الاشتقاق و المفاضلة

أولاً: جدول المشتقات :

$\boxed{01}$ $[C = const]' = 0$

$\boxed{02}$ $[Cu]' = C \cdot u'$

$\boxed{03}$ $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$\boxed{04}$ $[\sqrt{u}]' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\boxed{05}$ $[e^u]' = u' \cdot e^u$

$\boxed{06}$ $[a^u]' = u' \cdot a^u \cdot lna$

$\boxed{07}$ $[lnu]' = \frac{u'}{u}$

$\boxed{08}$ $[log_a u]' = \frac{u'}{u \cdot lna}$

$\boxed{09}$ $[sinu]' = u' \cdot cosu$

$\boxed{10}$ $[cosu]' = -u' \cdot sinu$

$\boxed{11}$ $[tanu]' = \frac{u'}{cos^2 u} = u'(1 + tan^2 u)$

$\boxed{12}$ $[cotu]' = \frac{-u'}{sin^2 u} = -u'(1 + cot^2 u)$

$\boxed{13}$ $[arcsinu]' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\boxed{14}$ $[arccosu]' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\boxed{15}$ $[arctanu]' = \frac{u'}{1+u^2}$

$\boxed{16}$ $[arccotu]' = \frac{-u'}{1+u^2}$

$\boxed{17}$ $[sinhu]' = u' \cdot coshu$

$\boxed{18}$ $[coshu]' = u' \cdot sinhu$

$\boxed{19}$ $[tanhu]' = \frac{u'}{cosh^2 u}$

$\boxed{20}$ $[cothu]' = \frac{-u'}{sinh^2 u}$

$\boxed{21}$ $[sinh^{-1}u]' = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$

$\boxed{22}$ $[cosh^{-1}u]' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

$\boxed{23}$ $[tanh^{-1}u]' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\boxed{24}$ $[coth^{-1}u]' = \frac{u'}{1-u^2}$

نبين فيما يلي القواعد الأساسية في الاشتقاق:

$$[u+v]' = u' + v'$$

$$[u-v]' = u' - v'$$

$$[u \cdot v]' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

ثانياً: مشتق دالة الدالة (قاعدة السلسلة):

إذا كانت الدالة $y = f(u)$ و كانت الدالة $u = f(x)$ و كانت y قابلة لاشتقاق في u و u قابلة لاشتقاق في x فعندئذٍ تكون $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

تمارين : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

❶ المشتق الأول للتابع: $y = \sqrt{sin^3\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}$ هو :

Ⓐ $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot cos\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) \cdot sin^2\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\sqrt{sin^3\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}}$

Ⓑ $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot cos\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) \cdot sin^2\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}{8\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\sqrt{sin^3\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}}$

Ⓒ $\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot cos\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) \cdot sin^2\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}{8\sqrt{x}(1+\sqrt{x})\sqrt{sin^3\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}}$

الحل :

$$w = 1 + \sqrt{x} \ , \ v = \sqrt{w} \ , \ z = sinv \ , \ u = z^3 \ , \ y = \sqrt{u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dz} \times \frac{dz}{dv} \times \frac{dv}{dw} \times \frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 3z^2 \times cosv \times \frac{1}{2\sqrt{w}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3z^2 \times cosv}{8\sqrt{x} \times \sqrt{w} \times \sqrt{u}} \rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3sin^2\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) \times cos\sqrt{1+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x} \times \sqrt{1+\sqrt{x}} \times \sqrt{sin^3\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)}}} \Longrightarrow \left(\text{الخيار الصحيح هو } B\right)$$

❷ إن المشتق الأول للتابع $y=\sqrt{arctan(e^{2x})}$ يعطى بالصيغة $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{\sqrt{arctan(e^{2x})}}$ حيث $g(x)$:

