

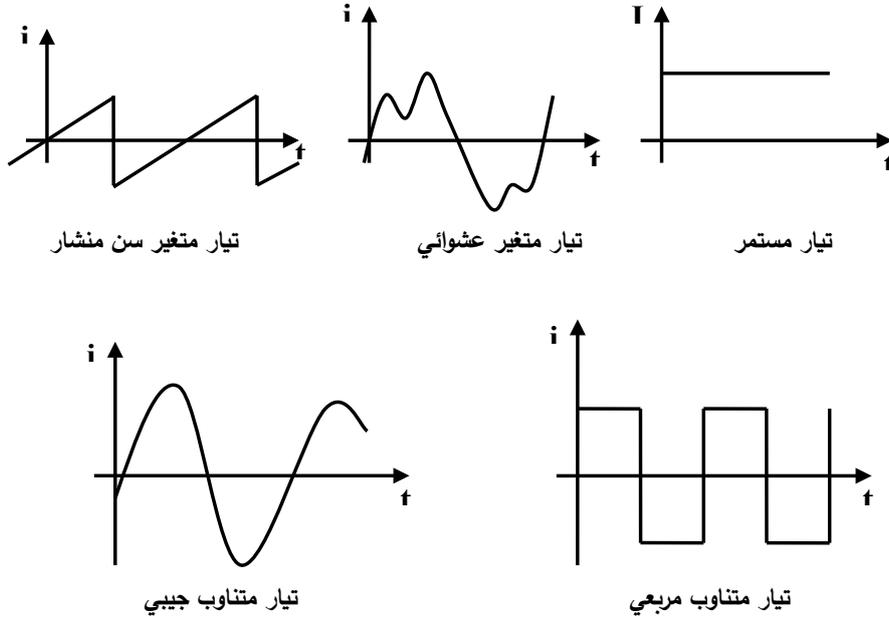
الفصل الرابع
التيار المتناوب أحادي الطور
Single phase Alternating Current

التيار المتناوب أحادي الطور Single phase Alternating Current

4 - 1 - تعريف التيار المتناوب : Alternating Current

التيار المتناوب هو التيار الذي تتغير قيمته موجبة كانت أم سالبة بالنسبة للزمن وبشكل منتظم ، ويكرر نفسه بعد زمن يساوي الدور ، كالتيارات المربعة أو المنشارية أو الجيبية . [1]

يبين الشكل (4-1) الأنواع المختلفة للتيارات.



تيار متغير سن منشار

تيار متغير عشوائي

تيار مستمر

تيار متناوب جيبى

تيار متناوب مربعي

الشكل (4-1) الأنواع المختلفة للتيارات الكهربائية

ونقول عن التيار الكهربائي أنه مستمر عندما تبقى قيمته ثابتة مع الزمن . كما هو مبين في الشكل (4-1).

من حيث المبدأ كان بالإمكان أن نسمي كل تيار متغير مع الزمن تياراً متناوباً . ولكن في العلوم التقنية تم اعتماد مصطلح التيار المتناوب على التيار الذي تتغير قيمته

واتجاهه تغيراً دورياً مع مرور الزمن بحيث تكون القيمة المتوسطة لهذا التيار خلال زمن الدورة الواحدة مساوية للصفر. ويكون تردد التيار دورياً لأنه بعد فترة من الزمن قدرها T يتكرر تغير التيار وتسمى هذه الفترة الزمنية بالدور Period. كما هو مبين في الشكل-4).

أما الدائرة الكاملة لتغيرات التيار المتناوب فتسمى بالدورة Loop. وبهذا فإن الدور: هي الفترة الزمنية التي تستغرقها الدورة الواحدة للتيار المتناوب. ويسمى عدد الدورات في الثانية الواحدة بالتردد Frequency ويرمز له بالرمز f وهو عبارة عن مقلوب الدور أي $f = \frac{1}{T}$ ويقاس التردد بوحدة الهرتز [Hz].

حيث تقدر قيمة تردد التيار بهرتز واحد إذا كانت مدة دورته تساوي ثانية واحدة. ومن المتبع استعمال تردد قياسي مقداره 50[Hz] في أجهزة الطاقة الكهربائية، ومن بينها كافة المحطات الكهربائية في روسيا ومعظم دول العالم فيما عدا الولايات المتحدة الأمريكية حيث يستخدم تردد قياسي 60[Hz]، ومن السهل توضيح أسباب مثل هذا الاختيار. إن انخفاض التردد عن المقدار المحدد له يعد أمراً غير مقبول حيث أن المصباح يعطي ضوءاً متقطعاً بصورة ملحوظة للعين المجردة عندما ينخفض التردد حتى 40[Hz] كما أن ارتفاع قيمة التردد عن القدر المحدد له يعد أمراً غير مستحسن حيث أن القوة المحركة الكهربائية المتحرضة ذاتياً تزداد متناسبة مع التردد مؤدية إلى إعاقة نقل الطاقة بواسطة الأسلاك.

ولا ينطبق هذا على نقل الطاقة الكهربائية بكميات صغيرة نسبياً وبدون أسلاك. بواسطة الموجات الكهرطيسية ولهذا تستعمل في هندسة الراديو ترددات عالية تتراوح بين 100[KHz] (الموجات الطويلة) و 30000 [MHz] (الموجات القصيرة). وإلى جانب هذا تستعمل تيارات ذات ترددات متباينة للغاية في الأغراض الفنية الخاصة. فعلى سبيل المثال تستعمل تيارات يتراوح ترددها بين 500[Hz] و 50[MHz] في الأفران الكهربائية.

وكثيراً ما يستعمل مفهوم طول الموجة Wavelength ويرمز له بالرمز λ في حالة الأجهزة العالية التردد وهو عبارة عن مقدار يتناسب مع التردد f تناسباً عكسياً .
ويؤدي التغير الدوري للتيار المتناوب إلى إثارة مجال كهرومغناطيسي ينتشر في الفراغ أو في الأسلاك على هيئة موجات كهرومغناطيسية بسرعة محددة قدرها v وتسمى المسافة بين أقرب نقطتين واقعتين في نفس الطور للتردد بطول الموجة . وهكذا فإن طول الموجة للتيار المتناوب يساوي المسافة التي تقطعها الموجة خلال دورة واحدة.

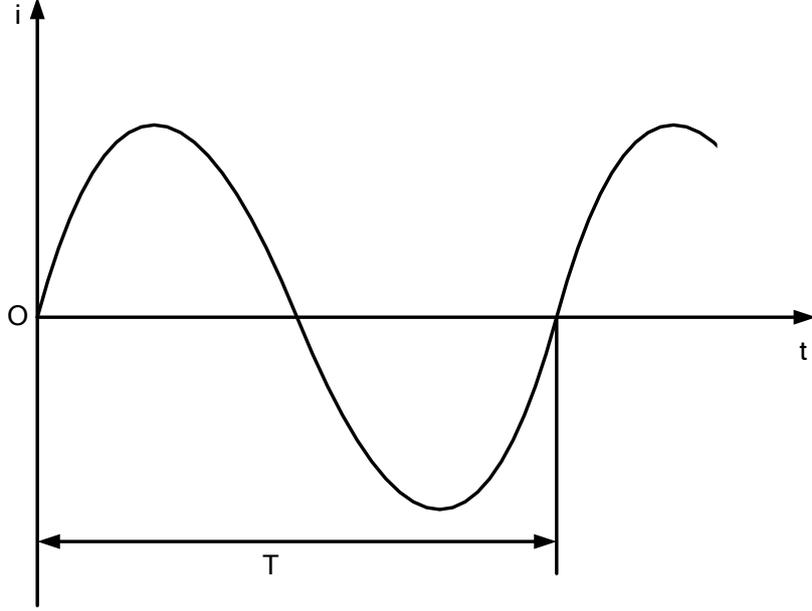
$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \quad (4-1)$$

عند تعيين طول موجة التيار المتناوب تعد سرعة انتشار الموجة مساوية لسرعة الضوء المقربة [Km/sec] 300000 ، وإن كانت الموجات الكهرومغناطيسية في الواقع لا تنتشر بهذه السرعة إلا في الفراغ وبطول الخطوط الهوائية .

(في خطوط الكابلات تقل سرعة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية إلى عشر هذه القيمة تقريباً) وعلى هذا الأساس فإن طول موجة التيار المتناوب الذي يقاس تردده بمقدار [HZ] 50 .

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{30000}{50} = 6000 [Km]$$

أما إذا كان التردد يساوي 3×10^{10} فإن طول الموجة $\lambda = 1 \text{ cm}$



الشكل (4-2) دور التيار الكهربائي الجيبي

ستقتصر دراستنا في هذا الكتاب على التيارات والتوترات الكهربائية المتناوبة الجيبية.

4 - 2 - توليد التيارات المتناوبة: Generation Alternating Current

يتم توليد التيار المتناوب ذي التردد الصناعي $f = 50$ [Hz] في المحطات الكهربائية بواسطة المولدات التزامنية Synchronism Machine . وتعمل هذه المولدات على أساس ظاهرة التحريض الكهروضويسي في الآلات الكهربائية [4] . وبواسطة المولد تتحول الطاقة الميكانيكية التي يعطيها المحرك الأولي (تربين بخاري أو هيدروليكي - عنفات بخارية - حرارية - مائية) إلى طاقة التيار الكهربائي المتناوب.

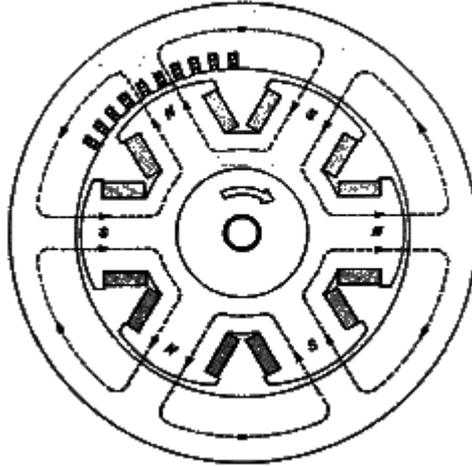
يتألف مولد التيار المتناوب (المنوبة) من جزأين أساسيين :

1 - الجزء الثابت : Stator

ويحتوي على عدد من الملفات متوضعة ضمن مجارٍ محفورة في الجزء الثابت مشكلة أقطاباً مغناطيسية متعاقبة شمالي - جنوبي الخ.

2 - الجزء المتحرك (الجزء الدوار) : Rotor

وهو الجزء المكون من الأقطاب المغناطيسية الدائمة أو الكهربائية ، ويكون عدد الأقطاب دائماً زوجياً بحيث تتوزع على محيط الجزء الدوار بشكل منتظم وبقطبية متناوبة قطب شمالي N ثم قطب جنوبي S كما هو مبين في الشكل (4-3).



الشكل (4-3) آلية توليد التيار المتناوب

يدور الجزء المتحرك (الدوار) بواسطة محرك احتراق داخلي (ديزل) للاستطاعات الصغيرة والمتوسطة أو بواسطة العنفات البخارية أو الغازية أو المائية للاستطاعات الكبيرة.

عندما يدور الجزء الدوار الذي يحمل الأقطاب المغناطيسية فإنه سوف يتم تغيير في الفيض المغناطيسي المترابط مع ملفات الثابت ، فتتسأ قوة محرك كهربائية تحريضية بحسب قانون التحريض المغناطيسي :

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (4-2)$$

حيث :

N : عدد لفات الملف.

$\frac{d\Phi}{dt}$: تغير الفيض المغناطيسي بالنسبة للزمن.

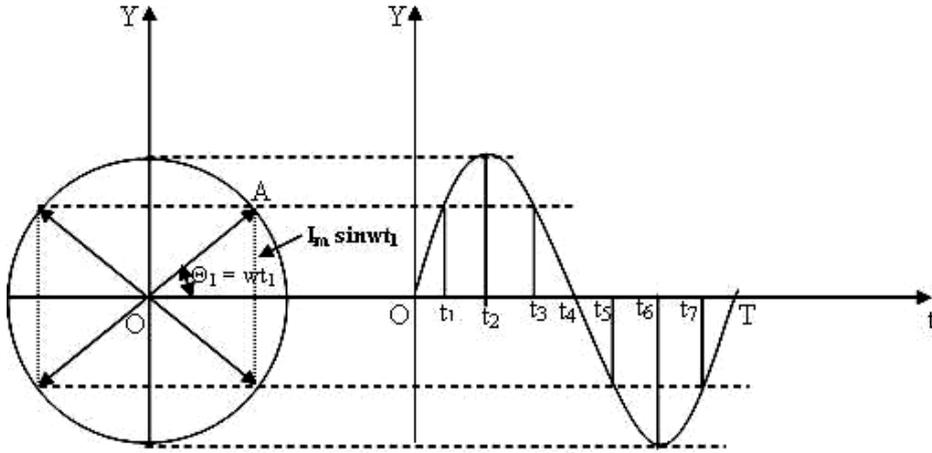
وبما أن الأقطاب الشمالية والجنوبية تمر أمام الملفات بشكل متناوب لذلك تحصل على توتر متناوب بين أطراف الملفات.
 يتم تصميم المولدات كافة لتعطي قوة محرّكة كهربائية تحريضية على شكل تابع جيبى لما لذلك من فوائد فنية واقتصادية.

4 - 3 - التيارات والتوترات الجيبية: Sinusoidal Voltages and Currents

يبين الشكل (4-4) تغير التيار الجيبى بالنسبة للزمن بحيث يتبع المعادلة :

$$i = I_m \sin(\omega t) \quad (4-3)$$

ولرسم المنحنى الجيبى نستعين بحركة نقطة A على محيط دائرة بسرعة خطية ثابتة ونصف قطر هذه الدائرة يمثل القيمة العظمى للتيار I_m ومسقط هذه النقطة على المحور OY يمثل القيمة اللحظية.



الشكل (4-4) تغير التيار الجيبى بالنسبة للزمن

تقطع النقطة A الدائرة بسرعة زاوية ثابتة عكس اتجاه عقارب الساعة بزاوية 2π راديان خلال زمن يساوي T ثانية.

يسمى الزمن T بالدور وعدد الدورات التي تقطع فيها النقطة A كامل محيط الدائرة خلال

ثانية واحدة بالتردد f وبالتالي فإن العلاقة بين الدور والتردد هي :

$$f = \frac{1}{T} \quad (4-4)$$

يقاس التردد بوحدة (ذبذبة / ثانية) أو الهرتز ويرمز لهذه الوحدة ب Hz .
تسمى الزاوية التي تقطعها النقطة A خلال f دورة في الثانية بالسعة الزاوية ويرمز لها بالرمز ω وتقاس بوحدة (راديان / ثانية) ويرمز لهذه الوحدة ب rad / sec والعلاقة بين السرعة الزاوية والتردد هي:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \text{ rad / sec} \quad (4-5)$$

بعد مرور فترة زمنية قدرها t_1 من لحظة بدء قياس الزمن تتحرف القطعة المستقيمة $OA = I_m$ بزاوية قدرها ωt_1 . ولنسقط من نهاية المستقيم $OA = I_m$ الموجود في الوضع الجديد عموداً على المحور الأفقي . يكون طول هذا العمود مساوياً للمقدار $I_m \sin(\omega t_1)$.

وفي لحظة تالية يميل المستقيم على المحور الأفقي بزاوية قدرها ωt_2 والتي تقابل مرور ربع دورة من لحظة بدء قياس الزمن أي في اللحظة $t_2 = \frac{T}{4}$ يكون المستقيم OA

$= I_m$ عمودياً على المحور الأفقي ويكون طول العمود المسقط كالاتي :

$$I_m \sin(\omega t_2) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4}\right) = I_m \sin \frac{\pi}{2} = I_m \quad (4-6)$$

وبهذا نحصل على منحنى الجيب خلال المدة الزمنية $t = 0$ و $t = t_2$ ويصل المنحنى إلى نهايته العظمى في اللحظة $t_2 = T/4$ ثم يبدأ المنحنى في الانخفاض عند استمرار النقطة A في الدوران (أي في اللحظة t_3) .

وأخيراً يأخذ المستقيم OA الوضع الأفقي في اللحظة الزمنية $t_4 = T/2$ بعد أن يكون قد

رسم قوساً مقداره π راديان . وتساوي قيمة $OA = I_m$ في هذه اللحظة :

$$I_m \sin(\omega t_4) = I_m \sin \pi = 0 \quad (4-7)$$

أي أن المنحنى في هذه اللحظة يمر من نقطة الصفر . ومع الدوران التالي للنقطة A نعدّ العمود $I_m \sin(\omega t)$ سالباً في اللحظات t_5 و t_6 و t_7 ، وبالتالي نرسم الجزء السالب من المنحنى الجيبي في أسفل المحور الأفقي .

