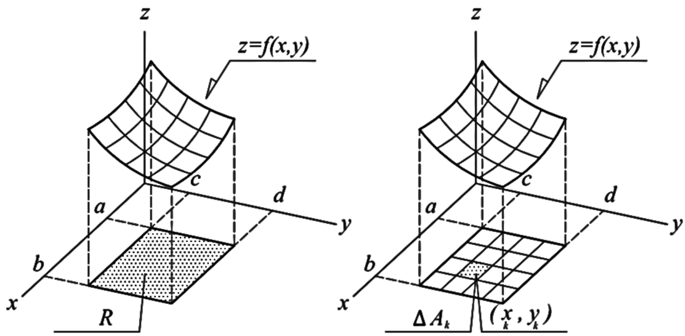
التكامل الثنائي (التكامل المضاعف)

أولاً: تمهيد



بفرض $z = f(x, y)$ تابع لمتغيرين حقيقيين x و y معرفاً على المنطقة R في المستوي xoy حيث

$$R: a \le x \le b \ \ , c \le y \le d$$

- نقسم المنطقة R إلى مناطق صغيرة جزئية R_i باستخدام مستقيمات موازية للمحورين الإحداثيين فتكون هذه المناطق الصغير ة عبارة عن مستطيلات .
- نرمز لهذه المستطيلات و مساحاتها بالرمز : $\Delta A_1 \, , \Delta A_2 \, , \Delta A_3 \, , \cdots , \Delta A_n$
- نأخذ في كل مستطيل ΔA_k نقطة $(x_k \, , y_k)$
- نشكل المجموع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k \, , y_k) \cdot \Delta A_k$
- نأخذ نهاية هذا المجموع عندما $n \to \infty$ ، إذا وجدت لـ S_n نهاية نقول إن التابع قابل للمكاملة على R و هذه النهاية هي التكامل الثنائي للتابع $f(x, y)$
- ونكتب : $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x, y) \cdot \Delta A = \iint_R f(x, y) \cdot dx \cdot dy}$

نتيجة مهمة : إذا كان التابع $f(x,y)$ يأخذ قيما موجبة على المنطقة R

فإن التكامل الثنائي المعطى بالصيغة : $\iint_R f(x,y)\cdot dx\cdot dy$

يمثل حجم المجسم المحدود من الأسفل بالمنطقة R الواقعة في

المستوي xoy و من الأعلى بالسطح $z=f(x,y)$

ثانياً : مبرهنة فوبيني – الصيغة الأولى

إذا كان التابع $f(x,y)$ مستمراً على المستطيل : $R: a\le x\le b \;\; , \; c\le y\le d$ فعندئذ

:

- $\iint_R f(x,y)\cdot \Delta A=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\cdot dx\cdot dy$
- $\iint_R f(x,y)\cdot \Delta A=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\cdot dy\cdot dx$

ثالثاً : مبرهنة فوبيني – الصيغة الثانية

إذا كان التابع $f(x,y)$ مستمراً على المنطقة R حيث :

المنطقة R محدودة على النحو التالي: $R: a\le x\le b \;\; , \; g_1(x)\le y\le g_2(x)$ حيث

التابعان $g_1(x), g_2(x)$ مستمرين على المجال $[a,b]$

- $\iint_R f(x,y)\cdot \Delta A=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\cdot dy\cdot dx$

المنطقة R محدودة على النحو التالي: $R: c\le y\le d \;\; , \; h_1(y)\le x\le h_2(y)$ حيث

التابعان $h_1(y), h_2(y)$ مستمرين على المجال $[c,d]$

- $\iint_R f(x,y)\cdot \Delta A=\int_c^d\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy$

رابعاً : خواص التكامل الثنائي

من أجل كل عدد حقيقي C فإن :

$$1)\quad \iint_R C \cdot f(x,y) \cdot \Delta A = C \cdot \iint_R f(x,y) \cdot \Delta A$$