Ⓐ $g(x)=\frac{e^{2x}}{(1+e^{4x})}$	Ⓑ $g(x)=\frac{2e^{2x}}{(1+e^{4x})}$	Ⓒ $g(x)=\frac{e^{2x}}{2(1+e^{4x})}$

$$y=\sqrt{arctan(e^{2x})}: \quad w=e^{2x}\ ,\ v=arctan(w)\ ,\ y=\sqrt{v}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\times\frac{dv}{dw}\times\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=2e^{2x}\times\frac{1}{1+w^2}\times\frac{1}{2\sqrt{v}}\rightarrow\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x}}{(1+e^{4x})\sqrt{arctan(e^{2x})}}}\Longrightarrow$$

$$g(x)=\frac{e^{2x}}{(1+e^{4x})}\Longrightarrow\left(A \text{ الخيار الصحيح هو }\right)$$

ثالثاً: مشتق الدالة الضمنية :

إن المعادلة $y=f(x)$ تُعرف y على أنها دالة ظاهرية (صريحة) في x، أما المعادلة $f(x,y)=0$ فهي تُعرف y على أنها دالة ضمنية في x و لإيجاد المشتق $\frac{dy}{dx}$ نميز:

- إمكانية حل المعادلة $f(x,y)=0$ بالنسبة لـ y و بعد ذلك نشتق بالنسبة لـ x.
- عدم إمكانية حل المعادلة $f(x,y)=0$ بالنسبة لـ y ((عدم قدرتنا على فصل y)) عندها نشتق المعادلة بالنسبة لـ x و نحل المعادلة الناتجة بالنسبة لـ $\frac{dy}{dx}=y'$ ((أي نجعل $\frac{dy}{dx}$ لوحدها في طرف))

تمارين : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

❶ المشتق الأول للتابع $y^3 - 3xy + x^3 = 0$

Ⓐ $y' = -\frac{y-x^2}{y^2-x}$	Ⓑ $y' = +\frac{y-x^2}{y^2-x}$	Ⓒ $y' = -\frac{y^2+x}{x^2-y}$

الحل :

$$3y^2y' - 3(y + xy') + 3x^2 = 0 \cdots\cdots (\div 3)$$

$$y^2y' - y - xy' + x^2 = 0$$

$$y'(y^2 - x) - y + x^2 = 0 \rightarrow \boxed{y' = \frac{y-x^2}{y^2-x}} \Longrightarrow$$ (الخيار الصحيح هو B)

❷ المشتق الأول للتابع: $y \cdot sinx + x \cdot cosy = \frac{\pi}{2}$

Ⓐ $y' = +\frac{y \cdot cosx + cosy}{x \cdot siny - sinx}$	Ⓑ $y' = -\frac{y \cdot cosx + cosy}{x \cdot siny - sinx}$	Ⓒ $y' = -\frac{y \cdot cosx + cosy}{y \cdot sinx - siny}$

الحل :

$$y' \cdot sinx + y \cdot cosx + 1 \cdot cosy - x \cdot y' \cdot siny = 0$$

$$y' \cdot sinx - x \cdot y' \cdot siny + y \cdot cosx + cosy = 0$$

$$y' \cdot (sinx - x \cdot siny) = -(y \cdot cosx + cosy)$$

$$y' = -\frac{y \cdot cosx + cosy}{-(x \cdot siny - sinx)}$$

$$\boxed{y' = +\frac{y \cdot cosx + cosy}{x \cdot siny - sinx}} \Longrightarrow$$ (الخيار الصحيح هو A)

رابعاً: الاشتقاق اللوغاريتمي :

يتم الاستفادة من الاشتقاق اللوغاريتمي عند اشتقاق دالة من الشكل $y = [f(x)]^{g(x)}$ حيث كل من الأساس و الأس تابعين لـ x و بشرط $f(x) > 0$ ، كما يمكن الاستفادة من الاشتقاق اللوغاريتمي في بعض الحالات الأخرى التي سنأتي على ذكرها لاحقاً.