ليس من الضروري أن نختار نقطة المبدأ بالنقطة التي يكون فيها التيار أو التوتر مساوياً للصفر . كما أن التوتر والتيار في دارة ما وبصورة عامة يكونان مختلفين بالطور . فإذا

وصل منحني التوتر إلى قيمته العظمى قبل وصول موجة التيار إلى قيمتها العظمى فنقول إن التوتر متقدم على التيار أو التيار متأخر عن التوتر. وإذا وصلت موجة التيار إلى قيمتها العظمى قبل موجة التوتر فنقول إن التيار متقدم على التوتر أو التوتر متأخر عن التيار.

بصورة عامة يمكن كتابة علاقة التيار والتوتر الجيبي كما يلي :

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i) \quad (4 - 8)$$

$$u = U_m \sin (\omega t + \psi_u) \quad (4 - 9)$$

حيث :

i و u : القيمة اللحظية على التوالي للتيار والتوتر.

I_m و U_m : القيمة العظمى (المطال) على التوالي للتيار والتوتر.

ψ_u و ψ_i :زاوية طور كل من التيار والتوتر في اللحظة $t = 0$.

إن من أهم مزايا التيار المتناوب هي إمكانية استعمال المحولات الكهربائية التي يمكننا، بعد توليد القدرة الكهربائية بالتوتر التقني والاقتصادي ، إلى رفع التوتر وخفضه ليصبح مناسباً للنقل والاستعمال . كما يمكن الحصول على التيار المستمر من التيار المتناوب باستعمال المقومات الكهربائية (ثنائيات نصف ناقلة).

مثال : 1

تيار متناوب جيبي تردده $f = 50$ [Hz] له قيمة عظمى تساوي $I_m = 100$ [A] وقيمته تساوي الصفر عندما $t = 0$ ويزداد بالاتجاه الموجب بعد هذه اللحظة مباشرةً.
المطلوب :

1 - اكتب الصيغة العامة لعلاقة التيار اللحظي .

2 - احسب القيمة اللحظية للتيار بعد زمن يساوي $1/600$ [sec] .

3- احسب زمن وصول قيمة التيار لأول مرة إلى القيمة 80 [A] .

الحل:

1 - الصيغة العامة هي :

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i)$$

حيث :

$$I_m = 100 \text{ [A]}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 100 \pi$$

وإذا قيست السرعة الزاوية بالدرجات / ثانية يكون :

$$\omega = 360f = 360 \cdot 50 = 18000 \text{ [deg / sec]}$$

بما أن قيمة التيار تساوي الصفر في اللحظة $t = 0$ ينتج أن $\psi_i = 0$. إذاً تكون علاقة التيار اللحظي :

$$i = 100 \sin (100\pi t) \text{ (الزاوية بالراديان)}$$

أو :

$$i = 100 \sin (18000t) \text{ (الزاوية بالدرجات)}$$

2 - باستخدام صيغة القيمة اللحظية عند قياس الزاوية بالراديان وعند زمن $t = 1/600$ [sec] يكون :

$$i = 100 \sin \left(100\pi \frac{1}{600} \right) = 100 \sin \frac{\pi}{6} = 50 \text{ [A]}$$

وعند قياس الزاوية بالدرجات يكون :

$$i = 100 \sin \left(18000 \frac{1}{600} \right) = 100 \sin 30 = 50 \text{ [A]}$$

3 - عندما $i = 80 \text{ A}$ و باستخدام صيغة القيمة اللحظية عند قياس الزاوية بالدرجات يكون :

$$80 = 100 \sin 18000 t$$

ومنه :

$$18000 t = \sin^{-1} 0.8 = 53^\circ$$

إذن :

$$t = \frac{53}{18000} = 0.00295 \text{ [sec]}$$

إن شدة التيار المتناوب تتغير من لحظة لأخرى، لذلك فإن استخدام القيم اللحظية في الحسابات غير مريح، ولهذا السبب تم استخدام مفاهيم التيار المستمر المكافئ الذي يؤدي إلى النتائج نفسها كما هو الحال في التيار المتناوب، ومن هذه المفاهيم:

4 - 4 - القيمة المتوسطة للتيار والتوتر:

Average or mean Value of Current and Voltage

وهي قيمة التيار المستمر المكافئ الذي ينقل الشحنة الكهربائية نفسها التي ينقلها التيار المتناوب خلال نصف الدور $\frac{T}{2}$ [5].

فإذا كانت القيمة اللحظية للتيار من الشكل :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \quad (4-10)$$

فإن القيمة المتوسطة لهذه القيمة اللحظية خلال دور أو عدد صحيح من الأدوار هي :

$$I_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin(\omega t + \psi) \cdot dt = 0 \quad (4-11)$$

من الواضح أن القيمة المتوسطة للتيار أو التوتر المتناوب (أو لأي قيمة متناوبة) خلال زمن يساوي دوراً كاملاً أو عدداً صحيحاً من الأدوار تساوي الصفر . ولكي يكون لهذه القيمة المتوسطة للتيار أو التوتر معنى فإنها تحسب دائماً خلال زمن يساوي النوبة الموجبة أو السالبة أي ما يعادل نصف دورة .

فإذا كانت القيمة اللحظية للتيار والتوتر من الشكل :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (4-13)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (4-14)$$

تكون القيمة المتوسطة للتيار I_{med} :

$$\begin{aligned} I_{med} &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt \\ &= \frac{2 \cdot I_m}{\pi} \cos \Psi \end{aligned} \quad (4-14)$$

إذا كانت زاوية الطور ψ_i تساوي للصفر ينتج :

$$I_{med} = \frac{2}{\pi} I_m \quad (4-15)$$

القيمة المتوسطة للتيار I_{med} :

القيمة المتوسطة للتوتر U_{med} :

$$U_{med} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t + \psi_u) dt$$

$$= \frac{2}{\pi} U_m \quad (4-16)$$

4 - 5 - القيمة الفعالة للتيار والتوتر:

Effective Value of Current and Voltage

وهي قيمة التيار المستمر المكافئ للتيار المتناوب الذي ينقل القدرة الكهربائية نفسها خلال كامل الدور T [5] .

لكي يكون معنى فيزيائي للقيمة المتوسطة للتيار وبخاصة التوتر المتناوب لمقارنته مع التيار أو التوتر المستمر. فإنه يلجأ إلى مقارنة الأثر الذي يحدثه كل منهما في دارة ما. وقد اختير لهذا الغرض الأثر الحراري الذي يحدثه التيار المتناوب والمستمر في حمل مقاومة R :

بالنسبة للتيار المستمر DC (Direct Current) فإن الاستطاعة الحرارية المنتشرة في المقاومة R نتيجة مرور تيار مستمر شدته I متناسبة مع الاستطاعة الكهربائية التي تعطى بالعلاقة :

$$P_{dc} = I^2 \cdot R \quad (4 - 17)$$

بالنسبة للتيار المتناوب AC (Alternating Current) فإن الاستطاعة الحرارية المنتشرة في المقاومة R نتيجة مرور تيار متناوب خلال زمن يساوي دوراً كاملاً متناسباً مع متوسط الاستطاعة الآنية خلال هذا الزمن والتي تساوي :

$$P = i^2 \cdot R \quad (4 - 18)$$

متوسط هذه الاستطاعة الآنية P_{med} هي:

$$P_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot R dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot R \cdot \sin^2 \omega t dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{I_m^2 \cdot R}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt \\
&= \frac{I_m^2 \cdot R}{T} \left[\frac{\omega t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right]_0^T \\
&= \frac{I_m^2 \cdot R}{T} \left[\frac{T}{2} - \frac{1}{4} \sin 2T \right] \\
P_{med} &= \frac{I_m^2 \cdot R}{T} \quad (4-18)
\end{aligned}$$

وبمساواة الاستطاعة الكهربائية الناتجة عن التيار المستمر و متوسط الاستطاعة الآنية الناتجة عن التيار المتناوب نحصل على :

$$I^2 \cdot R = \frac{I_m^2 \cdot R}{2} \quad (4-19)$$

ومنه :

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4-20)$$

تسمى قيمة التيار $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ الذي له الأثر الحراري نفسه في حالتي التيار المستمر I بالقيمة الفعالة للتيار المتناوب ويرمز له ب I_{eff} .

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m \quad (4-21)$$

وعندما يرمز للتيار المتناوب I من دون أي دليل فيقصد بذلك دائماً القيمة الفعالة للتيار . ويمكن بالطريقة نفسها حساب القيمة الفعالة للتوتر المتناوب وسوف نحصل على :

$$U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot U_m \quad (4-22)$$

أيضاً عندما يرمز للتوتر المتناوب U من دون أي دليل فيقصد بذلك دائماً القيمة الفعالة للتوتر .

ويرمز أيضاً لهذه القيمة ب $I_{r.m.s}$ (Root – Mean Square) وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$I_{r.m.s} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (4-23)$$

حيث :

Ir.m.s : الجذر التربيعي لمتوسط مربع القيمة اللحظية للتيار .

وبشكل مشابه يمكن أن نكتب بالنسبة للتوتر :

$$U_{r.m.s} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (4-24)$$

يمكن التعبير عن العلاقات المتبادلة بين القيمة الفعالة I والقيمة الوسطية I_{med} والقيمة العظمى I_m بوساطة الثوابت التالية:

عامل الذروة : وهو النسبة بين القيمة العظمى إلى القيمة الفعالة ويرمز له بالرمز K_s.

$$k_s = \frac{I_m}{I} \quad (4-25)$$

عامل الشكل : وهو النسبة بين القيمة الفعالة إلى القيمة الوسطية ويرمز له بالرمز K_k.

$$k_k = \frac{I}{I_{med}} \quad (4-26)$$

بالنسبة للتيار المتناوب فإن قيمة عامل الذروة:

$$k_s = \sqrt{2} = 1,41 \quad (4-27)$$

وقيمة عامل الشكل :

$$k_k = \frac{2}{\pi} = 1,11 \quad (4-28)$$

4 - 6 - التمثيل الشعاعي للتوترات المتناوبة :

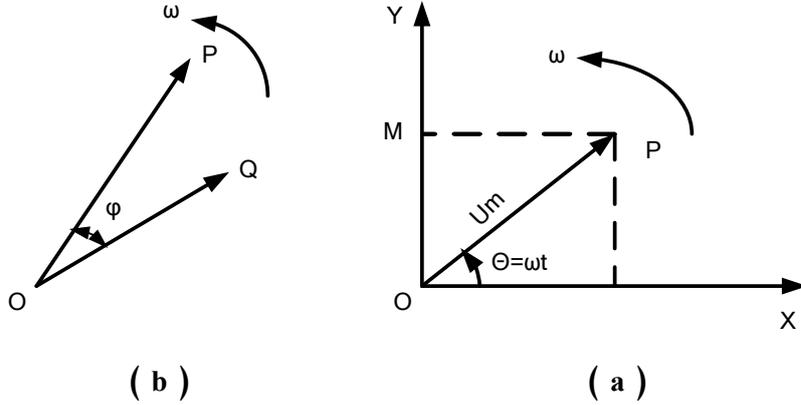
Vector Representation of Alternating Voltages

ليكن لدينا الشعاع OP ويدور بسرعة زاوية ω الشكل (4-5-a) إذا فرضنا أن طول الشعاع OP يساوي القيمة العظمى للتوتر U_m . ففي كل لحظة يكون مسقط هذا الشعاع على المحور OY ممثلاً القيمة اللحظية لهذا التوتر (حيث أخذنا مبدأ قياس الزوايا المحور OX) ويمكن أن نكتب [15] :

$$OM = OP \sin \omega t \quad (4 - 29)$$

أو

$$u = U_m \sin \omega t \quad (4 - 30)$$



الشكل (4 - 5)

a - الشعاع OP ويدور بسرعة زاوية ω

b - زاوية فرق الطور بين شعاعين

وبصورة عامة فإنه يمكن تمثيل أي مقدار متناوب لشعاع يدور بسرعة زاوية تساوي السرعة الزاوية لهذا المقدار المتناوب ، وطول الشعاع يمثل القيمة العظمى له ، ومسقط هذا الشعاع على محور ثابت يمثل القيمة الآنية لهذا المقدار .

إذا كان لدينا مقداران متناوبان ممثلان في لحظة ما بالشعاعين OP و OQ الشكل (4-5-b) ويدوران بالسرعة الزاوية نفسها ω ولكنهما مختلفان بالطول .

تسمى الزاوية ϕ بين هذين الشعاعين زاوية فرق الطور .

وبالنظر إلى الشكل نلاحظ أن الشعاع OP متقدم بالطور بالنسبة للشعاع OQ أو نقول أيضاً أن الشعاع OQ متأخر بالطور بالنسبة للشعاع OP .
إذا كان هذان الشعاعان يمثلان توترين متناوبين فيمكن أن نعبر عن القيمة اللحظية لكل منهما بالعلاقتين :

$$\begin{aligned} u_1 &= OP \sin \omega t \\ u_2 &= OQ \sin(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (4 - 31)$$

أو بالشكل :

$$\begin{aligned} u_1 &= OP \sin(\omega t + \varphi) \\ u_2 &= OQ \sin \omega t \end{aligned} \quad (4 - 32)$$

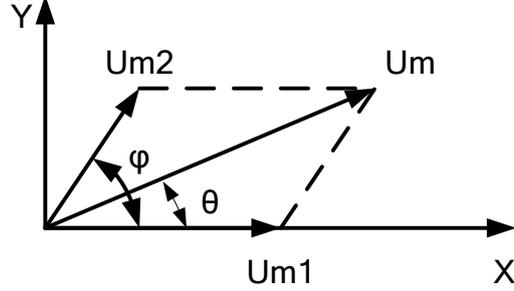
إذا كان لدينا عدة توترات متناوبة ممثلة بأشعة ذات فروق طور معينة وهذه التوترات مطبقة على دارة ما. فإن الأثر الناتج عن هذه التوترات يساوي مجموع الأثر الناتج عن كل منهما أو يساوي أثر الشعاع المحصل لمجموعة الأشعة ، وللحصول على شعاع المحصلة نطبق قوانين الجمع الشعاعي.

4 - 7 - جمع التيارات والتوترات الجيبية

Adding of Sinusoidal Voltages and Current

في التيارات المتناوبة غالباً ما نحتاج إلى جمع حركات جيبيه لها الدور نفسه ولكنها مختلفة بالطور . لهذا الغرض يمكن استخدام الطرائق التالية [15] :

- 1 - طريقة جمع المقادير ممثلة بتتابع مثلثية.
 - 2 - طريقة جمع المقادير ممثلة بأشعة أي استخدام الجمع الشعاعي البياني.
 - 3 - طريقة جمع المقادير ممثلة بأعداد مركبة.
- فإذا كان لدينا منبعان للتوتر موصولان على التسلسل ويعملان على الدارة نفسها فإنه يمكن حساب مجموعهما باستخدام التمثيل الشعاعي لهما كما في الشكل (4-6)



الشكل (4 - 6) الجمع الشعاعي باستخدام الجمع الشعاعي

ورياًضياً يمكن كتابة القيمة اللحظية لكل توتر بالشكل :

$$\begin{aligned} u_1 &= U_{m1} \sin \omega t \\ u_2 &= U_{m2} \sin (\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (4 - 33)$$

طول شعاع المحصلة ، وبالرجوع إلى القوانين المناسبة ، نجد أنه يساوي :

$$U_m = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot \cos \varphi} \quad (4 - 34)$$

والقيمة الفعالة للمحصلة :

$$U = 0.707 U_m \quad (4 - 35)$$

أما القيمة اللحظية للمحصلة :

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u \\ &= U_{m1} \sin \omega t + U_{m2} \sin (\omega t + \varphi) \\ &= U_{m1} \sin \omega t + U_{m2} (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) \\ &= (U_{m1} + U_{m2} \cos \varphi) \sin \omega t + U_{m2} \sin \varphi \cos \omega t \end{aligned} \quad (4 - 36)$$

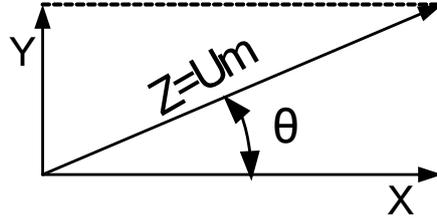
هذه العلاقة الأخيرة ترينا أنه يمكن تمثيل القيمة اللحظية للمحصلة على أنها مجموع

القيمة اللحظية لشعاعين متعامدين مع بعضهما ، الشكل (4 - 7) ، طول الشعاع الأول

يساوي

($U_{m1} + U_{m2} \cos \varphi$) وطول الشعاع الثاني $U_{m2} \sin \varphi$. فإذا فرضنا :

$$\begin{aligned} X &= U_{m1} + U_{m2} \cos \varphi \\ Y &= U_{m2} \sin \varphi \end{aligned} \quad (4 - 37)$$



الشكل (4-7) القيمة اللحظية للمحصلة

نجد من الشكل أن المحصلة U تساوي :

$$U = X \sin \omega t + Y \cos \omega t \quad (4-38)$$

وبما أن :

$$\cos \omega t = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4-39)$$

نحصل على :

$$U = X \sin \omega t + Y \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (4-40)$$

ومن الشكل يكون مطال شعاع المحصلة Z يساوي :

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (4-41)$$

حيث :

$$X = Z \cos \theta$$

$$Y = Z \sin \theta \quad (4-42)$$

وهكذا فإن القيمة العظمى لمحصلة هذين المنبعين تساوي :

$$Z = U_m = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$= \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2 \cdot U_{m1} \cdot U_{m2} \cdot \cos \varphi} \quad (4-43)$$

وهذه المحصلة متقدمة بالطور بالنسبة لـ U_1 بزاوية θ تساوي :

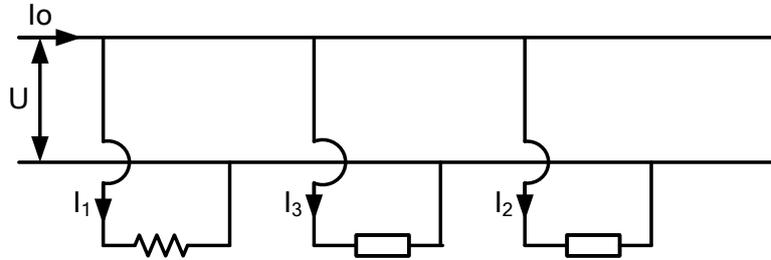
$$\theta = \tan^{-1} \frac{U_{m2} \sin \varphi}{U_{m1} + U_{m2} \cos \varphi} \quad (4-44)$$

بالطريقة نفسها يمكن جمع التيارات المتناوبة بعد تمثيلها بأشعة بعد الأخذ بعين الاعتبار زوايا فروق الطور فيما بينها أو أطوارها بالنسبة لمرجع معين.

