتية تخالفية

معكوس مصفوفة (INVERSE OF MATRIX) :

أولاً : إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإننا ندعو المصفوفة B التي تحقق العلاقة : $A \cdot B = B \cdot A = I$ مصفوفة معاكسة للمصفوفة A و نرمزلها بالرمز A^{-1} .

ثانياً : الخطوات العامة لإيجاد مقلوب مصفوفة A مربعة غير شاذة:

1) نحسب محدد المصفوفة A (يجب أن يكون $detA = |A| \neq 0$).
2) نوجد مصفوفة المتممات الجبرية (A_{ij}).
3) نوجد المصفوفة المساعدة $adi(A) = (A_{ij})^T$
4) نطبق القانون : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adi(A)$

التمرين الأول : لتكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 0 \\ 8 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1)\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = (7 \times 13) - (9 \times 8) = 19$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(9+4) = +13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(6+2) = -8$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (+1)(12-9) = +3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1+8) = -9$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)(3+7) = +7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(6-1) = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (+1)(-2+36) = +34$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-6+24) = -18$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = (+1)(27-6) = +21$$

$$(A_{ij})=\begin{bmatrix}13 & -8 & 3\\ -9 & 7 & -5\\ 34 & -18 & 21\end{bmatrix}\ \rightarrow adi(A)=(A_{ij})^T=\begin{bmatrix}13 & -9 & 34\\ -8 & 7 & -18\\ 3 & -5 & 21\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adi(A)=\frac{1}{19}\begin{bmatrix}13 & -9 & 34\\ -8 & 7 & -18\\ 3 & -5 & 21\end{bmatrix}$$

التمرين الثاني : لتكون المصفوفة $A=\begin{bmatrix}7 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ -3 & 4 & -2\end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} .

$$|A|=\begin{vmatrix}7 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7 & 2 & 1\\ 7 & 5 & 0\\ 11 & 8 & 0\end{vmatrix}=(+1)\begin{vmatrix}7 & 5\\ 11 & 8\end{vmatrix}=(7\times 8)-(5\times 11)=1$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(+1)(-6+4)=-2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=(-1)(0-3)=+3$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 3\\ -3 & 4\end{vmatrix}=(+1)(0+9)=+9$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix}=(-1)(-4-4)=+8$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}7 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=(+1)(-14+3)=-11$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}7 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=(-1)(28+6)=-34$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=(+1)(-2-3)=-5$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)(-7-0)=+7$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}7 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=(+1)(21-0)=+21$$

$$(A_{ij})=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 9\\ 8 & -11 & -34\\ -5 & 7 & 21\end{bmatrix}\ \rightarrow adi(A)=(A_{ij})^T=\begin{bmatrix}-2 & 8 & -5\\ 3 & -11 & 7\\ 9 & -34 & 21\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adi(A)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}-2 & 8 & -5\\ 3 & -11 & 7\\ 9 & -34 & 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 8 & -5\\ 3 & -11 & 7\\ 9 & -34 & 21\end{bmatrix}$$

التمرين الثالث : ناقش بحسب قيم الوسيط λ وجود معكوس للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (+3)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 3(\lambda + 4)$$

- يكون للمصفوفة معكوس عندما : $detA = 3(\lambda + 4) \neq 0 \rightarrow \lambda \neq -4$ أي : $\lambda \in \mathbb{R}/\{-4\}$
- لا يكون للمصفوفة معكوس عندما : $detA = 3(\lambda + 4) = 0 \rightarrow \lambda = -4$

ثالثاً : خواص معكوس مصفوفة

1) $I^{-1} = I$
2) $(A^{-1})^{-1} = A$
3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
5) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
6) $(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdots \cdot A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdot {A_3}^{-1} \cdot {A_2}^{-1} \cdots \cdot {A_1}^{-1}$
7) $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$

حالات خاصة :

❶ **معكوس المصفوفة من المرتبة الثانية:** $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ يعطى بالقانون : $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ أي

بعبارة مختصرة : نبدل بين موضعي عنصري القطر الرئيس ، نغير إشارة عنصري القطر الثانوي ، نقسم على قيمة المحدد غير المعدوم.