تمارين : اختر الإجابة الصحيحة في كل مما يلي :

❶ المشتق الأول للتابع: $y = x^{sinx}$ هو :

Ⓐ $y' = +x^{sinx}\left[\frac{sinx}{x} + ln(x^{cosx})\right]$

Ⓑ $y' = +x^{sinx}\left[\frac{sinx}{x} - ln(x^{cosx})\right]$

Ⓒ $y' = -x^{sinx}\left[\frac{sinx}{x} - ln(x^{cosx})\right]$

الحل :

$$y = x^{sinx} \to lny = ln\left(x^{sinx}\right) \to lny = sinx \cdot lnx$$

$$\frac{y'}{y} = cosx \cdot lnx + \frac{1}{x} \cdot sinx$$

$$\frac{y'}{y} = \left(lnx^{cosx} + \frac{sinx}{x}\right) \to y' = y\left(lnx^{cosx} + \frac{sinx}{x}\right)$$

$$\boxed{y' = x^{sinx}\left(\frac{sinx}{x} + lnx^{cosx}\right)} \Longrightarrow \left(\text{الخيار الصحيح هو } A\right)$$

❷ باستخدام قاعدة الاشتقاق اللوغاريتمي ، المشتق الأول للتابع $y=\sqrt{x^5\cdot(4+3^x)\cdot sin^7x}$

يعطى بالصيغة $y'=\frac{1}{2}\sqrt{x^5\cdot(4+3^x)\cdot sin^7x}\left[\frac{5}{x}+\frac{3^xln3}{4+3^x}+h(x)\right]$ حيث $h(x)$:

Ⓐ $h(x)=7cotx$	Ⓑ $h(x)=7tanx$	Ⓒ $h(x)=\frac{7}{2}cotx$

الحل :

$$y=\sqrt{x^5\cdot(4+3^x)\cdot sin^7x}$$

$$lny=\frac{1}{2}ln[x^5\cdot(4+3^x)\cdot sin^7x]$$

$$lny=\frac{1}{2}[lnx^5+ln(4+3^x)+ln(sin^7x)]$$

$$lny=\frac{1}{2}[5lnx+ln(4+3^x)+7ln(sinx)]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{5}{x}+\frac{3^xln3}{4+3^x}+7\frac{cosx}{sinx}\right]\rightarrow\boxed{y'=\frac{y}{2}\left[\frac{5}{x}+\frac{3^xln3}{4+3^x}+7cotx\right]}$$

ملاحظة : قد نلجأ لاستخدام قاعدتين مختلفتين عند إيجاد مشتق بعض التوابع و على سبيل المثال :

اوجد المشتق الأول للتابع: $y^x=x^y$

$$y^x=x^y\rightarrow ln(y^x)=ln(x^y)\rightarrow x\cdot lny=y\cdot lnx$$

$$1\times lny+\frac{y'}{y}\cdot x=y'\cdot lnx+\frac{1}{x}\cdot y$$

$$lny + \frac{x}{y} \cdot y' = y' \cdot lnx + \frac{y}{x}$$

$$xylny + x^2 \cdot y' = y' \cdot xylnx + y^2$$

$$x^2 \cdot y' - y' \cdot xylnx = y^2 - xylny$$

$$y'(x^2 - xylnx) = y^2 - xylny \rightarrow \boxed{y' = \frac{y^2 - xylny}{x^2 - xylnx}}$$

خامساً: مشتق الدالة الممثلة وسيطياً :

إذا كانت الدالة $y = f(t)$ و الدالة $x = g(t)$ ، كل منهما قابلة لاشتقاق على t ، فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

❶ اوجد $\frac{dy}{dx} = y'$ للدالة المعطاة وسيطياً بالعلاقتين : $\begin{cases} y(t) = sint \cdot e^t \\ x(t) = cost \cdot e^t \end{cases}$

$$y'_t = +cost \cdot e^t + sint \cdot e^t = (cost + sint)e^t$$

$$x'_t = -sint \cdot e^t + cost \cdot e^t = (sint - cost)e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(cost+sint)e^t}{(sint-cost)e^t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{sint+cost}{sint-cost}}$$

❷ اوجد $\frac{dy}{dx} = y'$ للدالة المعطاة وسيطياً بالعلاقتين : $\begin{cases} y(t) = t - arctant \\ x(t) = ln(1 + t^2) \end{cases}$

$$y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \quad , \quad x'_t = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t^2/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t}{2}}$$