مثال - 2 :

خط توزيع قدرة يغذي على التوازي ، الشكل (8 - 4) ، الحملات التالية :

- 1 - مقاومة تسخين بتيار قدرة $15[A]$ متفق بالطور مع توتر الخط.
 - 2 - محرك تحريضي بتيار قدرة $30[A]$ متأخر عن توتر الخط بزاوية 35° .
 - 3 - محرك توافق بتيار قدرة $20[A]$ متقدم على توتر الخط بزاوية 30° .
- احسب تيار الخط الكلي I_0 في خط التغذية وزاويته بالنسبة لتوتر الخط .



الشكل (8 - 4)

الحل:

بما أن التوتر مشترك بين التيارات الثلاثة فإنه يتخذ مرجعاً في الرسم الشعاعي المبين في الشكل (4-9) حيث :

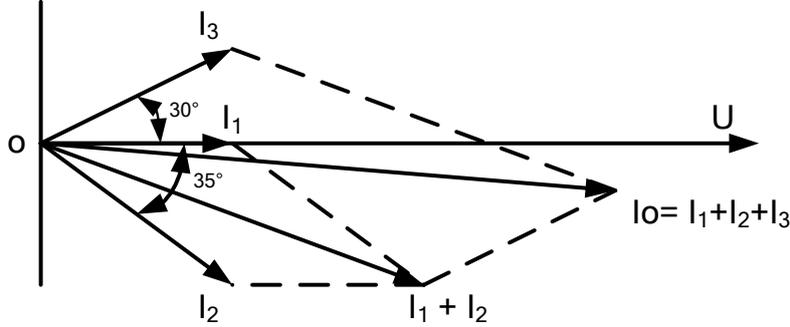
$$I_1 = 15 [A] \text{ متفق بالطور مع } U$$

$$I_2 = 30 [A] \text{ متأخر بالطور عن } U \text{ بزاوية } 35^\circ$$

$$I_3 = 20 [A] \text{ متقدم بالطور عن } U \text{ بزاوية } 30^\circ$$

وبرسم الأشعة الممثلة للتيارات بمقياس رسم مناسب نحصل على التيار الكلي I_0 بجمع الأشعة الثلاثة شعاعياً.

نحصل رياضياً بإسقاط هذه الأشعة على محورين متعامدين أحدهما منطبق على OU والآخر عمودي عليه كما يلي :



الشكل (4-9)

مجموع المركبات الأفقية على OU هو :

$$15 \cos 0^\circ + 30 \cos(-35^\circ) + 20 \cos 30^\circ = 56,9$$

مجموع المركبات الشاقولية على OU هو :

$$15 \sin 0^\circ + 30 \sin(-35^\circ) + 20 \sin 30^\circ = -7,21$$

وبالتالي تكون قيمة محصلة التيار الكلي I_0 تساوي :

$$I_0 = \sqrt{56,9^2 + 7,21^2} = 57,35[A]$$

وزاوية بالنسبة للتوتر U تساوي :

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{-7,21}{56,9} = -7,2^\circ$$

أي أن التيار الكلي I_0 متأخر عن التوتر ب $7,2^\circ$.

4 - 8 - دارات التيار المتناوب أحادية الطور:

Single Phase Alternating Current Circuits

تتألف الدارة الكهربائية من عناصر لا تعرف بكميات ثابتة، بل تتغير قيمتها مع تغير التيار الذي يمر خلالها ، إلا أن هذا التغير في الحالات العادية يكون صغيراً جداً ويمكن إهماله، وبالتالي يمكن القبول بأن عناصر الدارات هذه هي كميات ثابتة ومستقلة عن الزمن وفي هذه الحالة تسمى الدارة بالدارة الكهربائية الخطية Linear Circuit ، بينما في الحالة التي لا يمكن إهمال هذا التغير تسمى الدارة غير الخطية Non-linear Circuit.

4 - 8 - 1 - دائرة ذات مقاومة بحتة :

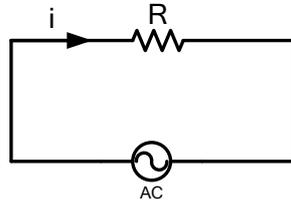
الشكل (4-10) يبين دائرة ذات مقاومة بحتة في هذه الحالة نفترض بأنه من خلال

المقاومة البحتة يمر تيار من الشكل [11] :

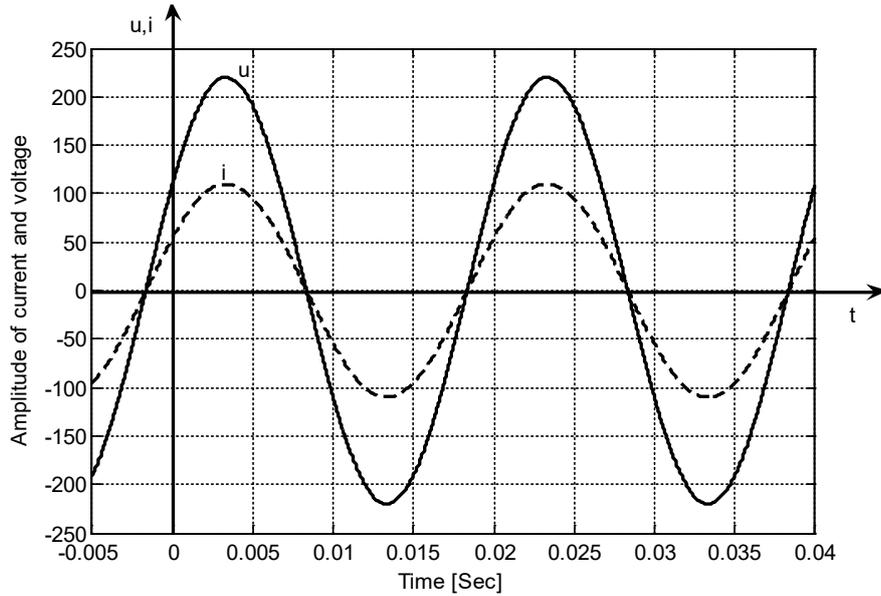
$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i) \quad (4 - 45)$$

حيث :

ψ_i : زاوية الطور الأولي (الابتدائي) للتيار كما هو مبين في الشكل (4-10-a) .



الشكل (4 - 10) دائرة ذات مقاومة بحتة



الشكل (4 - 10 - a) منحنى التيار والتوتر في دائرة مكونة من مقاومة

$$\text{بحتة حيث : } \psi_i = \psi_u = \pi / 6$$

المقاومة R يمكن أن تمثل المقاومة المكافئة لدائرة تتألف من عدة مقاومات بحتة .

التوتر الهابط على هذه المقاومة ، حسب قانون أوم :

$$u_R = R i$$

$$u_R = R \cdot I_m \sin (\omega t + \psi_i) \quad (4 - 46)$$

نلاحظ من معادلة التوتر بأنها معادلة جيبية أيضاً السرعة الزاوية نفسها.

في الحالة العامة منحني التوتر يعطى على الشكل التالي :

$$u_R = U_m \sin (\omega t + \psi_u) \quad (4 - 47)$$

وبمقارنة المعادلتين (4 - 46) و (4 - 47) نجد أن :

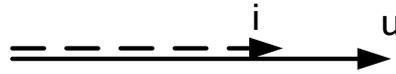
$$U_{Rm} = R \cdot I_m \quad (4 - 48)$$

$$\Psi_u = \Psi_i$$

وبتقسيم طرفي المعادلة (4 - 48) على $\sqrt{2}$ نحصل على القيمة الفعالة :

$$U = R \cdot I \quad (4 - 49)$$

نلاحظ من معادلتى التيار والتوتر أن التوتر متفق بالطور على التيار أو بعبارة أخرى فإن زاوية فرق الطور بين التوتر الهابط على مقاومة والناجم عن مرور تيار متناوب فيها يساوي الصفر. هذا يعني أن شعاع التيار منطبق على شعاع التوتر كما هو مبين في الشكل (4 - 11) .

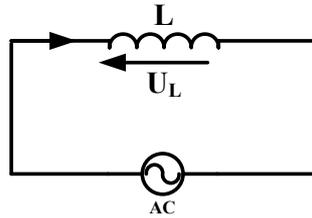


الشكل (4 - 11) مخطط شعاعي نوعي للتيار والتوتر

4 - 8 - 2 - دائرة تحريضية بحتة (ملف صرف) :

في هذه الحالة يطبق توتر متناوب U على ملف صرف ممثّل بتحريضه الذاتي L الشكل

(4-12) [11] :



الشكل (4 - 12) دائرة مكونة من ملف صرف

الدارة التحريضية المبينة لا تحتوي على أي مقاومة أو سعة (فرض أن المقاومة المادية لسلك الملف تساوي الصفر).

إذا كان التيار الكهربائي المار في الملف الصفر من الشكل :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (4 - 50)$$

فإن التوتر الهابط على هذا الملف هو التوتر المتولد عن التحرض الذاتي له (e_L) والذي يساوي ويعاكس التوتر المسبب له U وبالتالي يمكن أن نكتب :

$$u_L = -e_L = -\left(-L \frac{di}{dt}\right) = L \frac{di}{dt} \quad (4 - 51)$$

$$u_L = L \frac{d}{dt} I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$u_L = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i)$$

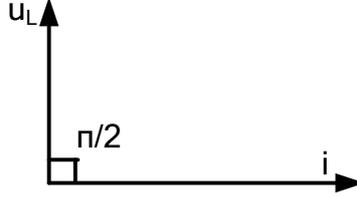
$$u_L = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4 - 52)$$

نلاحظ من العلاقة السابقة أن للمقدار ωL عملاً يشبه عمل المقاومة R في التيار المستمر ويسمى بالمفاعلة التحريضية ويرمز له بالرمز X_L ويقاس بوحدة قياس المقاومة نفسها وهي الأوم (Ω).

إذن يمكن أن نكتب :

$$X_L = \omega L = 2 \pi f L \quad (4 - 53)$$

كما نلاحظ أيضاً من العلاقة السابقة وبالمقارنة مع علاقة التيار المار في الملف أن التوتر يتقدم على التيار بزاوية قدرها $\pi / 2$ راديان أو 90° . أو بعبارة أخرى فإن التيار المار في الملف يتأخر عن التوتر بزاوية تساوي $\pi / 2$ راديان.



الشكل (4 - 13) مخطط شعاعي للتيار والتوتر في دارة مكونة من ملف بحت

وبمقارنة العلاقة (4 - 52) مع الشكل العام للتوتر :

$$u_L = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

نجد أن :

$$U_{Lm} = X_L \cdot I_m = \omega L \cdot I_m \quad (4 - 53)$$

وبتقسيم طرفي المعادلة على $\sqrt{2}$ نحصل على القيمة الفعالة :

$$U_L = X_L \cdot I = \omega L \cdot I \quad (4 - 54)$$

ونجد أيضاً بالمقارنة أن :

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2} \quad (4 - 55)$$

وباختصار يمكن كتابة علاقة التوتر والتيار بأحد الشكلين التاليين:

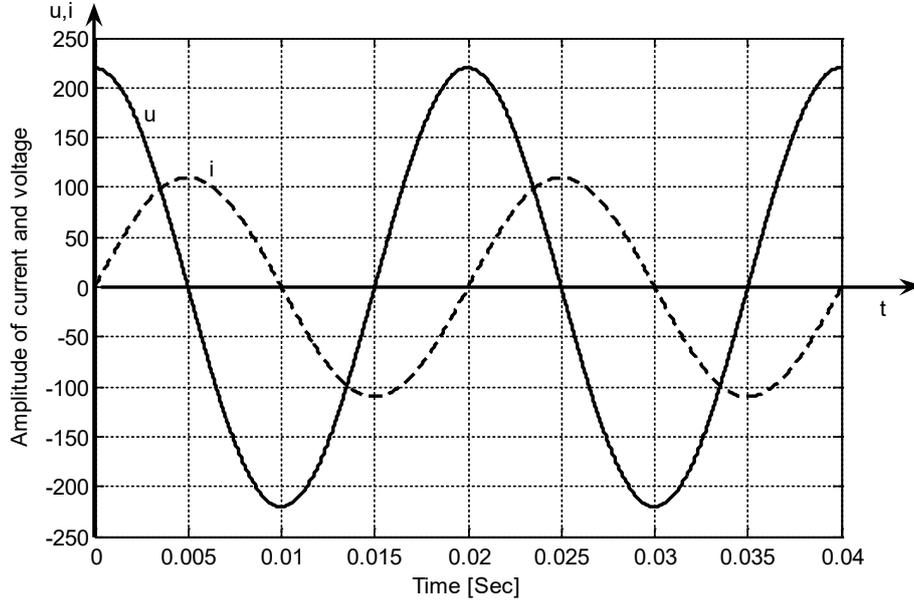
$$u_L = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i = I_m \sin(\omega t) \quad (4 - 56)$$

أو بالشكل :

$$u_L = U_m \sin(\omega t)$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4 - 57)$$



الشكل (4-14) منحنيات التيار والتوتر في دائرة مكونة من ملف

صرف حيث $\psi_u = 90^\circ$ و $\psi_i = 0^\circ$

4 - 8 - 3 - دائرة سعوية بحتة (مكثف صرف) :

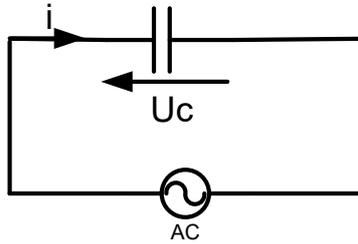
على الشكل (4-15) مبين دائرة تيار متناوب تحتوي على سعة صرفة (مثالية) عند

مرور من خلالها تيار متناوب جيبي من الشكل [11] :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (4-58)$$

فإن القيمة اللحظية للتوتر المطبق

$$u_C = \frac{q}{c} \quad \text{على السعة تحسب من العلاقة :} \quad (4-59)$$



الشكل (4-15) دائرة مكونة من مكثف صرف

عند مرور التيار المتناوب الجيبي ($i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$) تكون الشحنة الكهربائية q مساوية لمجموع الشحنة البدائية (الابتدائية) q_0 والشحنة الناتجة عن مرور التيار المتناوب الجيبي.

$$q = q_0 + \int_0^t i \cdot dt = q_0 + \int_0^t I_m \sin(\omega t + \psi_i) \cdot dt$$

$$q = q_0 + I_m \left[-\frac{1}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) \right]_0^t$$

$$q = \left(q_0 + \frac{I_m}{\omega} \cos \psi_i \right) - \frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) \quad (4 - 60)$$

نفرض أن الشحنة الابتدائية (في لحظة مرور التيار) $q_0 = -\frac{I_m}{\omega} \cos \psi_i$ في هذه الحالة معادلة التوتر المطبق على السعة تكون :

$$u_C = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) \quad (4 - 61)$$

$$= \frac{1}{\omega C} I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right)$$

الفرضية بأن $q_0 = -\frac{I_m}{\omega} \cos \psi_i$ غير ضروري وهام عند دراسة الحالة المستقرة للمنحني ، حيث لا تؤثر فيها الشحنة الابتدائية. (الشحنة الابتدائية فيها تكون بدون تأثير) .

