حل جملة المعادلات الخطية

أولاً : الشكل العام لجملة n معادلة خطية بـ n مجهول :

إن الشكل العام لجملة n معادلة خطية بـ n مجهول هو :

$$- \quad (\star) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ a_{41}x_1 & + & a_{42}x_2 & + & \cdots & + & a_{4n}x_n & = & b_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- نسمي العناصر a_{ij} المعاملات أو الأمثال
- نسمي العناصر b_i الثوابت
- نسمي العناصر x_i المجاهيل

و نميز حالتين :

- إذا كانت جميع العناصر b_i معدومة سُميت الجملة متجانسة
- إذا كان أحد عناصر b_i على الأقل غير معدوم سُميت الجملة غير متجانسة
- نسمي المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات أو الأمثال
- نسمي المصفوفة $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت
- نسمي المصفوفة $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ مصفوفة المجاهيل

ثانياً : تعاريف :

1) المصفوفة المدرجة : هي مصفوفة يتزايد عدد الأصفار السابقة لأول عنصر غير صفري في كل سطر فيها من سطر لآخر، و يسمى العنصر الأول غير الصفري في كل سطر عنصراً مميزاً.

مثال : $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 5 & 5 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مدرجة عدد عناصرها المميزة 3 وهي 1 و 2 و 7 .

2) المصفوفة المدرجة المختزلة : هي مصفوفة مدرجة عناصرها المميزة تساوي الواحد و هي الوحيدة في أعمدتها مغايرة للصفر ، أي أن العنصر المميز هو العنصر الوحيد في عموده ليس صفراً ، إذ إن بقية عناصر عموده جميعها أصفار.

مثال : $A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة مدرجة مختزلة.

ملاحظة مهمة جداً : إن رتبة المصفوفة المدرجة تساوي عدد عناصرها المميزة.

❶ حل الجملة باستخدام معكوس (مقلوب) المصفوفة :

تُكتب جملة المعادلات الخطية في هذه الحالة بالشكل $AX = b$ نضرب طرفي العلاقة بمعكوس المصفوفة A فنجد :

$$\boxed{AX = b} \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}b \Rightarrow (I)X = A^{-1}b \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}b}$$

مثال (1) : حل جملة المعادلات :

$$\begin{cases} 3x + y - 4z = -7 \\ 6x + 9y - 2z = 18 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = A^{-1}b} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 13 & -9 & 34 \\ -8 & 7 & -18 \\ 3 & -5 & 21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ 18 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 19 \\ 38 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{bmatrix}$$

مثال (2) : حل جملة المعادلات :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1z = 33 \\ 1x + 1y + 2z = 32 \\ 3x + 2y + 2z = 43 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 43 \end{bmatrix} \quad detA = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -4 & +5 \\ +4 & +1 & +1 \\ -1 & +5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}b = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & -4 & +5 \\ +4 & +1 & +1 \\ -1 & +5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 33 \\ 32 \\ 43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x = 3 \\ y = 5 \\ z = 12 \end{bmatrix}$$

مثال (3) :

لتكن المصفوفات التالية : $A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

① ناقش حسب قيم λ وجود معكوس للمصفوفة A

② من أجل $(\lambda = 2)$ اوجد: 1] $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot b$

2] A^{-1} ، B^T

3] حل جملة المعادلات الخطية $AX = b$ بالاستفادة من مقلوب المصفوفة A

الحل :

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda)$$

$$|A| = 0 \rightarrow (\lambda = 0) \; or \; (\lambda = 1) \; or \; (\lambda = -1)$$

- يكون للمصفوفة معكوس عندما : $|A| \neq 0$ أي عندما : $\lambda \in \mathbb{R}/\{-1, 0, +1\}$
- لا يكون للمصفوفة معكوس عندما : $\lambda \in \mathbb{R}/\{-1, 0, +1\}$

من أجل $(\lambda = 2)$ تكون المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

1] $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot b$

$A_{3\times3} \cdot B_{2\times3} \rightarrow$ غير ممكنة

$$B_{2\times3} \cdot A_{3\times3} = C_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 21 \\ 2 & -1 & 21 \end{bmatrix}$$

$$B_{2\times3} \cdot b_{3\times1} = D_{2\times1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 22 \end{bmatrix}$$

A^{-1} ، B^{T} [2

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} & \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & \frac{-e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3] حل جملة المعادلات الخطي $AX = b$ة بالاستفادة من مقلوب المصفوفة A

$$AX = b \to A^{-1}AX = A^{-1}b \to IX = A^{-1}b \to \boxed{X = A^{-1}b}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{11}{6} \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} + 3 - \frac{11}{2} \\ 0 - 3 + 4 \\ 0 + 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{bmatrix}$$