إذا كان التابعان $f(x,y)$ و $g(x,y)$ مستمرين على المنطقة R فإن :

$$2)\quad \iint_R (f \pm g) \cdot \Delta A = \iint_R f(x,y) \cdot \Delta A \pm \iint_R g(x,y) \cdot \Delta A$$

إذا كانت المنطقة R اتحاد منطقتين هما R_1 و R_2

$$3)\quad \iint_R f(x,y) \cdot \Delta A = \iint_{R_1} f(x,y) \cdot \Delta A \pm \iint_{R_2} f(x,y) \cdot \Delta A$$

إذا كان $f(x,y) > 0$ على المنطقة R

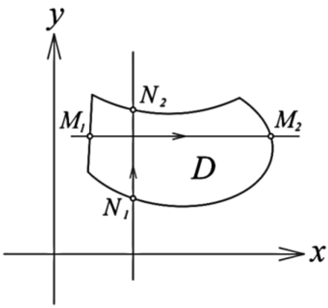
$$4)\quad \iint_R f(x,y) \cdot \Delta A \geq 0$$

إذا كان $f(x,y) > g(x,y)$ على المنطقة R

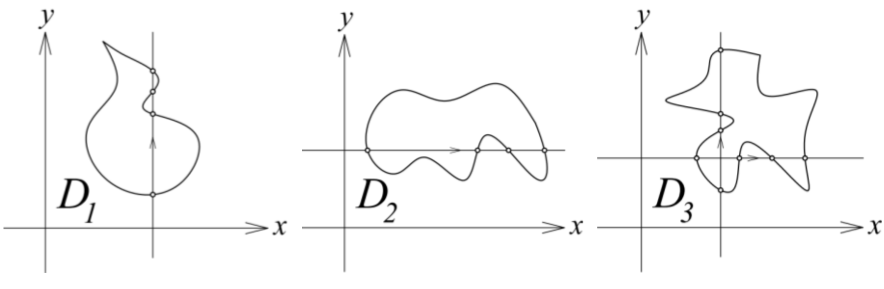
$$5)\quad \iint_R f(x,y) \cdot \Delta A \geq \iint_R g(x,y) \cdot \Delta A$$

خامساً : تعريف المنطقة النظامية

تعريف (1) : نقول إن المنطقة D نظامية بإتجاه ox و نرمز لها بالرمز D_x إذا كان أي مستقيم يوازي ox و ماراً من نقطة داخلية من D (أي ليست على حدود D) يقطع حدود D في نقطتين فقط M_1 و M_2



تعريف (2) : نقول إن المنطقة D نظامية بإتجاه oy و نرمز لها بالرمز D_y إذا كان أي مستقيم يوازي oy و ماراً من نقطة داخلية من D (أي ليست على حدود D) يقطع حدود D في نقطتين فقط N_1 و N_2

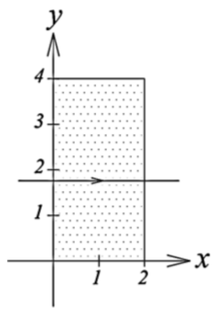


D_3 غير نظامية بالاتجاه ox — D_2 غير نظامية بالاتجاه ox — D_1 نظامية بالاتجاه ox

D_3 غير نظامية بالاتجاه oy — D_2 نظامية بالاتجاه oy — D_1 غير نظامية بالاتجاه oy

تطبيق عددي : لتكن المنطقة R المعرفة وفق $R: 0 \leq x \leq 2 \ \ ,0 \leq y \leq 4$ وبفرض التابع العددي $f(x,y) = x\sqrt{y}$ و المطلوب احسب التكامل المضاعف للتابع المعطى على المنطقة R و ذلك بعد رسم منطقة التكامل .