بمقارنة المعادلة (4 - 61) مع الشكل العام للتوتر :

$$u_C = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (4 - 62)$$

نجد:

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m = X_C \cdot I_m \quad (4 - 63)$$

وبتقسيم طرفي المعادلة (4 - 63) على $\sqrt{2}$ نحصل على القيمة الفعالة :

$$U_C = \frac{1}{\omega C} \cdot I = X_C \cdot I \quad (4 - 64)$$

ونجد أيضاً :

$$\psi_u = \psi_i - \frac{\pi}{2} = \psi_i - 90^\circ \quad (4 - 65)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

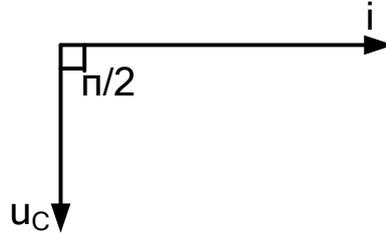
القيمة التي ظهرت في العلاقات السابقة وهي :

(4 - 66)

تسمى بالمفاعلة السعوية ويرمز لها ب X_C وتقاس بوحدة قياس المقاومة نفسها وهي الأوم $[\Omega]$.

كما نلاحظ من علاقة التيار وبالمقارنة مع علاقة التوتر المطبق على طرفي المكثف أن التيار يتقدم على التوتر بزواوية تساوي $\pi/2$ راديان أو 90° والقيمة العظمى للتيار :

$$I_m = \omega C \cdot U_{Cm} = \frac{U_{Cm}}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_{Cm}}{X_C} \quad (4 - 67)$$



الشكل (4 - 16) مخطط شعاعي للتيار والتوتر دارة مكونة من مكثف صرف

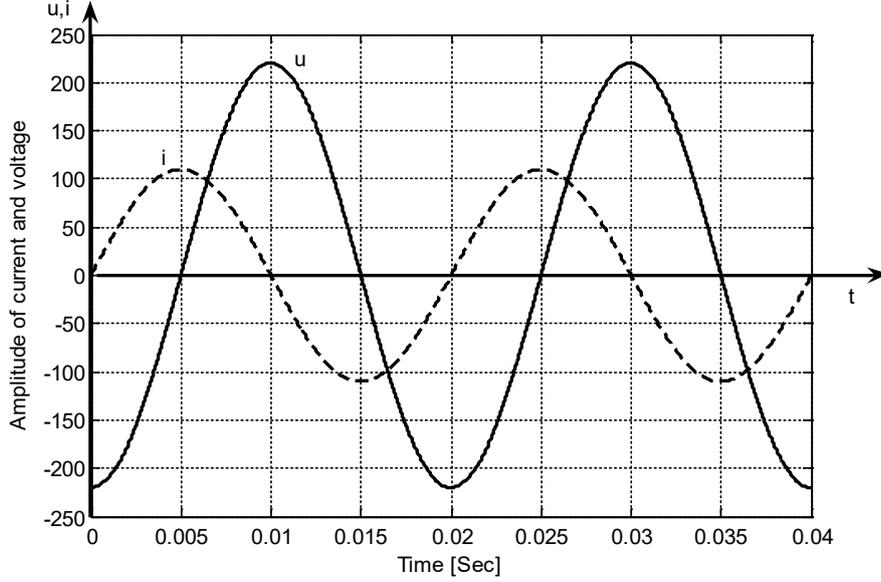
وباختصار يمكن كتابة علاقات التوتر والتيار بأحد الشكلين التاليين:

$$u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$i = I_m \sin(\omega t) \quad (4 - 68)$$

أو بالشكل :

$$u_C = U_{Cm} \text{Sin}(\omega t)$$

$$i = I_m \text{Sin}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$



الشكل (4 - 17) منحنيات التيار والتوتر في دارة مكونة من مكثف

صرف حيث $\psi_i = 0$ و $\psi_u = -90^\circ$

4 - 9 - استطاعة التيار المتناوب: Alternating Current Power

في دارة تيار متناوب المؤلفة من عناصر خطية كما في الشكل (4-18)، منحنيات التيار

والتوتر هي منحنيات جيبية ذات تردد واحد مع اختلاف بالطور [11] .

العلاقات العامة للتيار والتوتر هي من الشكل التالي :

$$i = I_m \text{Sin} (\omega t + \psi_i)$$

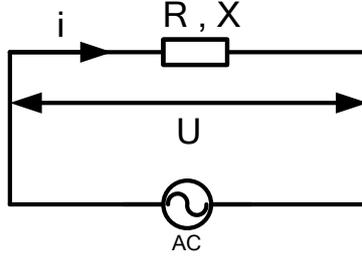
$$u = U_m \text{Sin} (\omega t + \psi_u) \quad (4 - 70)$$

$$\psi_u - \psi_i = \varphi$$

حيث :

φ : زاوية فرق الطور (بين التيار والتوتر) .

علاقة الاستطاعة في الدارة الكهربائية المبينة في الشكل :



الشكل (4 - 18) دائرة كهربائية مكونة من R و X

هي من الشكل التالي :

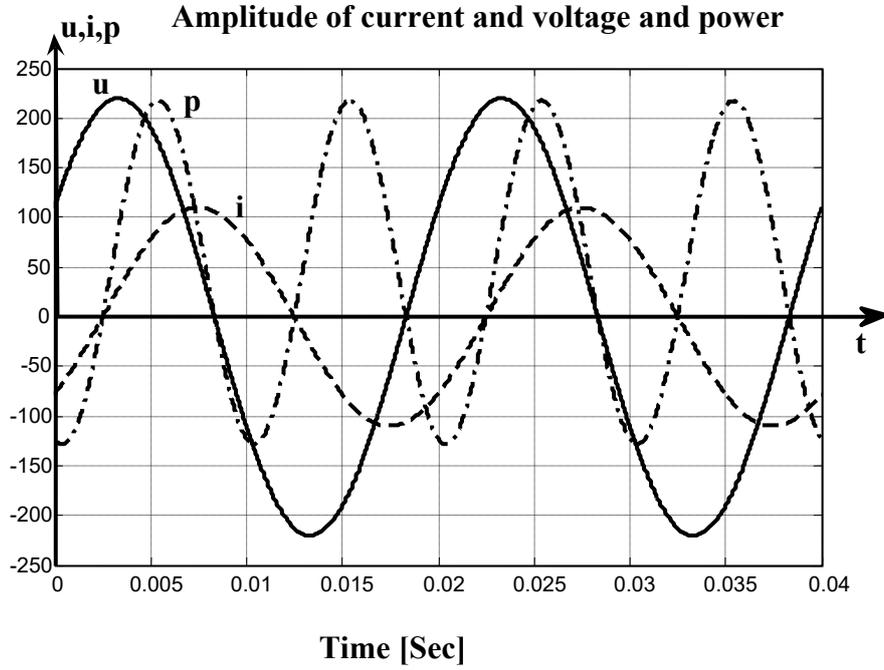
$$\begin{aligned}
 P &= u \cdot i = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \\
 &= \frac{1}{2} U_m I_m \cos(\psi_u - \psi_i) - \frac{1}{2} U_m I_m \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) \\
 &= UI \cos(\varphi) - \frac{1}{2} UI \cos(2\omega t + 2\psi_i + \varphi) \quad (4 - 71)
 \end{aligned}$$

من الواضح إذاً أن الاستطاعة اللحظية تتألف من جزء ثابت مقداره $U.I \cos \varphi$ وآخر

متغير بتردد يساوي ضعف تردد المنبع وهو $\frac{1}{2} UI \cos(2\omega t + 2\psi_i + \varphi)$

والقيمة المتوسطة للاستطاعة تساوي فقط الجزء الثابت لأن القيمة المتوسطة للجزء

المتغير تساوي الصفر .



الشكل (4 - 19) منحنيات التيار والتوتر والاستطاعة الحظية كتابع للزمن

4-9-1- الاستطاعة المستجرة من خلال العناصر المثالية C , L , R عند التيار

المتناوب :

4 - 9 - 1 - 1 - الاستطاعة المستهلكة في دارة مكونة من مقاومة بحتة (مثالية):

بفرض أن زاوية طور التيار والتوتر تساوي للصفر أي $\psi_i = 0$ و $\psi_u = 0$ (منحنيات التيار والتوتر تنطلق من مبدأ الإحداثيات) وقد وجدنا أن التوتر الهابط على المقاومة المثالية متفق بالطور مع التيار المار في المقاومة وبالتعويض في علاقة الاستطاعة اللحظية ، $\psi_i = 0$ ، $U = U_R$ ، و $\varphi = 0$ نحصل على :

$$P = UI - \frac{1}{2} UI \cos(2\omega t) \quad (4-72)$$

القيمة المتوسطة للاستطاعة تساوي فقط الجزء الثابت لأن القيمة المتوسطة للجزء المتغير بضعف تردد المنبع يساوي الصفر . أي :

$$P = U \cdot I \quad (4 - 73)$$

ويمكن كتابة علاقة الاستطاعة كما في التيار المستمر بشكل آخر كما يلي :

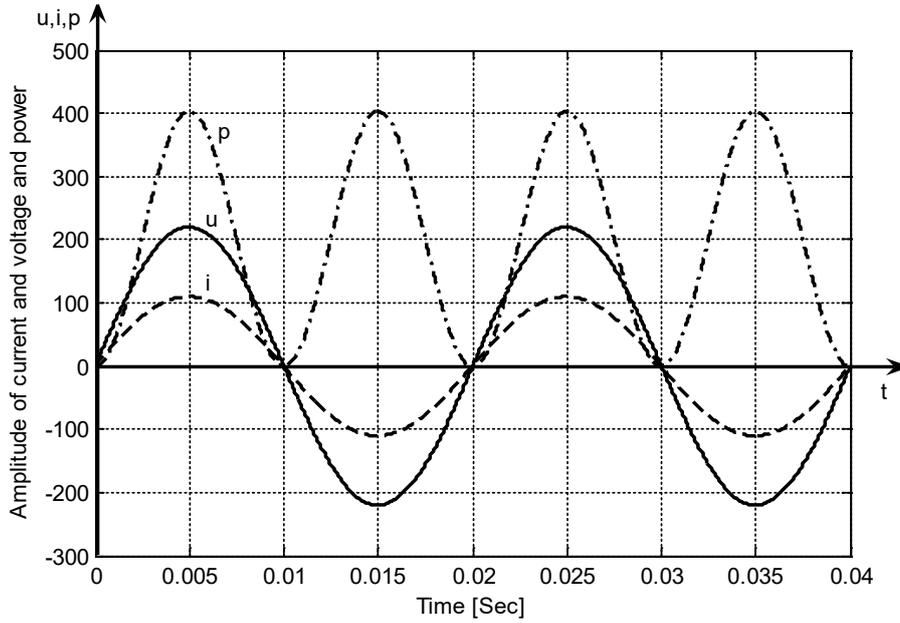
$$P = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R \quad (4 - 74)$$

أو

$$P = U \cdot \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R} \quad (4 - 75)$$

أي أن :

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \quad (4 - 76)$$



الشكل (4 - 20) منحنيات التيار والتوتر والاستطاعة الحظية في

دائرة مقاومة مثالية كتابع للزمن

4 - 9 - 1 - 2 - الاستطاعة المستهلكة في دارة مكونة من ملف مثالي :

بفرض أن زاوية الطور الابتدائية للتيار تساوي الصفر $\psi_i = 0$ والأخذ بعين الاعتبار أن زاوية فرق الطور (زاوية فرق الصفحة) بين التيار والتوتر $\varphi = \psi_u - \psi_i = 90^\circ$ والتوتر U نحصل من علاقة الاستطاعة اللحظية على :

$$P = U_L \cdot I \sin 2\omega t \quad (4 - 77)$$

وهي تابع دوري بتردد يساوي ضعف تردد المنبع . وبالتالي فإن الاستطاعة المتوسطة المستهلكة في دارة تحريضية مثالية تساوي الصفر (حيث أن تكامل تابع الجيب في حدود الدور تساوي الصفر). أي أن الملف لا يستهلك أية استطاعة فعالة . وبعبارة أخرى فإن الاستطاعة التي يأخذها الملف خلال ربع الدور الأول من المنبع ، والتي تختزن في الملف على شكل طاقة كهرومغناطيسية ، يعود ليعطيها للمنبع خلال الربع الثاني من الدور

ويمكن حساب الطاقة المختزنة w خلال زمن يساوي ربع الدور كما يلي :

$$\begin{aligned} W_{L1} &= \int_0^{\frac{T}{4}} P dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{4}} U_L I \sin 2\omega t dt \\ &= \int_0^{\frac{T}{4}} U_L \cdot I \cdot \frac{1}{2\omega} [-\cos 2\omega t]_0^{\frac{T}{4}} \\ &= \frac{U_L \cdot I}{\omega} \end{aligned}$$

وبتعويض $U_L = X_L \cdot I = \omega L \cdot I$ نحصل على :

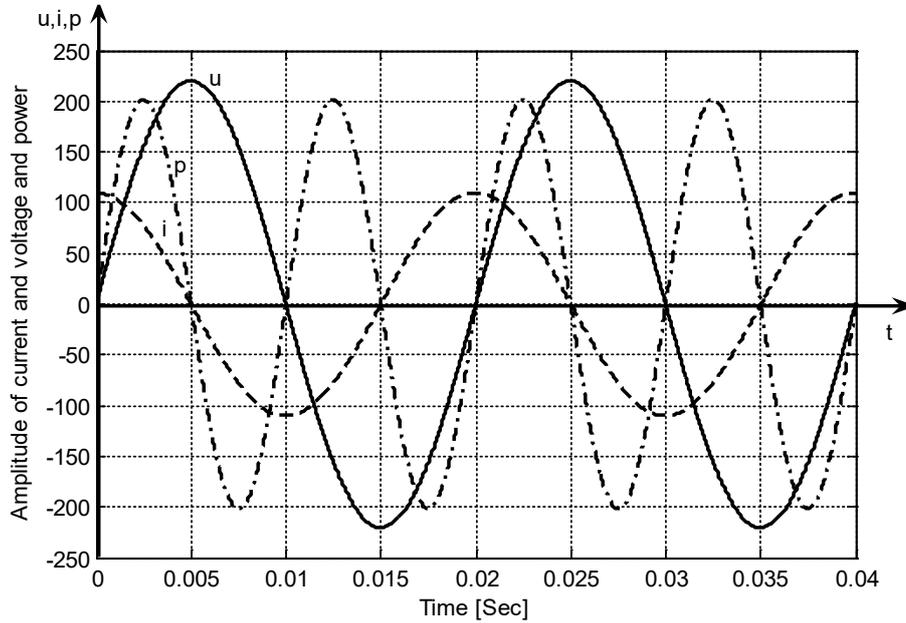
$$\begin{aligned} W_{L1} &= L \cdot I^2 \\ &= \frac{1}{2} L \cdot I_m^2 \end{aligned}$$

(4 - 78)

$$W_{L2} = \frac{T}{2} \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} U_L \cdot I \cdot \sin 2\omega t dt = -\frac{U_L \cdot I}{\omega} = -W_{L1}$$

يعيد الملف الطاقة الكهرومغناطيسية في الربع الثاني إلى الشبكة (المنبع) :

(4 - 80)



الشكل (4 - 21) منحنيات التيار والتوتر والاستطاعة الحظية في

دائرة ملف مثالي كتابع للزمن ($\psi_u = 0$)

4 - 9 - 1 - 3 - الاستطاعة المستهلكة في دائرة مكونة من مكثف مثالي :

بفرض أن زاوية الطور الابتدائية للتيار تساوي الصفر $\psi_i = 0$ والأخذ بعين الاعتبار أن زاوية فرق الطور (زاوية فرق الصفحة) بين التيار والتوتر $\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ$ والتوتر

$U = U_C$ نحصل من علاقة الاستطاعة اللحظية على :

$$P = -U_C \cdot I \sin 2\omega t \quad (4 - 81)$$

وهي تابع دوري بتردد يساوي ضعف تردد المنبع . وبالتالي فإن الاستطاعة المتوسطة المستهلكة في دارة سعوية مثالية تساوي الصفر (حيث أن تكامل تابع الجيب في حدود الدور تساوي إلى الصفر). أي أن المكثف لا يستهلك أية استطاعة فعالة . وبعبارة أخرى فإن الاستطاعة التي يأخذها المكثف خلال ربع الأول من المنبع ، والتي تختزن في المكثف على شكل طاقة كهربائية ، يعود ليعطيها للمنبع خلال الربع التالي من الدور .

