سادساً: مكاملة الدوال المثلثية:

① تكاملات من الشكل : $\int sin^n x \cdot cos^m x \cdot dx$

① - ① الحالة الأولى : m أو n أو كلاهما فردي: " نأخذ من الأس الفردي واحد فيتحول إلى زوجي و نفكه كمطابقة "

$$I = \int sin^3 x \cdot cos^8 x \cdot dx$$

$$I = \int sin^2 x \cdot sinx \cdot cos^8 x \cdot dx$$

$$I = \int (1 - cos^2 x) sinx \cdot cos^8 x \cdot dx$$

$$I = \int (cos^8 x \cdot sinx - cos^{10} x \cdot sinx) dx$$

$$I = \int cos^8 x \cdot sinx \cdot dx - \int cos^{10} x \cdot sinx \cdot dx$$

$$Let: t = cosx \rightarrow dt = -sinx \cdot dx$$

$$I = \int t^{10} dt - \int t^8 dt$$

$$I = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{11} cos^{11} x - \frac{1}{9} cos^9 x + C}$$

① - ② الحالة الثانية : m و n زوجيان:

$$I=\int sin^4x\cdot cos^2x\cdot dx$$

$$I=\int sin^2x\cdot sin^2x\cdot cos^2x\cdot dx$$

$$I=\int sin^2x\cdot(sinx\cdot cosx)^2\cdot dx$$

$$I=\int sin^2x\cdot\left(\frac{1}{2}sin2x\right)^2\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int sin^2x\cdot sin^2 2x\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{1-cos2x}{2}\cdot sin^2 2x\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{8}\int(1-cos2x)sin^2 2x\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{8}\int(sin^2 2x-sin^2 2xcos2x)dx$$

$$I=\frac{1}{8}\int sin^2 2x\cdot dx-\frac{1}{8}\int sin^2 2xcos2x\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{8}\int\frac{1-cos4x}{2}dx-\frac{1}{8}\int sin^2 2xcos2x\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{16}\int(1-cos4x)dx-\frac{1}{8}\int sin^2 2xcos2x\cdot dx$$

$$I=\frac{1}{16}\left[x-\frac{1}{4}sin4x\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times sin^3x\right]+C$$

$$\boxed{I=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}sin4x-\frac{1}{48}sin^3x+C}$$

② تكاملات من الشكل :

- $\int sin(mx) \cdot cos(nx) \cdot dx$
- $\int sin(mx) \cdot sin(nx) \cdot dx$
- $\int cos(mx) \cdot sin(nx) \cdot dx$
- $\int cos(mx) \cdot cos(nx) \cdot dx$

في هذه التكاملات نستفيد من دساتير التحويل من جداء إلى مجموع :

- $sinA \cdot cosB = +\frac{1}{2}[sin(A+B) + sin(A-B)]$
- $cosA \cdot sinB = +\frac{1}{2}[sin(A+B) - sin(A-B)]$
- $cosA \cdot cosB = +\frac{1}{2}[cos(A+B) + cos(A-B)]$
- $sinA \cdot sinB = -\frac{1}{2}[cos(A+B) - cos(A-B)]$

تمرين :

$$I = \int sin7x \cdot cos5x \cdot dx$$

$$I = \int \frac{1}{2}[sin(7x+5x) + sin(7x-5x)] \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int [sin(12x) + sin(2x)] \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{12}cos12x - \frac{1}{2}cos2x\right] + C$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{24}cos12x - \frac{1}{4}cos2x + C}$$

سابعاً: تكاملات متنوعة:

① تكاملات تحوي تعابير كسرية في $(sinx\ ,cosx)$: [[التحويل العام]]

- $u = tan\frac{x}{2} \rightarrow x = 2arctanu$
- $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
- $sinx = \frac{2u}{1+u^2}$
- $cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$
- $tanx = \frac{2u}{1-u^2}$

$$I = \int \frac{dx}{1+sinx+cosx}$$

$$I = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1+u^2}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1+u^2+2u+1-u^2}{1+u^2}}$$

$$I = \int \frac{2du}{2+2u} = \int \frac{du}{1+u} = ln|1+u| + C$$

$$\boxed{I = ln\left|1 + tan\frac{x}{2}\right| + C}$$

② تكاملات تحوي أسس كسرية : في هذا النوع من التكاملات نستخدم التعويض الأسي $x = t^n$ حيث (n) المقام المشترك لمقامات الأسس

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}} dx = \int \frac{x^{1/2}}{1+x^{3/4}} dx$$

$$\left(\frac{1}{2} \ and \ \frac{3}{4}\right) \rightarrow \ (n = 4) \rightarrow Let \ x = t^4 \rightarrow dx = 4t^3 dt$$

$$I = \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{1+(t^4)^{\frac{3}{4}}} (4t^3 dt)$$

$$I = \int \frac{t^2}{1+t^3} (4t^3 dt) = 4 \int \frac{t^5}{1+t^3} dt$$

$$I = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{1+t^3}\right) dt$$

$$I = 4 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3} ln|1 + t^3|\right] + C$$

$$I = \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} ln|1 + t^3| + C$$

$$But : x = t^4 \rightarrow t = x^{1/4} = \sqrt[4]{x} \rightarrow$$

$$I = \frac{4}{3} \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3 - \frac{4}{3} ln \left|1 + \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^3\right| + C$$

$$I = \frac{4}{3} x^{3/4} - \frac{4}{3} ln|1 + x^{3/4}| + C$$

$$\boxed{I = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} ln|1 + \sqrt[4]{x^3}| + C}$$