الحل:



- $I = \int_0^4 \int_0^2 x\sqrt{y} \cdot dx \cdot dy$
- $I = \int_0^4 \sqrt{y} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot dy$
- $I = \int_0^4 \sqrt{y} \left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) \cdot dy$
- $I = 2 \int_0^4 \sqrt{y} \cdot dy$
- $I = 2 \int_0^4 (y)^{1/2} \cdot dy$
- $I = 2 \left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{4}{3} \left[\sqrt{y^3}\right]_0^4$
- $I = \frac{4}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{0^3}\right) = \frac{4\times8}{3} = \frac{32}{3}$

تطبيق عددي: لتكن المنطقة R المعرفة وفق $R: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ احسب التكامل المضاعف للتابع $f(x,y) = sinx \cdot cosy$ على المنطقة R.

- $I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} sinx \cdot cosy \cdot dx \cdot dy$
- $I = \int_0^{\pi/2} sinx \cdot dx \times \int_0^{\pi/2} cosy \cdot dy$
- $I = \int_0^{\pi/2} sinx \cdot dx \times \int_0^{\pi/2} cosy \cdot dy$

- $I = \int_0^{\pi/2} sinx \cdot dx \times \int_0^{\pi/2} cosy \cdot dy$
- $I = [-cosx]_0^{\pi/2} \times [siny]_0^{\pi/2}$
- $I = \left(-cos\frac{\pi}{2} + cos0\right) \times \left(sin\frac{\pi}{2} - sin0\right)$
- $I = (0 + 1) \times (1 - 0) = 1$

تطبيــق عــددي: اوجــد حجــم المجســم الواقــع تحــت الســطح $z = 2x + 5y + 1$ و فــوق المنطقة R المعرفة وفق $R: -1 \leq x \leq 0\ ,\ 1 \leq y \leq 4$

- $I = \int_1^4 \int_{-1}^0 (2x + 5y + 1) dx \cdot dy$
- $I = \int_1^4 [x^2 + 5xy + x]_{-1}^0 \cdot dy$
- $I = \int_1^4 \big((0 + 0 + 0) - (1 - 5y - 1)\big) dy$
- $I = \int_1^4 5y \cdot dy$
- $I = \left[\frac{5}{2}y^2\right]_1^4 = \frac{5}{2}(4^2 - 1^2) = \frac{5}{2}(16 - 1) = \frac{75}{2}$

تطبيق عددي:: عيّن قيمة الثابت α حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ حتى تكون قيمة التكامل I مساوية $9ln\sqrt{2}$ حيث

$$I = \int_{-1}^{2} \int_{0}^{1} \frac{\alpha+x}{1+y} \cdot dy \cdot dx$$

الحل:

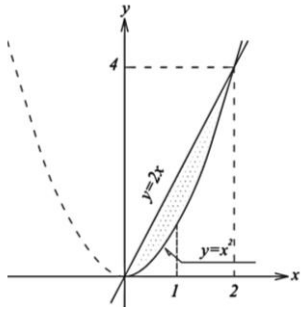
- $I = \int_{-1}^{2} \int_{0}^{1} \frac{\alpha+x}{1+y} \cdot dy \cdot dx$
- $I = \int_{-1}^{2} [(\alpha + x)ln(1 + y)]_{0}^{1} dx$
- $I = ln2 \int_{-1}^{2} (\alpha + x)dx$
- $I = ln2 \left[\alpha x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$
- $I = ln2 \left[(2\alpha + 2) - \left(-\alpha + \frac{1}{2}\right)\right]$
- $I = ln2 \left(3\alpha + \frac{3}{2}\right)$

و من نص التمرين لدينا $I = 9ln\sqrt{2} = \frac{9}{2} ln2$

- $ln2 \left(3\alpha + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} ln2 \ \rightarrow \ 3\alpha + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \ \rightarrow \ 3\alpha = 3 \ \rightarrow \alpha = 1$

تطبيق عددي: اوجد حجم جزء المجسم الواقع تحت السطح $z = x^2 + y^2$ و فوق المنطقة D في المستوي xoy المحددة بالمستقيم $y = 2x$ و القطع المكافئ $y = x^2$