مثال :احسب معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

الحل : معكوس هذه المصفوفة هو $A^{-1}=\frac{1}{(3\times6)-(2\times5)}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}6 & -2\\ -5 & 3\end{bmatrix}$

❷ **معكوس المصفوفة القطرية من المرتبة (n) :** $A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$

نحصل على معكوس المصفوفة القطرية بقلب عناصر القطر الرئيسي فقط . أي $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_{11}} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}}\end{bmatrix}$

❸ **معكوس المصفوفة المثلثية من المرتبة (3) حصراً :**

1) مثلثية عليا : $A=\begin{bmatrix}a & b & d\\ 0 & c & e\\ 0 & 0 & f\end{bmatrix}$ **هو** $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} & \frac{\begin{vmatrix}b & d\\ c & e\end{vmatrix}}{acf}\\ 0 & \frac{1}{c} & \frac{-e}{cf}\\ 0 & 0 & \frac{1}{f}\end{bmatrix}$

2) مثلثية سفلى : $A=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ b & c & 0\\ d & e & f\end{bmatrix}$ **هو** $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ \frac{-b}{ac} & \frac{1}{c} & 0\\ \frac{\begin{vmatrix}b & d\\ c & e\end{vmatrix}}{acf} & \frac{-e}{cf} & \frac{1}{f}\end{bmatrix}$

التمرين لتكن المصفوفتان : $A_{2\times2}$ و $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, فإذا علمت أن $(A^T-3I)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ فعندئذٍ المصفوفة A هي :

Ⓐ $A=\begin{bmatrix}6 & -5\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ Ⓑ $A=\begin{bmatrix}-6 & 5\\ 1 & -5\end{bmatrix}$ Ⓒ $A=\begin{bmatrix}-5 & 5\\ 1 & -6\end{bmatrix}$ Ⓓ كل الإجابات السابقة خاطئة

- $(A^T-3I)^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}\to A^T-3I=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}^{-1}\to A^T-3I=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$
- $A^T=3I+\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}$
- $A=\begin{bmatrix}6 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}6 & -5\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

التمرين لتكن المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, اوجد A^n حيث $n \in \mathbb{N}$.

- $\left.\begin{array}{l} A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^6 = A^5 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

التمرين لتكن المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, اوجد A^n حيث $n \in \mathbb{N}$.

- $\left.\begin{array}{l} A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\ A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \\ A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 48 \\ 0 & -32 \end{bmatrix} \\ A^6 = A^5 \times A = \begin{bmatrix} 32 & 48 \\ 0 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow$

- $\boxed{\begin{cases} A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} & n \text{ زوجي} \\ A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 3 \times 2^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \times 2^n \end{bmatrix} & n \text{ فردي} \end{cases}}$

التمرين لتكن المصفوفة : A, B مصفوفتان حيث : $A_{3\times3}$ و $det(A) = -3$ ، و $B_{3\times3}$ و $det(B) = -2$. و المطلوب :

❶ $det(2A^3 \times B^{-2})$ ❷ $det((B^T)^2 \times A^{-1})$

- $det(2A^3 \times B^{-2}) = det(2A^3) \times det(B^{-2}) = 2^3 det(A^3) \times det((B^{-1})^2)$
- $det(2A^3 \times B^{-2}) = 8 \times \left(det(A)\right)^3 \times \left(\frac{1}{det(B)}\right)^2 = 8 \times (-3)^3 \times \left(\frac{1}{-2}\right)^2 = -54$
- $det((B^T)^2 \times A^{-1}) = det((B^T)^2) \times det(A^{-1}) = \left(det(B^T)\right)^2 \times \frac{1}{det(A)}$
- $det((B^T)^2 \times A^{-1}) = \left(det(B)\right)^2 \times \frac{1}{det(A)} = (-2)^2 \times \frac{1}{-3} = -\frac{4}{3}$

رتبة مصفوفة Rank of matrix

أولاً : تعريف رتبة مصفوفة :

إن رتبة المصفوفة A من المرتبة $m \times n$ هي عدد طبيعي r حيث $r \leq min(m,n)$ و نرمزلها بـ $Rank(A) = r$ وهي مرتبة أكبر صغير لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

مثال : عين رتبة المصفوفات التالية :

❶ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- $det(A) = 3 \neq 0 \quad \rightarrow Rank(A) = 3$

❷ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- $det(B) = 0$

- نبحث عن محدد أصغر لا يساوي الصفر مثل $det(B_{11}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0$ و بالتالي فإن رتبة المصفوفة B هي $Rank(B) = 2$

❸ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

- $det(C) = 0$

- نبحث عن محدد من المرتبة الثانية لا يساوي الصفر :

$det(C_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{31}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$
$det(C_{12}) = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$
$det(C_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$	$det(C_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

- إن جميع المحددات من المرتبة الثانية تساوي الصفر ، لذا نأخذ المحددات من المرتبة الأولى $|1| = 1 \neq 0$ إذن رتبة المصفوفة C هي $Rank(C) = 1$ (نتوقف عند أول محدد مغاير للصفر).