ويمكن حساب الطاقة المختزنة w خلال زمن يساوي ربع الدور كما يلي :

$$W_{C1} = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} P dt$$

$$W_{C1} = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} U_C \cdot I \cdot \sin 2\omega t dt$$

$$= U_C \cdot I \cdot \frac{1}{2\omega} [-\cos 2\omega t]_0^{\frac{T}{4}}$$

$$= \frac{U_C \cdot I}{\omega}$$

(4 - 82)

وبتعويض $I = \omega C \cdot U_C$ نحصل على :

$$W_{C1} = C \cdot U_C^2$$

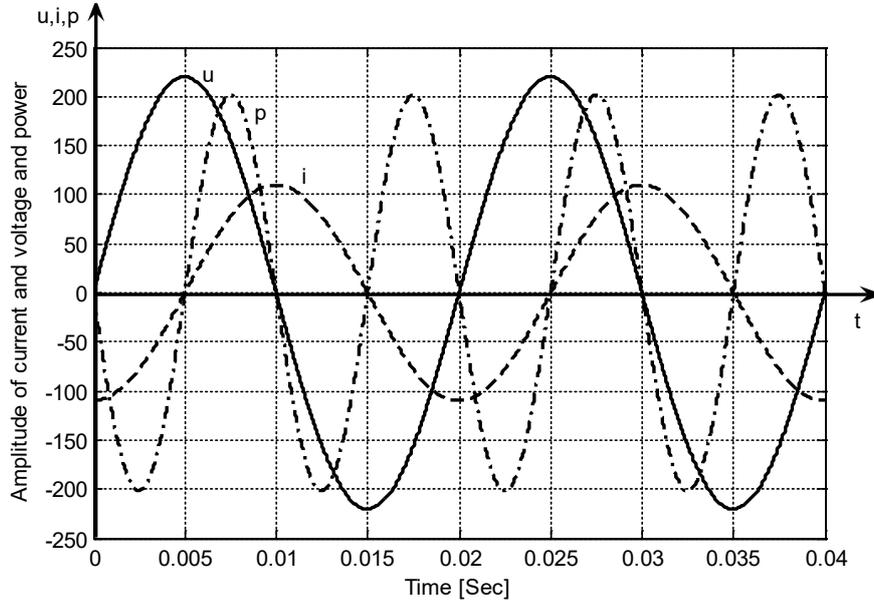
$$= \frac{1}{2} C \cdot U_{Cm}^2$$

(4 - 83)

الطاقة نفسها يعيدها المكثف المثالي إلى المنبع في ربع الدور التالي :

$$W_{C2} = - \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} U_C \cdot I \cdot \sin 2\omega t dt = - \frac{U_C \cdot I}{\omega} = -W_{C1} \quad (4-84)$$

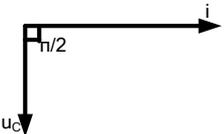
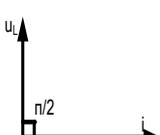
كمية الطاقة المستهلكة والمعادة من وإلى المنبع متساوية خلال نصف الدور

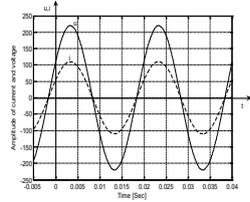
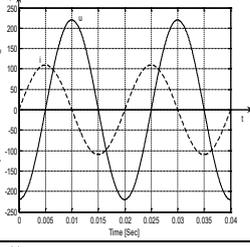
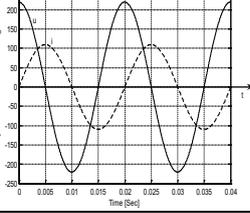


الشكل (4-22) منحنيات التيار والتوتر والاستطاعة الحظية في

دائرة مكثف مثالي كتابع للزمن ($\psi_u = 0$)

الجدول رقم (1)

المخطط الشعاعي	الاستطاعة	
	$p = U_m \cdot I_m \cdot \sin^2 \omega t$ $= U \cdot I - U \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega t)$ $= U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$	<p>منحني الاستطاعة دائماً فوق محور السينات وهذا يعني أن الاستطاعة دائماً موجبة وذات اتجاه واحد</p>
	$P = -\frac{U \cdot I}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$ $P = 0$	<p>القيمة الوسطية للاستطاعة تساوي الصفر (المكثف ينشحن في ربع دور ويفرغ بالربع التالي) وبالتالي الاستطاعة المستهلكة تساوي الصفر</p>
	$P = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \sin(2 \cdot \omega t)$ $P = 0$	<p>القيمة الوسطية للاستطاعة تساوي الصفر أي أن الاستطاعة الفعلية المستهلكة في حمل تحريضي بحيث تساوي الصفر دائماً</p>

الدارة	الممانعة الكلية	العلاقة بين التوتر والتيار	فرق الصفحة	التمثيل الزمني
مقاومة أومية بحتة	$Z = R$ $X = 0$	$U = I.R$	$\varphi = 0$	
سعة بحتة	$X_C = \frac{1}{\omega.C}$ $R = 0$	$U = I.\frac{1}{\omega.C}$	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$	
محاوضة بحتة	$R = 0$ $X_L = \omega.L$	$U = I.\omega.L$	$\varphi = +\frac{\pi}{2}$	

مثال 3

من خلال مقاومة $R = 20 [\Omega]$ يمر تيار جيبي قيمته الفعالة $I = 11 [A]$ عند تردد $f = 50 [Hz]$. حدد معادلة منحنى التوتر عندما تكون زاوية طور التيار $\psi_i = 30^\circ$ والقيمة الفعالة للتوتر الهابط على المقاومة.

الحل :

$$\omega = 2\pi f = 2.\pi.50 = 314 \text{ rad/sec}$$

$$I_m = I \cdot \sqrt{2}$$

$$i = 11\sqrt{2} \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$u_R = R \cdot i$$

$$= 220 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(314t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$U_R = R \cdot I = 220[V]$$

مثال 4

من خلال ملف مثالي ذي تحريض $L = 0.1 \text{ H}$ يمر تيار جيبى قيمته الفعالة $I = 5 \text{ A}$ بتردد $f = 50 \text{ Hz}$. حدد معادلة منحنى التوتر عندما يكون زاوية طور التيار $\psi_i = 30^\circ$ والقيمة الفعالة للتوتر الهابط على الملف .

الحل :

المفاعلة التحريضية للملف :

$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,1 = 31,4 [\Omega]$$

التوتر الفعال على الملف :

$$U_L = X_L \cdot I = 31,4 \cdot 5 = 157 [V]$$

منحنى التوتر في الملف :

$$\begin{aligned} u_L &= \omega L \cdot I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 157\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

مثال 5

مع منبع توتر ذي توتر $u = 220\sqrt{2} \sin(\omega t - 60)$ تم وصل مكثف ذي سعة ذاتية $C = 40 \mu\text{F}$. حدد القيمة الفعالة ومعادلة منحنى التيار المار من المكثف ، إذا كان $f = 60 \text{ Hz}$

الحل :

المفاعلة السعوية :

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 40 \cdot 10^{-6}} = 66,3 [\Omega]$$

القيمة الفعالة للتيار :

$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{220}{66,3} = 3,32 [\text{A}]$$

منحني التيار عند

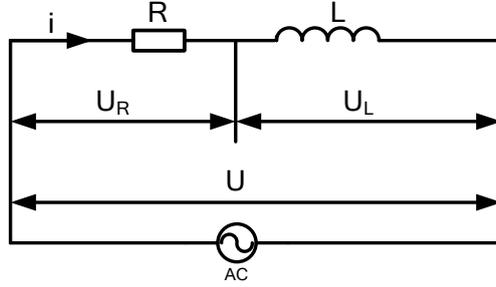
$$\begin{aligned}\psi_i &= \psi_u + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \\ i &= 3,32\sqrt{2} \cdot \text{Sin}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 3,32\sqrt{2} \cdot \text{Sin}\left(377t + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

4 - 10 - دارات التيار المتناوب المكونة عدة عناصر مربوطة على التسلسل:

4 - 10 - 1 - دارة مكونة من مقاومة وملف على التسلسل :

التوتر اللحظي على طرفي أي دارة تسلسلية مؤلفة من عدة عناصر هو مجموع هبوطات التوتر على طرفي كل عنصر.

إذا كانت لدينا دارة مؤلفة من مقاومة مثالية (بحتة) R وملف مثالي ذي تحريض ذاتي L . كما هو مبين في الشكل (4-23) [11] :



الشكل (4-23) دائرة مكونة من مقاومة وملف على التسلسل

إذا كان التيار المار هو تيار جيبي من الشكل :

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad (4-85)$$

فالتوتر اللحظي على طرفي الدارة (طرفي المقاومة والملف) يكون مساوياً إلى مجموع

التوترات اللحظية على طرفي كل عنصر من عناصر الدارة :

$$u = u_R + u_L$$

$$u = R I_m \sin(\omega t + \psi_i) + \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) \quad (4-86)$$

وبإخراج القيمة $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I_m$ خارج القوس نجد :

$$u = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I_m \left[\begin{array}{l} \sin(\omega t + \psi_i) \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} + \\ \cos(\omega t + \psi_i) \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \end{array} \right] \quad (4-87)$$

وبما أن :

$$\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right)^2 + \left(\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right)^2 = 1 \quad (4-88)$$

إذاً واحد من هذه القيم يمكن اعتباره \cos والآخر \sin أي :

$$\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right) = \cos \varphi$$

$$\left(\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \right) = \sin \varphi$$

(4 - 89)

وبالتعويض في العلاقة (4 - 87) نجد :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I_m [\sin(\omega t + \psi_i) \cos + \cos(\omega t + \psi_i) \sin] \\ &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I_m [\sin(\omega t + \psi_i + \phi)] \end{aligned} \quad (4-90)$$

إذاً التوتر الكلي كما هو موضح بالمعادلة (4 - 90) له منحني جيبي بحيث يمكن بسهولة كتابة معادلة الشكل العام للتوتر الجيبي :

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad (4-91)$$

وبمقارنة العلاقات (4 -

$$U_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I_m \quad \text{و (4 - 91) نجد :}$$

$$U_m = Z \cdot I_m$$

$$\psi_u = \psi_i + \phi$$

(4 - 92)

نلاحظ أن العلاقة $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ تلعب دور المقاومة ويرمز لها بالرمز Z وتسمى

بالممانعة الكلية Total

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad \text{Impedance الدارة تيار}$$

متناوب مؤلفة من R, L

(4 - 93)

وتقاس بوحدة الأوم $[\Omega]$.

بتقسيم طرفي العلاقة (4 - 92) على $\sqrt{2}$ نحصل على القيمة الفعالة :

$$U = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot I = Z \cdot I \quad (4-94)$$

إذاً القيمة الفعالة للتوتر الهابط على طرفي دارة مؤلفة من R, L خلال مرور تيار جيبي تكون مساوية لحاصل جداء ممانعة الدارة بالقيمة الفعالة للتيار .

والقيمة العظمى للتوتر الهابط على طرفي دارة مؤلفة من R, L خلال مرور تيار جيبي تكون مساوية لحاصل جداء ممانعة الدارة بالقيمة العظمى للتيار .
وتسمى علاقة القيمة الفعالة للتوتر الكلي للدارة على القيمة الفعالة للتيار أيضاً بالممانعة الكلية للدارة المؤلفة من R, L :

$$Z = \frac{U}{I} \quad (4-95)$$

حيث :

U : التوتر الكلي للدارة .

I : التيار الكلي للدارة .

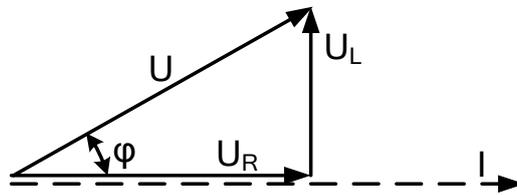
الزاوية φ التي ظهرت في العلاقات السابقة تسمى زاوية فرق الطور أو زاوية فرق الصفحة Phase Shift بين التيار والتوتر وهي الفرق بين زاوية طور التيار وزاوية طور التوتر :

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i \quad (4-96)$$

ومن العلاقة (4-52) نجد :

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (4-97)$$

منحني التيار في الدارة المؤلفة من R, L المغذى بتوتر جيبي يكون متأخراً بالنسبة لمنحني التوتر لأن $\varphi > 0$.



الشكل (4-24) مخطط شعاعي نوعي للتيار والتوترات

أما الاستطاعة المستهلكة في دارة مكونة من مقاومة وملف على التسلسل فهي على الشكل التالي :

إذا فرضنا أن التوتر اللحظي u معطى بالعلاقة :

$$u = U_m \sin \omega t \quad (4 - 98)$$

فيكون التيار اللحظي :

$$i = I_m \sin (\omega t - \varphi) \quad (4 - 99)$$

حيث :

$$I_m = \frac{U_m}{Z} \quad (4 - 100)$$

$$= \frac{U_m \cdot I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

والاستطاعة اللحظية :

$$P = u \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - \varphi) \quad (4 - 101)$$

وهي تتألف من جزأين : جزء ثابت وهو $\frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi$ وآخر متغير بتردد يساوي

$$- \frac{U_m \cdot I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi)]$$

ضعف تردد المنبع وهو : $\frac{U_m \cdot I_m}{2} [\cos(2\omega t + \varphi)]$ إذاً الاستطاعة المتوسطة P_{med} تساوي فقط متوسط الاستطاعة للجزء الثابت لأن متوسط الاستطاعة للجزء المتغير يساوي الصفر . أي :

$$P_{med} = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos \varphi = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (4 - 102)$$

حيث أن :

I, U : التوتر والتيار بالقيمة الفعالة .

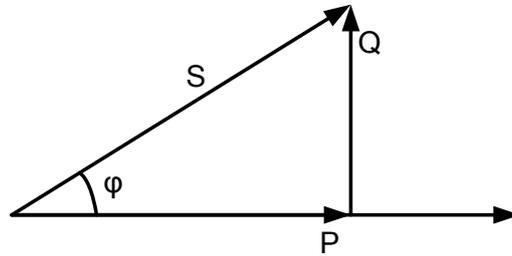
يسمى المقدار $\cos \varphi$ بعامل الاستطاعة وتسمى القيمة المتوسطة المحسوبة سابقاً بالاستطاعة الفعالة وتقاس بوحدة الواط [W] وسوف يرمز لها بالرمز P بدون أي دليل

. وهناك نوعان آخران للاستطاعة يسمى أحدهما بالاستطاعة الردية والثاني الاستطاعة الظاهرية .

وبالعودة إلى الشكل (4-24) نلاحظ أن القيمة $U \cos \varphi$ تمثل التوتر الهابط على المقاومة R وهو متفق بالطور (الصفحة) مع التيار وهذا يؤكد بأن الاستطاعة الفعالة المستهلكة في الدارة هي فقط الاستطاعة الفعالة المستهلكة في المقاومة المادية البحتة للدارة وتساوي جداء التوتر الهابط عليها بالتيار المار فيها أو جداء المقاومة بمربع التيار المار فيها .

كما نلاحظ من الشكل نفسه أن القيمة $U \sin \varphi$ تمثل التوتر الهابط على المفاعلة التحريضية X_L وهو متقدم على التيار بـ $\frac{\pi}{2}$ راديان ويسمى الجداء $U.I.\sin \varphi$ بالاستطاعة الردية ويرمز له بالرمز (Q) وتقاس بوحدة (فولت - أمبير ردي) [VAr] .
ويسمى الجداء $U.I$ بالاستطاعة الظاهرية ويرمز لها بالرمز (S) وتقاس بوحدة فولت - أمبير [VA] .

ويمكن تمثيل الاستطاعات المختلفة بمثلث الاستطاعات المبين في الشكل (4 - 25)



الشكل (4 - 25) مثلث الاستطاعات

حيث :

$$S = U \cdot I$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = S \cdot \sin \varphi \quad (4 - 103)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

ويمكن الإشارة إلى أن المقاومة المادية لسلك الملف ، والتي تحسب من العلاقة $R_L = \rho \frac{L}{S}$ تُمثل عادة برمز مقاومة صرفة على التسلسل مع التحريض الذاتي لهذا الملف L ويكون تأثيره مشابهاً تماماً لأية مقاومة خارجية .