الحل : نوجد حدود منطقة التكامل ، كما نلاحظ أن المنطقة نظامية بالاتجاه oy

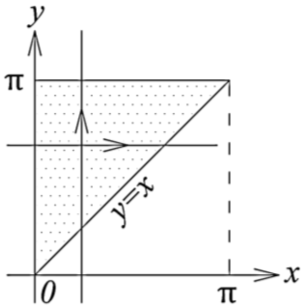


- $y_1 = y_1$
- $x^2 = 2x$
- $x^2 - 2x = 0$
- $x = 0 \; or \; x = 2$

- $I = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$
- $I = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} dx$
- $I = \int_0^2 \left[\left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3}\right) - \left(x^2(x^2) + \frac{(x^2)^3}{3}\right)\right] dx$
- $I = \int_0^2 \left[\left(2x^3 + \frac{8x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right)\right] dx$
- $I = \int_0^2 \left(\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6\right) dx$
- $I = \left[\frac{14}{12}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7\right]_0^2 = \left[\frac{7}{6}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7\right]_0^2$
- $I = \left(\frac{7}{6}(2)^4 - \frac{1}{5}(2)^5 - \frac{1}{21}(2)^7\right) - (0) = \frac{216}{35}$
- $I = \frac{216}{35}$

تطبيق عددي: في كل من التكاملات الآتية المطلوب : ارسم منطقة التكامل ثم اعد كتابة حدود التكامل بعد تغيير ترتيب المكاملة ثم و انجز التكامل الجديد .

❶ $I = \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=x}^{y=\pi} \left(\frac{siny}{y}\right) dydx$



- $I = \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=\pi} \left(\frac{siny}{y}\right) dydx$

- $I = \int_{y=0}^{y=\pi} \int_{x=0}^{x=y} \left(\frac{siny}{y}\right) dxdy$

- $I = \int_{y=0}^{y=\pi} \left[\left(\frac{siny}{y}\right) x\right]_{x=0}^{x=y} dy$

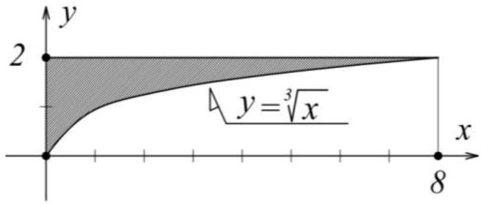
- $I = \int_{y=0}^{y=\pi} \left[\left(\left(\frac{siny}{y}\right)(y)\right) - \left(\left(\frac{siny}{y}\right)(0)\right)\right] dy$

- $I = \int_{y=0}^{y=\pi} siny \cdot dy$

- $I = [-cosy]_{y=0}^{y=\pi}$

- $I = \left(-cos(\pi)\right) - \left(-cos(0)\right) = (+1) - (-1) = 2$

بفرض $I = \iint_D \left(\frac{\alpha}{1+y^4}\right) dydx$ ، حيث D المنطقة المحصورة بين الخط البياني للتابع $y = \sqrt[3]{x}$ والمستقيم $y = 2$ ،كما هو موضح جانباً ، فإذا علمت أن $I = \frac{ln(17)}{4}$ ، فإن قيمة α هي:



Ⓐ $\alpha = 1$ Ⓑ $\alpha = \frac{1}{4}$ Ⓒ $\alpha = 4$ Ⓓ كل الإجابات السابقة خاطئة

- $I = \int_{x=0}^{x=8} \int_{y=\sqrt{x}}^{y=2} \left(\frac{\alpha}{1+y^4}\right) dydx$

- $I = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y^3} \left(\frac{\alpha}{1+y^4}\right) dxdy$

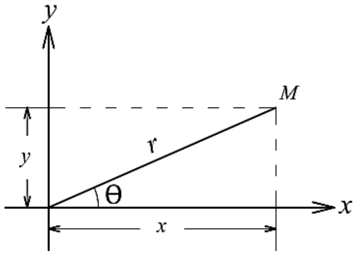
- $I = \int_{y=0}^{y=2} \left[\left(\frac{\alpha}{1+y^4}\right) x\right]_0^{y^3} dy = \int_{y=0}^{y=2} \left[\left(\left(\frac{\alpha}{1+y^4}\right) y^3\right) - (0)\right] dy$