❷ حل الجملة باستخدام طريقة كرامر (بالاستفادة من المحددات) :

خطوات الحل بطريقة كرامر

① نحسب محدد مصفوفة المعاملات Δ ، حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

② نعرف المحدد Δ_i الذي نحصل عليه باستبدال العمود ذي الرتبة i من محدد المصفوفة A بعمود الثوابت b

③ نميز الحالات التالية :

❶ $\Delta \neq 0$ عندها لجملة المعادلات الخطية حل وحيد هو $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ حيث $i = 1, 2, \cdots, n$

❷ $\Delta = 0$ نميز حالتين :

- جميع المحددات Δ_i حيث $i = 1, 2, \cdots, n$ معدومة أي $(\Delta_i = 0)$ عندها لجملة المعادلات عدد غير منته من الحلول ، أو مستحيلة الحل.
- أحد المحددات Δ_i على الأقل غير معدوم أي $(\Delta_i \neq 0)$ عندها جملة المعادلات مستحيلة الحل.

مثال : حل جملة المعادلات بطريقة كرامر $\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 4z & = & -7 \\ 6x & + & 9y & - & 2z & = & 18 \\ x & + & 2y & + & z & = & 8 \end{array}\right\}$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19 \neq 0$

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -4 \\ 18 & 9 & -2 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 19 \to \boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{19}{19} = 1}$

- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -4 \\ 6 & 18 & -2 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 38 \to \boxed{y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{19} = 2}$

- $\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 6 & 9 & 18 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 57 \to \boxed{z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{57}{19} = 3}$

مثال : ابحث في حلول جملة المعادلات بطريقة كرامر: $\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 3y & - & 5z & = & 1 & ① \\ x & - & y & + & z & = & 2 & ② \\ 5x & + & 5y & - & 9z & = & 4 & ③ \end{array}$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

- $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 0$

- $\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$

بما أن $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ فإن لجملة المعادلات المعطاة إما عدد غير منته من الحلول أو الجملة مستحيلة الحل

و لتحديد ذلك نحل جملة المعادلتين ① و ② حلاً مشتركاً و نعوض ما نحصل عليه في المعادلة ③ و نميز بعدها :

- إذا كانت المعادلة ③ محققة عندها نستنتج أن لجملة المعادلات المعطاة ① و ② و ③ عدد غير منته من الحلول.
- إذا كانت المعادلة ③ غير محققة عندها نستنتج أن جملة المعادلات المعطاة ① و ② و ③ مستحيلة الحل.

نحل جملة المعادلتين ① و ② حلاً مشتركاً

- $$\begin{array}{lrcrcl} ① \rightarrow & 2x & + & 3y & = & 1+5z \\ ② \rightarrow & x & - & y & = & 2-z \end{array}$$

- $$\begin{array}{rrcrcl} ① \rightarrow ① & 2x & + & 3y & = & 1+5z \\ ② \times 3 \rightarrow ❷ & 3x & - & 3y & = & 6-3z \end{array}$$

- $① + ❷ \rightarrow 5x = 7 + 2z \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}(7+2z)}$

- $$\begin{array}{rrcrcr} ① \rightarrow ① & 2x & + & 3y & = & 1+5z \\ ② \times (-2) \rightarrow ❷ & -2x & + & 2y & = & -4+2z \end{array}$$

- $① + ❷ \rightarrow 5y = -3 + 7z \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{5}(-3+7z)}$

نعوض قيم x و y في المعادلة ③ فنجد أن :

- $7 + 2z - 3 + 7z - 9z = 4 \rightarrow 4 = 4$

و بالتالي جملة المعادلات المعطاة لها عدد غير منته من الحلول : $S = \left\{ \left(\frac{7+2z}{5}, \frac{-3+7z}{5}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$

مثال : ابحث في حلول جملة المعادلات بطريقة كرامر :

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 3x & + & 5y & - & 2z & = & 6 & ① \\ 4x & + & y & - & 3z & = & 8 & ② \\ 2x & + & 9y & - & z & = & -2 & ③ \end{array}$$

- $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 0$

- $\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -2 \\ 8 & 1 & -3 \\ -2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 78$

بما أن $\Delta = 0$ و $\Delta_x \neq 0$ فإن جملة المعادلات المعطاة مستحيلة الحل.