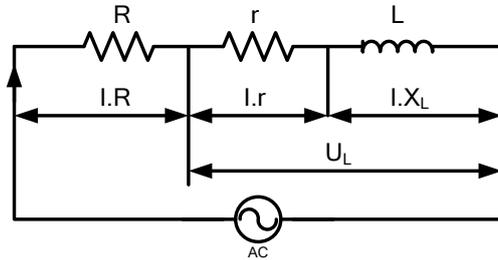
مثال 6 :

مصباح كهربائي يمكن اعتباره مقاومة بحتة يستجر تياراً شدته 10 [A] عند توتر 50 [V] المطلوب :

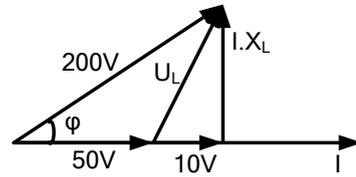
- حساب ممانعة ملف ذي مقاومة مادية $1 [\Omega]$ الواجب وصله على التسلسل مع المصباح ليعمل مع منبع توتره 220 [V] وتردده 50 [Hz] . واحسب أيضاً الاستطاعة الكلية المبذورة في الدارة وعامل الاستطاعة والاستطاعة الفعلية والردية والظاهرية .

الحل :

يمكن تمثيل المصباح مع الملف ومقاومته المادية كما في الشكل (4 - 26 - أ) :



الشكل (4 - 26 - أ)



الشكل (4 - 26 - ب) :

الشكل (4 - 26)

مقاومة المصباح R تساوي :

$$R = \frac{50}{10} = 5[\Omega]$$

ومن المخطط الشعاعي الممثل لهبوطات التوتر المبين بالشكل (4-26-b) يمكن أن نكتب:

هبوط التوتر على المقاومة المادية يساوي :

$$I \cdot r = 10 \cdot 1 = 10 [V]$$

وهبوط التوتر الكلي على المقاومة المادية للملف والمصباح يساوي :

$$I \cdot R + I \cdot r = 50 + 10 = 60 \text{ [V]}$$

التوتر الهابط على المحارضة الذاتية للملف يساوي :

$$I \cdot X_L = \sqrt{200^2 + 60^2} = 190,8 \text{ [V]}$$

المفاعلة التحريضية للملف :

$$X_L = \frac{190,8}{10} = 19,08 \text{ [\Omega]}$$

الممانعة الكلية للملف تساوي :

$$Z_L = \sqrt{r^2 + X_L^2}$$

$$Z_L = \sqrt{1^2 + 19,08^2} \approx 19,1 \text{ [\Omega]}$$

الاستطاعة الكلية المستهلكة في الدارة تساوي مجموع الاستطاعة المستهلكة في المصباح

والمقاومة المادية للملف وتساوي :

$$P = I^2 (R + r)$$

$$P = 10^2 (5 + 1) = 600 \text{ [W]}$$

عامل الاستطاعة للدارة :

$$\cos \varphi = \frac{R + r}{Z}$$

أو :

$$\cos \varphi = \frac{U_R + U_r}{U} = \frac{50 + 10}{200} = 0,3$$

الاستطاعة الفعالة والرديية والظاهرية :

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = 200 \cdot 10 \cdot 0,3 = 600 \text{ [W]}$$

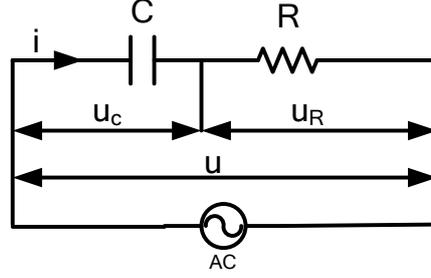
$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = 200 \cdot 10 \cdot 0,954 = 1908 \text{ [VAr]}$$

$$S = U \cdot I = 200 \cdot 10 = 2000 \text{ [VA]}$$

نلاحظ أن الاستطاعة الفعالة تساوي تماماً الاستطاعة المستهلكة في الدارة .

4 - 10 - 2 - دائرة مكونة من مقاومة ومكثف على التسلسل :

يبين الشكل (4-27) دائرة تيار متناوب مؤلفة من مقاومة ومكثف على التسلسل [11] .



الشكل (4 - 27) دائرة تيار متناوب مؤلفة من مقاومة ومكثف على التسلسل

التوتر الكلي على طرفي الدارة عند مرور تيار جيبي من الشكل

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \text{ يساوي مجموع التوترات } u_R \text{ و } u_c :$$

$$u = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i \cdot dt \quad (4 - 104)$$

$$= R \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \psi_i)$$

وبالاستفادة من معادلات الدارة المؤلفة من مقاومة وملف وباستبدال $\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$ بدلاً

من (ωL) ينتج :

$$u = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i + \varphi) \quad (4 - 105)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

وبمقارنة هذه المعادلة مع المعادلة العامة للتوتر :

$$(4 - 106)$$

ينتج :

$$U_m = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I_m$$

$$= Z \cdot I_m \quad (4-107)$$

وبتقسيم طرفي المعادلة (4-107) على $\sqrt{2}$ نحصل على القيمة الفعالة للتوتر :

$$U = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot I$$

$$= Z \cdot I \quad (4-108)$$

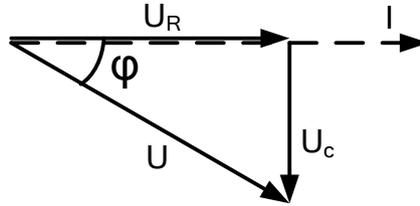
إذاً ممانعة الدارة المؤلفة من مقاومة R ومكثف C تساوي :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (4-109)$$

زاوية فرق الطور بين التيار والتوتر الكلي :

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \text{arc} \cdot \text{tg}^{-1} \left(-\frac{1}{\omega C R} \right) \quad (4-110)$$

إذاً منحني التوتر متقدم في الطور على منحني التيار بزاوية سالبة وبالتالي يتأخر بالنسبة لمنحني التيار .



الشكل (4-28) مخطط شعاعي نوعي للتيار والتوترات لدارة تيار متناوب مؤلفة من

مقاومة ومكثف على التسلسل

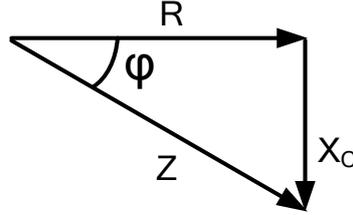
من المخطط الشعاعي نلاحظ أن :

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (4-111)$$

وبتقسيم طرفي العلاقة على I نحصل على الممانعة الكلية للدارة Z :

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X_C^2} \quad (4-112)$$

من ذلك يمكن رسم ما يسمى بمثلث الممانعات كما هو مبين في الشكل (4-28)



الشكل (4-28) مثلث الممانعات لدارة تيار متناوب مؤلفة من

مقاومة ومكثف على التسلسل

ونلاحظ أيضاً من المخطط الشعاعي أن التوتر الكلي متأخر عن التيار بزاوية φ تساوي (من المخطط الشعاعي)

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{U_L}{U_R} = \text{tg}^{-1} \frac{X_C}{R} \quad (4-113)$$

أو

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{U_R}{U} = \text{tg}^{-1} \frac{R}{Z} \quad (4-114)$$

ويمكن بدراسة مشابهة لحالة مقاومة مع ملف على التسلسل أن نجد أن الاستطاعة الكلية المستهلكة في الدارة تساوي فقط الاستطاعة المبددة في المقاومة الأومية أو بشكل عام

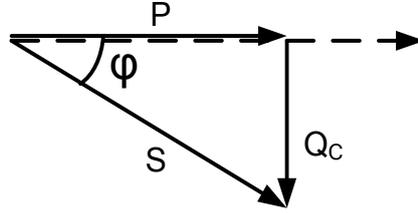
تكون الاستطاعة الفعالة والرديّة والظاهرية على التوالي :

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$$

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (4-115)$$

ويبين الشكل (4-29) مثلث الاستطاعات :



الشكل (29 - 4) مثلث الاستطاعات

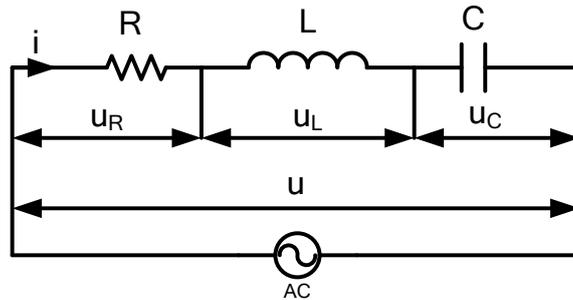
3 - 10 - 4 دارة مؤلفة من مقاومة وملف ومكثف على التسلسل :

تتألف الدارة الكهربائية من عناصر لا تعرف بكميات ثابتة، بل تتغير قيمتها مع تغير التيار الذي يمر خلالها، إلا أن هذا التغير في الحالات العادية يكون صغيراً جداً ويمكن إهماله، وبالتالي يمكن القبول بأن عناصر الدارات هذه هي كميات ثابتة ومستقلة عن التيار وفي هذه الحالة تسمى الدارة عندئذ الدارة الكهربائية الخطية Linear Circuit، بينما في الحالة التي لا يمكن إهمال هذا التغير عندها تسمى الدارة غير الخطية Non-linear Circuit.

إذا أخذنا دارة كهربائية تحوي عناصر مثالية خطية C, L, R موصولة بشكل تسلسلي كما

في الشكل (4-30) ومطبق على طرفي هذه الدارة توتر متناوب جيبي [10]

$$(4-116) \quad u = U_m \cdot \sin(\omega.t + \varphi)$$



الشكل (30 - 4) دارة تسلسلية ذات C,L,R

فإنه سوف يمر تيار

$$i = I_m \sin(\omega.t + \varphi) \quad \text{كهربائي في هذه الدارة:}$$

(4 - 117)

التوتر الكلي الهابط على طرفي الدارة المؤلفة من L , R و C خلال مرور التيار الكهربائي الجيبي i يكون مساوياً لمجموع هبوطات التوتر (وفقاً لقانون كيرشوف):

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (4-118)$$

بفرض أن المقاومة الكلية للدارة متمركزة في R فإن التوتر على طرفيها $u_R(t)$ وفقاً لقانون أوم:

$$u_R(t) = R.i(t) \quad (4-119)$$

وبفرض أن السعة الكلية للدارة متمركزة في المكثف C ، ولأن الشحنة التي تظهر على لبوسيه هي q فإن التوتر $u_C(t)$ يساوي

$$u_C(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t).dt \quad (4-120)$$

كذلك الأمر وبفرض أن المحارضة الكلية للدارة تتركز في الملف L ويمر فيه تيار متغير مع الزمن وينتج عنه فيض مغناطيسي متغير مع الزمن $\psi(t)$ وبالتالي سوف تتعرض ق. م. ك EMF متغيرة مع الزمن $e(t)$ وتساوي

$$e(t) = -\frac{d\psi}{dt} = -L \cdot \frac{di}{dt} \quad (4-121)$$

وبما أن التوتر على طرفي الملف يساوي القوة المحركة الكهربائية المتحرضة ويعاكسها بالإشارة

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (4-122)$$

وبالتعويض في العلاقة الأساسية (4-118) نجد

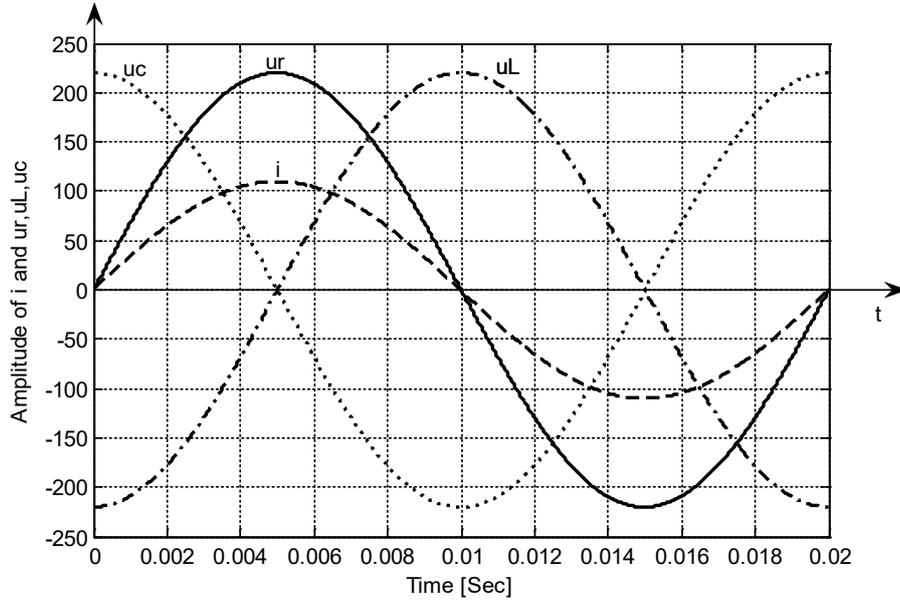
$$u(t) = R.i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i.dt \quad (4-123)$$

هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية وتسمى معادلة تشغيل الدارة وبالتعويض عن التيار
المار يكون:

$$u(t) = R.I_m \cdot \sin(\omega.t) + \omega.L.I_m \cdot \cos(\omega.t) - \frac{1}{\omega.c} . I_m \cos(\omega.t)$$

$$= R.I_m \cdot \sin(\omega.t) + \omega.L.I_m \cdot \sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega.c} . I_m \cdot \sin\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4-124)$$

نلاحظ من هذه العلاقة أن التوتر u_R على طرفي المقاومة يتفق مع التيار بالطور أي
أن زاوية فرق الصفحة $\varphi_R=0$ ، بينما التوتر على طرفي الملف يتقدم على التيار بزاوية
قدرها $\varphi_L = \frac{\pi}{2}$ ، إنما التوتر على طرفي المكثف يتأخر على التيار بزاوية قدرها
 $\varphi_C = \frac{\pi}{2}$.[5]



الشكل (4-31) منحنيات التوتر والتيار لدارة C, L, R تسلسلية

$$U_m \cdot \sin(\omega.t + \varphi) = I_m \cdot R \cdot \sin(\omega.t) + I_m \left(\omega.L - \frac{1}{\omega.c} \right) \cos(\omega.t)$$

$$U_m \cdot \sin \omega t \cdot \cos \varphi + U_m \cdot \cos \omega t \cdot \sin \varphi = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t + I_m \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos \omega t \quad (4-125)$$

وبالمقارنة بين طرفي العلاقة نجد أن:

$$U_m \cdot \cos \varphi = I_m \cdot R \quad (4-126)$$

$$U_m \sin \varphi = I_m \cdot \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

ومنه:

$$U_m^2 = I_m^2 \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]$$

$$U_m = I_m \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$U = I \cdot \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (4-127)$$

المقدار $\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$ من العلاقة السابقة تسمى الممانعة الكلية Total

Impedance للدارة ويرمز له ب Z .

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (4-128)$$

ويمكن كتابة علاقة التوتر الفعال بالشكل التالي :

$$U = I \cdot \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (4-129)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (4-130)$$

حيث:

$$X = X_L - X_C \quad (4-131)$$

وتسمى المفاعلة الردية للدارة Total Reactance

$$tg.\varphi = \frac{\omega.L - \frac{1}{\omega.C}}{R} \quad (4-132)$$

وتسمى زاوية فرق الصفحة Phase Shift بين التيار والتوتر .

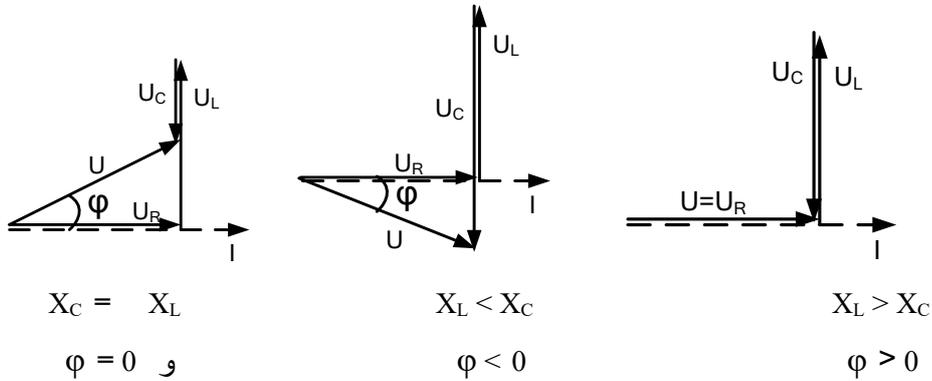
يمكن أن نميز ثلاث حالات للممانعة الكلية:

أ- $X_L > X_C$ عندئذ $X > 0$ وبالتالي الدارة ذات أثر تحريضي أي أن التيار يتأخر عن التوتر بزاوية قدرها φ (lagging).

ب- $X_C > X_L$ عندئذ $X < 0$ وبالتالي الدارة ذات أثر سعوي أي أن التيار يتقدم على التوتر بزاوية قدرها φ (leading).

ج- عندما $X_L = X_C$ عندئذ $X = 0$ وبالتالي الدارة ذات أثر أومي، أي أن التيار يتفق مع التوتر بالصفحة، و الزاوية بينهما مساوية الصفر $\varphi = 0$.