- $I = \alpha \int_{y=0}^{y=2} \left(\frac{y^3}{1+y^4}\right) dy = \frac{\alpha}{4} [ln(1+y^4)]_0^2$

- $I = \frac{\alpha}{4} \left[\left(ln(1+16)\right) - \left(ln(1+0)\right)\right] = \frac{\alpha ln(17)}{4}$

من نص التمرين لدينا $I = \frac{ln(17)}{4}$ و بالتالي $\alpha = 1$

سادساً : التكامل المضاعف في الإحداثيات القطبية



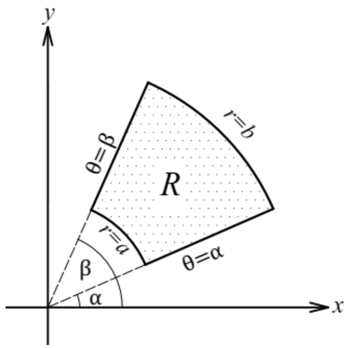
تمهيد : يتم تعيين النقطة M في الإحداثيات الديكارتية بزوج مرتب من الأعداد (x, y) حيث يمثل العدد x بعد النقطة M عن المحور oy و يمثل العدد y بعد النقطة M عن المحور ox.

أما في الإحداثيات القطبية يتم تعيين النقطة M بزوج مرتب من الأعداد (r, θ) حيث يمثل العدد r بعد النقطة M عن مبدأ الإحداثيات O و يمثل العدد θ الزاوية الموجبة المحصورة بين المحور or و المستقيم (OM)

ترتبط الإحداثيات الديكارتية و الإحداثيات القطبية بالعلاقات التالية :

➢ $r^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad x = rcos\theta \quad , \quad y = rsin\theta$

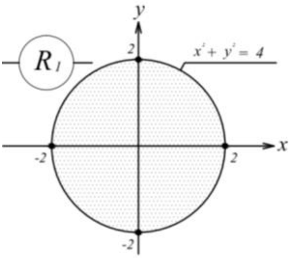
شبكة الإحداثيات القطبية و المستطيل القطبي :



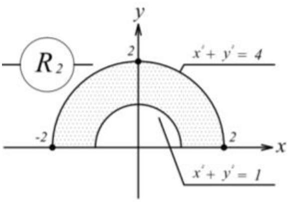
كما ذكرنا في الإحداثيات القطبية يتم تعيين النقطة M بالزوج (r, θ) ، و بتالي شبكة الإحداثيات القطبية مؤلفة من المجموعة $r = c$ التي تمثل مجموعة دوائر متمركزه مركزها O و نصف قطرها c ، بينما تمثل المجموعة $\theta = k$ مجموعة مستقيمات منبعثة من O أجل قيم k المختلفة

و بالتالي تقاطع كل زوج من الدوائر مع كل زوج من المستقيمات يشكل ما يسمى بالمستطيل القطبي و هو يقابل المستطيل الديكارتي المألوف و بالتالي يتم تعريف المنطقة R القطبية بالصيغة :

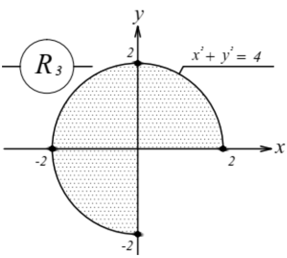
- $R:\{(r,\theta) : a \le r \le b \quad , \quad \alpha \le \theta \le \beta\}$



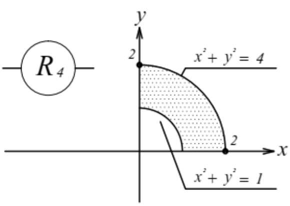
- $R_1:\{(r,\theta) : 0 \le r \le 2 \, , 0 \le \theta \le 2\pi\}$