ثانياً : التحويلات الأولية على المصفوفات :

1) تبادل سطرين أو عمودين
2) ضرب عناصر أحد الأسطر (أو أحد الأعمدة) بعدد حقيقي $\alpha \neq 0$.
3) إضافة عناصر سطر (أو عمود) بعد ضربه بعدد حقيقي $\alpha \neq 0$ إلى عناصر سطر (أو عمود) آخر

ثالثاً : تعريف المصفوفتان المتكافئتان :

نقول إن المصفوفتين A, B متكافئتان إذا كانت إحداهما ناتجة عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية و نكتب $A \sim B$

رابعاً :

- إن تطبيق أي تحويل أولي على أعمدة (أسطر) مصفوفة لا يغير من رتبتها .
- إن رتبة مصفوفة هي عدد الأسطر التي ليست جميع عناصرها أصفار بعد تحويل المصفوفة إلى الشكل المدرج .

اوجد رتبة المصفوفة : $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (تم إيجاد رتبة هذه المصفوفة حسب التعريف في فقرة سابقة)

الحل :

- $$B \underset{R_1 \leftrightarrows R_3}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2 = R_2 + 3R_1 \\ R_3 = R_3 + 2R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \underset{R_3 = R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خامساً : إيجاد معكوس مصفوفة بالطريقة الخلوية :

لتكن A مصفوفة مربعة من المرتبة n ، و المطلوب إيجاد معكوسها ، نشكل المصفوفة الخلوية المستطيلة $(A \vdots I)$ حيث I المصفوفة الواحدية من المرتبة n . إذا أنجزنا سلسلة منتهية من التحويلات السطرية البسيطة على $(A \vdots I)$ و حصلنا على المصفوفة $(I \vdots B)$ فإن B هي المصفوفة المعاكسة لـ A و بمعنى آخر $(A \vdots I) \sim (I \vdots B) \rightarrow B = A^{-1}$

ملاحظات :

1) إن تطبيق الطريقة الخلوية لإيجاد معكوس مصفوفة يتم فقط بإجراء العمليات على الأسطر دون الأعمدة.
2) إذا توصلنا من المصفوفة A وفق سلسلة منتهية من التحويلات الأولية إلى مصفوفة تحوي على الأقل سطراً صفرياً فإننا نتوقف عند هذا الحد من التحويلات و نستنتج أن المصفوفة A شاذة و ليس لها معكوس.

التمرين الأول : لتكون المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\5&5&1\end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} بطريقة الخلوية .

- $(A \vdots I)=\begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&0\\0&2&3&\vdots&0&1&0\\5&5&1&\vdots&0&0&1\end{bmatrix} \overset{\sim}{R_3=R_3-5R_1} \begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&0\\0&2&3&\vdots&0&1&0\\0&0&-4&\vdots&-5&0&1\end{bmatrix}$

- $(A \vdots I)\sim \begin{matrix}R_2=\frac{1}{2}R_2\\ \\ R_3=-\frac{1}{4}R_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1&1&1&\vdots&1&0&0\\0&1&3/2&\vdots&0&1/2&0\\0&0&1&\vdots&5/4&0&-1/4\end{bmatrix}$

- $(A \vdots I)\sim \begin{matrix}R_1=R_1-R_3\\ \\ R_2=R_2-\frac{3}{2}R_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1&1&0&\vdots&-1/4&0&1/4\\0&1&0&\vdots&-15/8&1/2&3/8\\0&0&1&\vdots&5/4&0&-1/4\end{bmatrix}$

- $(A \vdots I)\sim R_1=R_1-R_2 \begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&13/8&-1/2&-1/8\\0&1&0&\vdots&-15/8&1/2&3/8\\0&0&1&\vdots&5/4&0&-1/4\end{bmatrix}=(I \vdots A^{-1}) \rightarrow$

- $A^{-1}=\begin{bmatrix}13/8&-1/2&-1/8\\-15/8&1/2&3/8\\5/4&0&-1/4\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}13&-4&-1\\-15&4&3\\10&0&-2\end{bmatrix}$

التمرين الثاني : لتكون المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\1&-2&1\\5&-2&-3\end{bmatrix}$ و المطلوب إيجاد A^{-1} بطريقة الخلوية إن وجدت .

- $(A \vdots I)=\begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&1&0&0\\1&-2&1&\vdots&0&1&0\\5&-2&-3&\vdots&0&0&1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2=R_2-R_1\\ \sim \\ R_3=R_3-5R_1\end{matrix} \begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&1&0&0\\0&-4&4&\vdots&-1&1&0\\0&-12&-12&\vdots&-5&0&1\end{bmatrix}$

- $(A \vdots I)\sim R_3=R_3-3R_2 \begin{bmatrix}1&2&-3&\vdots&1&0&0\\0&-4&4&\vdots&-1&1&0\\0&0&0&\vdots&-2&-3&1\end{bmatrix}$

نلاحظ ظهور السطر الصفري و بالتالي المصفوفة A شاذة و ليس لها معكوس.