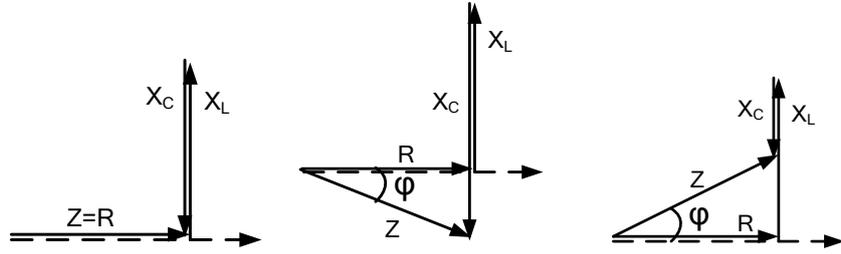
ولرسم المخطط الشعاعي للدارة المؤلفة من R , L و C نفرض للاختصار أن زاوية الطور الابتدائية للتيار مساوية للصفر وهذا يعني أن التيار يقع على المحور الأفقي .



الشكل (4 - 32) المخطط الشعاعي للتيار والتوترات في كافة الحالات

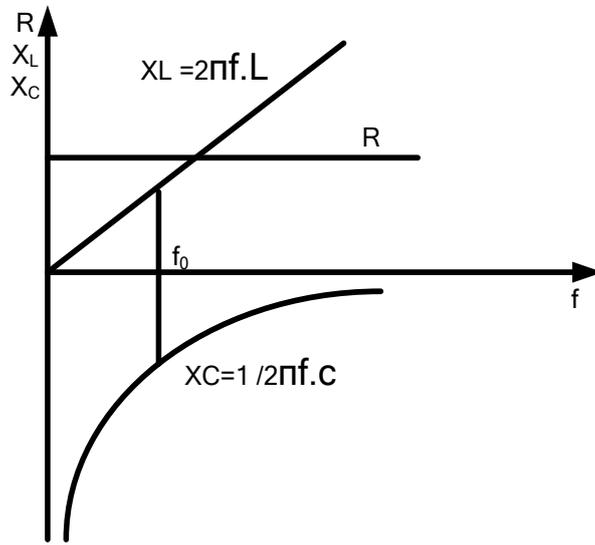
وبالتالي من معرفة R , X_L و X_C يمكن أن نرسم ما يسمى مثلث الممانعات

[6] Impedance Triangle



الشكل (4 - 33) مثلث الممانعات

يبين الشكل (4-34) تغير قيمة كل من R , X_L و X_C مع التردد f :



الشكل (4 - 34) علاقة R , X_L و X_C مع التردد f

مسألة 2-7-1 :

لدينا الدارة التسلسلية التي تحوي العناصر التالية: $L = 42.97[mH]$
يمر فيها تيار متناوب معطى بالعلاقة $R = 6[\Omega], C = 353.7[\mu F]$
 $i = 14,14 \sin(\omega t)[A]$ بتردد $f = 50[Hz]$ والمطلوب حساب: [12]

1- احسب قيمة Z وارسم مثلث الممانعات.

2- القيمة الفعالة للتيار والتوتر.

3- هبوطات التوتر على C, L, R وارسم مثلث التوترات.

4- المركبة الفعلية والردية للتوتر.

الحل:

-1

$$X_L = \omega.L = 2\pi.f.L$$
$$= 314.42,97.10^{-3} = 13,5[\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C}$$
$$= \frac{1}{314.353,7.10^{-6}} = 9.[\Omega]$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + (13,5 - 9)^2} = 7.5[\Omega]$$

-2

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{14,14}{\sqrt{2}} = 10[A]$$

$$U = I.Z = 10 \times 75 = 75[V]$$

-3

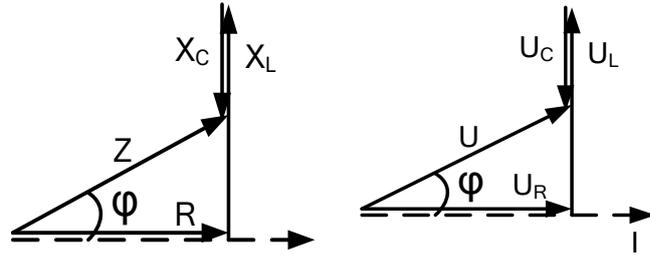
$$U_R = I.R = 10 \times 6 = 60[V]$$

$$U_L = I.X_L = 10 \times 13,5 = 135[V]$$

$$U_C = I.X_C = 10 \times 9 = 90[V]$$

$$U_a = U \cdot \cos \varphi = 75 \cdot \frac{6}{7,5} = 60[V]$$

$$U_r = U \cdot \sin \varphi = 75 \cdot \frac{4,5}{7,5} = 45[V]$$



الشكل (4 - 35 - b) مثلث الممانعات

الشكل (4 - 35 - a) مثلث التوترات

4 - 11 - استخدام الكميات العقدية في دارات التيار المتناوب :

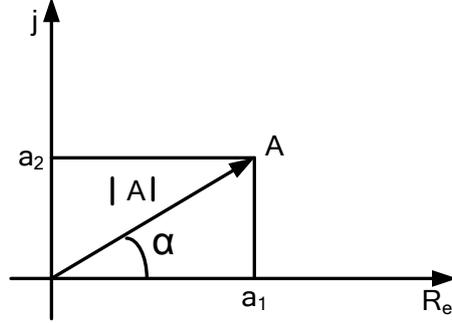
يتم استخدام الأعداد العقدية في دارات التيار المتناوب لتسهيل الحسابات بدلاً من استخدام الحسابات بالطريقة الشعاعية .

4 - 11 - 1 - طريقة التمثيل العقدي للتابع الجيبية : [9]

يمكن تحليل الشعاع \bar{A} في المستوي العقدي كما هو مبين في الشكل (4-36) إلى مركبتين:

a_1 على المحور الحقيقي (R_e) الذي يُتخذ كمرجع و a_2 على المحور التخيلي (j) العمودي على المحور السابق

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 \quad \text{ويمكن أن نكتب :} \quad (4-133)$$



الشكل (4 - 36) يمثل الشعاع A في المستوى العقدي

إن الرمز (z) يعني تدوير الشعاع بمقدار $\frac{\pi}{2}$ راديان بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة

والرمز (- z) يعني تدوير الشعاع بمقدار $\frac{\pi}{2}$ راديان مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

ندرج في المستوى العقدي الأعداد الحقيقية على المحور الأفقي و الأعداد التخيلية على المحور العمودي، و بذلك يمكن كتابة الشعاع A على الشكل التالي :

$$\underline{A} = a_1 + ja_2$$

ويسمى هذا التمثيل $\underline{A} = a_1 + ja_2$ بالشكل الديكارتي للشعاع .

ويمكن تحديد الشعاع A بطوله |A| (طول الشعاع) والزاوية α .
طويلة الشعاع (القيمة المطلقة

$$|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{للشعاع (هي : (4 - 134)$$

أما الزاوية مع المحور الحقيقي (محور المرجع) فتساوي :

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \frac{a_2}{a_1} \quad (4 - 135)$$

و تعد الزاوية موجبة إذا قيست باتجاه عكس عقارب الساعة مع مراعاة إشارة الجزء الحقيقي، و إشارة الجزء التخيلي إذا كانت موجبة أو سالبة .

أما إذا أردنا أن نعبر عن a_1 و a_2 بدلالة الزاوية α يمكن أن نكتب :

$$\begin{aligned} a_1 &= |A| \cdot \cos \alpha \\ a_2 &= |A| \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (4 - 136)$$

$$A = |A| \cdot (\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha)$$

ومنه :

$$(4 - 137)$$

ويسمى هذا التمثيل الشكل القطبي للشعاع (Polar Form) .

ويمكن كتابته أيضاً على الشكل التالي :

$$\underline{A} = |A| \angle \alpha$$

وعند أخذ علاقة أولر بالحسبان يمكن أن نكتب :

$$e^{j\alpha} = (\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha) \quad (4 - 138)$$

وبالتالي :

$$(4 - 139)$$

$$\underline{A} = |A| \cdot e^{j\alpha}$$

وهذا التمثيل يسمى الشكل الأسّي للشعاع Exponential Form و بذلك تكون الأشكال

الثلاثة لصياغة الشعاع :

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = |A|(\cos \alpha + j \sin \alpha) = |A| \cdot e^{j\alpha} \quad (4 - 140)$$

يمكن أن نلاحظ مما سبق ما يلي :

يسمى الشعاع الذي طوله يساوي الواحد وحدة الشعاع :

$$e^{j\alpha} = (\cos \alpha + j \cdot \sin \alpha) \quad (4 - 141)$$

وإذا أخذت الزاوية α القيم التالية تحدد عندها قيمة الشعاع كما يلي :

$$\alpha = 0 \Rightarrow e^{j0} = (\cos 0 + j \cdot \sin 0) = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{j\frac{\pi}{2}} = (\cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2}) = j$$

$$(4-142) \Rightarrow \frac{1}{e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{j} \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}} = (\cos \frac{-\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{-\pi}{2}) = -j$$

وبالتالي :

$$-j = \frac{1}{j} \quad (4-143)$$

$$\alpha = \pi \Rightarrow e^{j\pi} = (\cos \pi + j \cdot \sin \pi) = -1$$

$$\Rightarrow e^{j\pi} = e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j \cdot j = -1$$

ومنه :

$$j^2 = -1 \quad (4-144)$$

2 - 11 - 4 : قواعد حساب الأعداد العقدية : [16]

1 - 2 - 11 - 4 - القاعدة الأولى : مساواة عددين عقديين

إذا كان لدينا عددان

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = |A| \cdot e^{j\alpha} \quad \text{عقديان من الشكل :}$$

$$\underline{B} = b_1 + jb_2 = |B| \cdot e^{j\beta}$$

(4 - 145)

نقول عن عددين عقديين إنهما متساويان إذا تساوت القيمة الحقيقية للأول مع القيمة الحقيقية للثاني، والقيمة التخيلية للأول مع القيمة التخيلية للثاني، أو إذا تساوت القيمة المطلقة للأول مع القيمة المطلقة للثاني، وزاوية الطور للأول مع زاوية الطور للثاني أي

:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 \\ a_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (4-146)$$

أو

$$\begin{aligned} |A| &= |B| \\ \alpha &= \beta \end{aligned} \quad (4-147)$$

4 - 11 - 2 - 2 - القاعدة الثانية : الجمع والطرح

يكون حاصل مجموع عددين عقديين بجمع (أو طرح) أجزائهما الحقيقية و بجمع (أو طرح) أجزائهما التخيلية كل على حدة

$$\underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2) \quad (4-148)$$

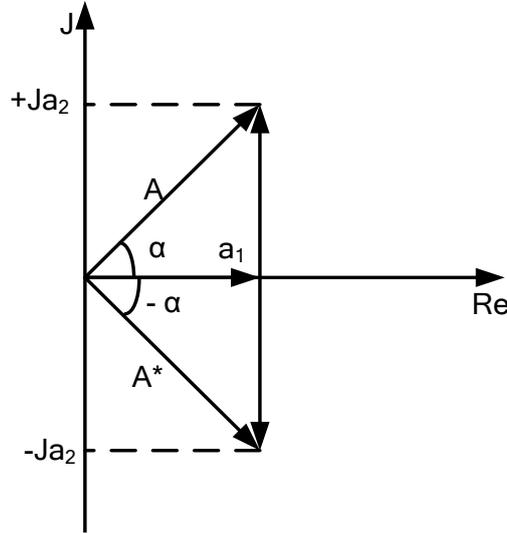
4 - 11 - 2 - 3 - القاعدة الثالثة : الجداء والتقسيم

يتم ضرب شعاعين عقديين بضرب قيمتهما المطلقتين، وجمع زاويتي طورهما، والتقسيم أيضاً يتم بتقسيم القيمة المطلقة للأول على القيمة المطلقة للثاني، و طرح زاوية طور الثاني من زاوية طور الأول.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = |A| \cdot |B| \cdot e^{j(\alpha+\beta)} \quad (4-149)$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{|A|}{|B|} \cdot e^{j(\alpha-\beta)} \quad (4-150)$$

ومنه نلاحظ أن الضرب (التقسيم) بعامل حقيقي فيعني تغيير طول الشعاع فقط ، أما الضرب (التقسيم) بعامل عقدي فيعني تغيير طول الشعاع وتغيير زاوية طوره . أما الضرب بالعامل ز يعني تدوير الشعاع بزاوية $+\frac{\pi}{2}$ ، والضرب بالعامل ز- يعني تدوير الشعاع بزاوية $-\frac{\pi}{2}$. بينما الضرب بالقيمة العقدية المرافقة للشعاع يعطي قيمة حقيقية فقط كما هو مبين على الشكل (4-37) .



الشكل (4-37) الشعاع العقدي المرافق

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = |A|.e^{j\alpha} \quad (4-151)$$

$$\underline{A}^* = a_1 - ja_2 = |A|.e^{-j\alpha} \quad (4-152)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2 \quad (4-153)$$

4 - 2 - 11 - 4 - القاعدة الرابعة : الأسس و الجذر :

يتم رفع قيمة عقدية إلى

$$\underline{A} = |A|.e^{j\varphi}$$

قوة n برفع القيمة

$$(\underline{A})^n = |A|^n . e^{jn\alpha}$$

المطلقة إلى القوة n

وبضرب الزاوية بـ n

$$(4-154)$$

والجذر يكون أيضاً على الشكل التالي:

$$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{A}.e^{j\frac{\alpha+2\pi K}{n}} \quad (4-155)$$

حيث K تأخذ القيم :

$$K = 0, 1, 2, \dots, n$$

4 - 11 - 2 - 5 - القاعدة الخامسة : التفاضل و التكامل

عند مفاضلة شعاع عقدي بالنسبة للزمن يتغير طوله ويدور بزاوية $\frac{\pi}{2}$ إلى الأمام ، لذلك

يجب أن تكون زاوية

$$\underline{a} = |A| \cdot e^{j\alpha(t)}$$

الشعاع متعلقة بالزمن أي

أن الشعاع هو شعاع

دائر

$$(4 - 156)$$

ويكون تفاضله بالنسبة للزمن :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{a}}{dt} &= \underline{a}_1 = j \frac{d\alpha}{dt} A e^{j\alpha(t)} \\ &= j \frac{d\alpha}{dt} \cdot \underline{a} \end{aligned} \quad (4 - 157)$$

نعوض $\alpha = \omega(t)$ فيكون :

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = j\omega \cdot \bar{a} \quad (4 - 158)$$

أي أن تفاضل شعاع عقدي هو أيضاً شعاع عقدي قيمته المطلقة تزداد بنسبة ω ويدور

إلى الأمام بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.

عند مكاملة شعاع عقدي بالنسبة للزمن يتغير طوله ويدور بزاوية $\pi/2$ إلى الورا .

$$\int \underline{a} \cdot dt = \frac{1}{j\omega} \cdot \underline{a} \quad (4 - 159)$$

أي أن مكاملة شعاع عقدي هو أيضاً شعاع عقدي قيمته تنقص بنسبة ω ويدور إلى الورا بزواوية قدرها $-\frac{\pi}{2}$.