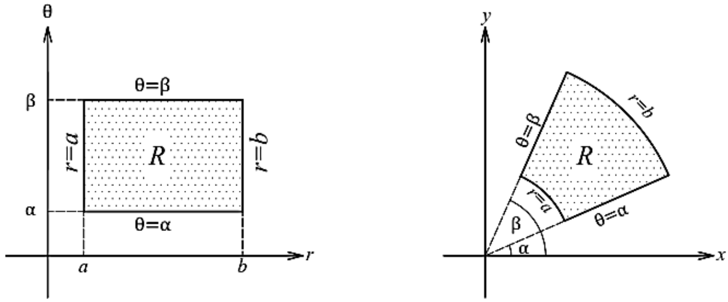
- $R_2:\{(r,\theta) : 1 \le r \le 2 \, , 0 \le \theta \le \pi\}$



- $R_3:\left\{(r,\theta) : 0 \le r \le 2 \, , 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\right\}$



- $R_4:\left\{(r,\theta) : 0 \le r \le 2 \, , 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$



نعلم بأن الإحداثيات الديكارتية و القطبية مرتبطة بالعلاقات التالية :
$$\left.\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = r cos\theta \\ y = r sin\theta \end{array}\right\}$$

إذا أردنا الانتقال في التكامل المضاعف من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية فإننا نستخدم

محدد التحويل (اليعقوبي) المعطى بالصيغة :

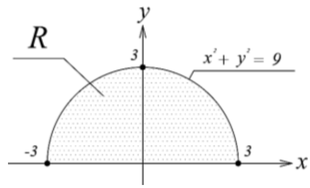
- $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & -r sin\theta \\ sin\theta & r cos\theta \end{vmatrix}$

- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r cos^2\theta + r sin^2\theta = r(cos^2\theta + sin^2\theta) = r$

- $\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(r cos\theta, r sin\theta)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr d\theta$

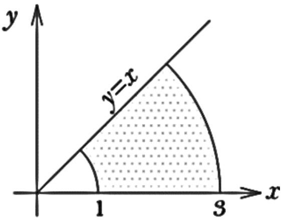
- $\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(r cos\theta, r sin\theta) r dr d\theta}$

تطبيق عددي : احسب التكامل المضاعف $I = \iint_R arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$ حيث R المنطقة الموضحة بالشكل المرسوم أدناه.



- $R:\{(r,\theta): 0 \leq r \leq 3 , 0 \leq \theta \leq \pi\}$
- $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$
- $I = \iint_R arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$
- $I = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} arctan\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$
- $I = \int_0^\pi \int_0^3 arctan\left(\frac{rsin\theta}{rcos\theta}\right) rdrd\theta = \int_0^\pi \int_0^3 arctan\left(\frac{sin\theta}{cos\theta}\right) rdrd\theta$
- $I = \int_0^\pi \int_0^3 arctan(tan\theta) rdrd\theta$
- $I = \int_0^\pi \int_0^3 \theta \cdot rdrd\theta$
- $I = \int_0^\pi \theta d\theta \times \int_0^3 rdr$
- $I = \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^\pi \times \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3$
- $I = \left(\frac{(\pi)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \times \left(\frac{(3)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right)$
- $I = \frac{9\pi^2}{4}$

تطبيق عددي : احسب التكامل المضاعف $I = \iint_R \left(\frac{y^2}{x^2}\right) dxdy$ حيث R المنطقة الموضحة بالشكل المرسوم أدناه.



- $R: \left\{(r,\theta): 1 \le r \le 3\,, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$
- $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$
- $I = \iint_R \left(\frac{y^2}{x^2}\right) dxdy$
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^3 \left(\frac{(rsin\theta)^2}{(rcos\theta)^2}\right) rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^3 \left(\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right) rdrd\theta$
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^3 (tan^2\theta) rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan^2\theta) \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 d\theta$
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan^2\theta) \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tan^2\theta) d\theta$
- $I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + tan^2\theta) - 1] d\theta$
- $I = 4[tan\theta - \theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$
- $I = 4\left(tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (tan0 - 0) = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$
- $I = 4 - \pi$