ويساوي اللوغاريتم الطبيعي لقيمة عقدية مجموع اللوغاريتم الطبيعي للقيمة المطلقة للشعاع وزواوية طور الشعاع مضروبة بـ j ، بتطبيق ذلك على القيمة العقدية A نحصل:

$$\begin{aligned} \text{Ln} \cdot \underline{A} &= \text{Ln} \left[|A| \cdot e^{j(\alpha + 2\pi K)} \right] \quad (4-160) \\ &= \text{Ln}A + j(\alpha + 2\pi K) \end{aligned}$$

حيث :

$$K = 0, 1, 2, \dots$$

3 - 11 - 4 : استعمال التمثيل العقدي لحل دارات التيار المتناوب الأحادي الطور [8],[10],[14]:

1 - 3 - 11 - 4 : دائرة تحوي C, L, R على التسلسل :

عند تطبيق توتر متناوب جيبي على الدارة المبينة في الشكل (4 - 38) التي تحوي عناصر خطية C, L, R من الشكل :

$$(4-161) u = U_m \cdot \sin \omega t$$

فإنه عند تطبيق قانون كيرشوف الثاني :

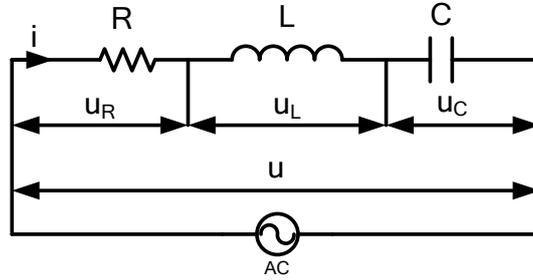
$$(4-162) u = u_R + u_L + u_C$$

وبما أن :

$$u_R = R \cdot i$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (4-163)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$$



الشكل (4 - 38) دائرة مكونة من R,L,C على التسلسل

وعند تحويل الأشعة الجيبية إلى أشعة دوائر يمكن أن نكتب :

$$u(t) \Leftrightarrow \bar{U}_m \cdot e^{j\omega t} \quad (4 - 164)$$

$$\underline{U}_m = U_m \cdot e^{j0}$$

حيث : \underline{U}_m المطال العقدي ويساوي

$$(4 - 165)$$

والتيار المار في الدائرة

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{أيضاً جيبى ومتناوب}$$

من الشكل التالي :

$$(4 - 166)$$

وبشكله الدوار يمكن أن

$$i(t) \Leftrightarrow \underline{I}_m \cdot e^{j\omega t} \quad \text{نكتبه كما يلي :}$$

$$(4 - 167)$$

$$\underline{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi}$$

حيث :

$$(4 - 168)$$

وبالتعويض في معادلة تشغيل الدائرة (4 - 80) تكون :

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = R \cdot \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \cdot \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad (4 - 169)$$

وبالانتقال

$$\underline{U}_m = R \cdot \underline{I}_m + j\omega L \cdot \underline{I}_m + \frac{1}{j\omega c} \underline{I}_m \quad \begin{array}{l} \text{إلى الأشعة} \\ \text{الساكنة (t = 0)} \end{array}$$

(0) نحصل على العلاقة التالية :

(4-170)

بتقسيم طرفي العلاقة (4-170) على $\sqrt{2}$ للحصول على القيم الفعالة العقدية :

$$\underline{U} = R \cdot \bar{I} + j\omega L \cdot \bar{I} + \frac{1}{j\omega c} \cdot \bar{I} \quad (4-171)$$

$$\underline{U} = \bar{I} \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right) \right]$$

$$\underline{U} = \bar{I} \cdot \underline{Z} \quad (4-172)$$

حيث \underline{Z} : الممانعة العقدية للدائرة التسلسلية :

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right) \quad (4-173)$$

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$

ويمكن أن نعبر عنها بالشكل الآسي :

(4-174)

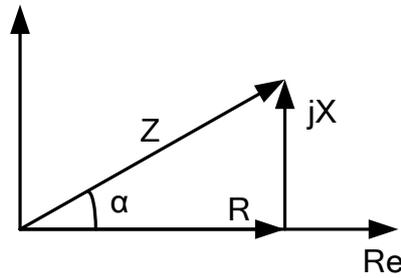
حيث Z : القيمة الفعالة للممانعة :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right)^2} \quad (4-175)$$

φ زاوية فرق طور الممانعة و تساوي :

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{X}{R} \\ &= \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\end{aligned}\quad (4-176)$$

تمثل علاقة الممانعة العقدية في المستوي العقدي كما في الشكل (4-39).



الشكل (4-39) تمثيل z في المستوي العقدي.

وبالتالي فإن علاقة التيار العقدي المار في المقاومة :

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\overline{U}}{\underline{Z}} = \frac{|U|e^{j0}}{|Z|e^{j\varphi}} \\ &= |I| \cdot e^{-j\varphi}\end{aligned}\quad (4-177)$$

$$\begin{aligned}\underline{i} &= \sqrt{2} \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} I e^{-j\varphi} \cdot e^{j\omega t} \\ &= I_m e^{j(\omega t - \varphi)}\end{aligned}$$

والقيمة اللحظية العقدية للتيار المار في الدارة :

(4-178)

$$(4-179) \bar{i} = I_m \cos(\omega t - \varphi) + jI_m \sin(\omega t - \varphi)$$

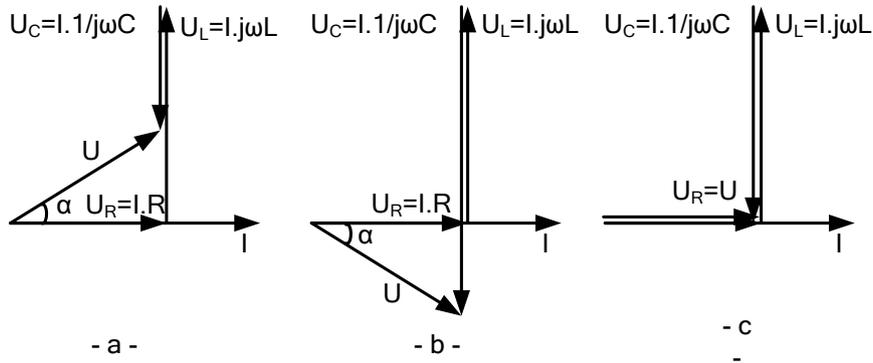
وبما أن التوتر المطبق على طرفي الدارة عبارة عن الجزء التخيلي للقيمة العقدية للتوتر

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad (4-180)$$

فإن التيار أيضاً هو الجزء التخيلي للقيمة اللحظية العقدية للتيار :

$$(4-181) i = I_m [\bar{i}] = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}} \sin \left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (4-182)$$



الشكل (4-40) المخطط الشعاعي لدارة تسلسلية R,L,C

ومن المخطط الشعاعي للتيار والتوتر وبشكل مشابه يمكن الحصول على مثلث الممانعات:

$$\text{توتر متقدم } X > 0 \Leftrightarrow \varphi > 0 \quad - a$$

$$\text{توتر متأخر } X < 0 \Leftrightarrow \varphi < 0 \quad - b$$

$$\text{حالة أومية بحتة } X = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \quad - c$$

ويمكن الحصول على الحالات الخاصة التالية من الحالة العامة السابقة :

4 - 11 - 3 - 2 : حالة مقاومة وملف على التسلسل : [10],[14]

الممانعة العقدية في هذه

$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad \text{الحالة :}$$

(4-183)

التيار

العقدي

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j0}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j\varphi}}$$

المار في

الدارة

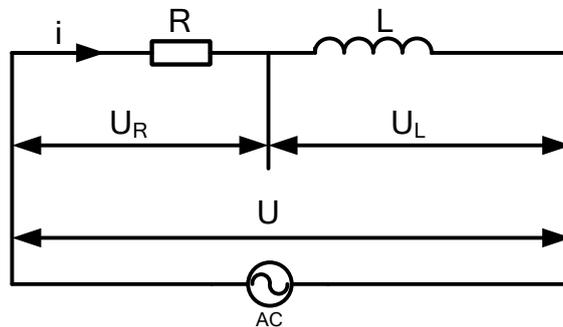
: يساوي :

$$\underline{I} = |\underline{I}| \cdot e^{-j\varphi} \quad (4-184)$$

حيث:

القيمة الفعالة للتيار :

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (4-185)$$



الشكل (4 - 41) دائرة مقاومة وملف على التسلسل

زاوية فرق الصفحة

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (4-186)$$

وإذا كان التوتر المطبق من الشكل :

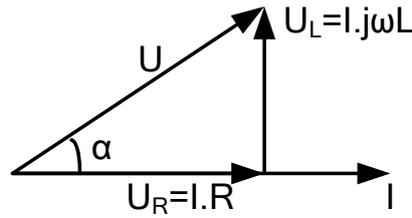
$$u = U_m \sin \omega t \quad (4-187)$$

وأردنا العودة من الشكل العقدي إلى الشكل الجيبي فإن التيار يكون على الشكل التالي:

$$i = I_m [i] \quad (4-88)$$

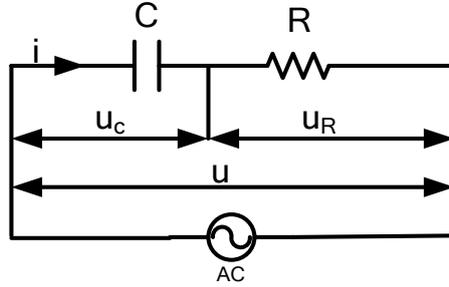
$$= I_m \left[\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi) + j \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t - \varphi) \right]$$

$$i = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin \left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \quad (4-189)$$



الشكل (4 - 42) مخطط الشعاعي لدائرة تسلسلية R,L

3 - 3 - 11 - 4 : حالة مقاومة ومكثف على التسلسل: [10],[14]



الشكل (4 - 43) دائرة تسلسلية R,C

الممانعة العقدية للدائرة:

$$\bar{Z} = R - j \frac{1}{\omega c} \quad (4 - 190)$$

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{|U|e^{j0}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2} e^{-j\varphi}} \\ &= I \cdot e^{j\varphi} \end{aligned}$$

التيار العقدي المار في الدائرة

$$(4 - 191)$$

القيمة الفعالة للتيار

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega c}\right)^2}} \quad (4 - 192)$$

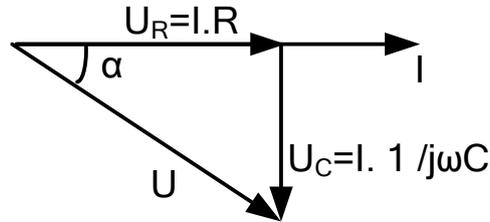
زاوية فرق الطور

$$\varphi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{1}{\omega.C.R} \right) \quad (4-193)$$

وبالعودة إلى الشكل الجيبي يكون :

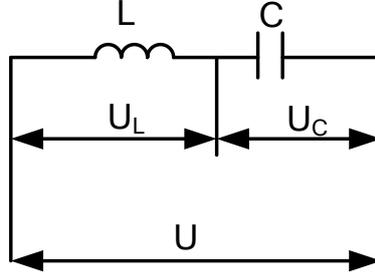
$$i = \operatorname{Im}[i] \\ i = \operatorname{Im} \left[\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t + \varphi) + j \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \right] \quad (4-194)$$

$$i = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \varphi) \quad (4-195)$$



الشكل (4-44) مخطط شعاعي لدارة C,R تسلسلية

4 - 3 - 11 - 4 : حالة ملف و مكثف على التسلسل : [10],[14]



الشكل (4-45) دائرة تسلسلية L,C

الممانعة العقدية للدائرة:

$$\underline{Z} = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right) \quad (4-196)$$

التيار المار :

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j0}}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega c} \right)} \cdot e^{j\varphi}} \quad (4-197)$$

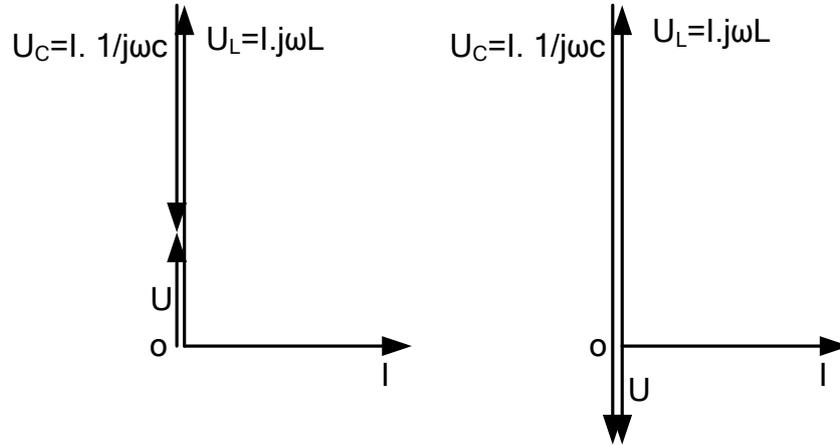
$$= |I| \cdot e^{-j\varphi}$$

القيمة الفعالة للتيار:

$$I = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L + \frac{1}{\omega c} \right)^2}} \quad (4-198)$$

زاوية فرق الصفحة

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (4-199)$$



الشكل (4 - 46) مخطط شعاعي لدارة تسلسلية L,C

4 - 12 - جمع الممانعات

4 - 12 - 1 - جمع الممانعات على التسلسل

إذا كان لدينا عدة ممانعات موصولة على التسلسل فإن الممانعة المكافئة لها وباستخدام

الصيغة العقدية هي [15] :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \dots + \underline{Z}_n \quad (4 - 200)$$

فإذا كانت :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j X_1$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j X_2$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j X_3$$

$$\underline{Z}_n = R_n + j X_n \quad (4 - 201)$$

تكون الممانعة المكافئة :

$$\underline{Z}_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n + j (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n) \quad (4 - 202)$$

وقيمتها

$$|Z_{eq}| = \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n)^2 + (X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)^2} \quad (4 - 203)$$

المطلقة :

وزاويتها :

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n} \quad (4 - 204)$$

4 - 12 - 2 - السماحية

- وجدنا في التيار المستمر أن مقلوب المقاومة $\frac{1}{R}$ يسمى بالناقلية G .
 في التيار المتناوب فإن مقلوب الممانعة $\frac{1}{Z}$ يسمى بالسماحية Y .
 وباستخدام الصيغة العقدية يمكن أن نكتب [15] :

$$(4-205) \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

فإذا كانت لدينا ممانعة

$$\underline{Z} = R + jX_L \quad \text{تحريضية :}$$

(4-206)

فإن مقلوب هذه الممانعة هو :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX_L}$$

$$= \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2}$$

(4-207)

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2}$$

فإذا فرضنا أن السماحية تكتب بالشكل التالي :

$$\underline{Y} = G + jB \quad (4-208)$$

حيث :

G : الناقلية

B : المسايرة

- وكل منهما تقاس بوحدة السيمنس [S] أو المو $\left[\Omega = \frac{1}{\Omega} \right]$ وهي مقلوب الأوم .

من العلاقات السابقة نجد بسهولة :

$$G = \frac{R_{\text{ا}}}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{|Z|^2}$$

(4 - 209)

$$B = -\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{X_L}{|Z|^2} \quad (4-210)$$

حالات خاصة :

- إذا كانت $Z = R + j0$ فإن مقلوب مقاومة مثالية هو :

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R} \Rightarrow G = \frac{1}{R}, \quad B = 0$$

- إذا كانت $Z = jX_L$ فإن مقلوب مفاعلة تحريضية مثالية هو :

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{jX_L} = -j\frac{1}{X_L} \Rightarrow G = 0, \quad B = -\frac{1}{X_L}$$

- إذا كانت $Z = -jX_C$ فإن مقلوب مفاعلة سعوية مثالية هو :

$$\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{-jX_C} = j\frac{1}{X_C} \Rightarrow G = 0, \quad B = \frac{1}{X_C}$$

4 - 12 - 3 - جمع السماحيات (جمع الممانعات على التفرع)

إذا كان لدينا عدة سماحيات موصولة على التفرع فإن السماحية المكافئة لها وباستخدام

الصيغة العقدية هي [15] :

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \dots + \underline{Y}_n \quad (4-211)$$

فإذا كانت :

$$\underline{Y}_1 = G_1 + j B_1$$

$$\underline{Y}_2 = G_2 + j B_2$$

$$\underline{Y}_3 = G_3 + j B_3$$

⋮

⋮

$$\underline{Y}_n = G_n + j B_n \quad (4-212)$$

تكون الممانعة المكافئة :

$$\underline{Y}_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n + j (B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n) \quad (4-213)$$

وقيمتها المطلقة :

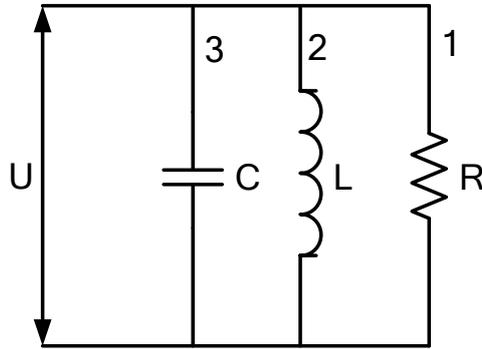
$$|Y_{eq}| = \sqrt{(G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n)^2 + (B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n)^2} \quad (4-214)$$

وزاويتها مع

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n} \quad (4-215)$$

4 - 13 - الدارات التفرعية : [8],[10],[14]

ليكن لدينا دارة مؤلفة من مقاومة R وملف تحريضه الذاتي L ومكثف سعته الذاتية C موصولة على التفرع كما في الشكل (4-47) ويمكن استناداً إلى ما سبق أن نكتب ما يلي:



الشكل (4-47) دارة تفرعية مكونة من R , L , C

سماحية الفرع الأول :

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R} + j0 \quad (4-216)$$

...

سماحية الفرع الثاني :

$$\underline{Y}_2 = 0 - j \frac{1}{X_L} \quad (4-217)$$

$$\underline{Y}_3 = 0 + j \frac{1}{X_C}$$

سماحية الفرع الثالث :

(4-218)

والسماحية الكلية :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = \frac{1}{R} + j \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (4-219)$$

$$\underline{Y} = G + j(B_C - B_L)$$

حيث :

$$G = \frac{1}{R}$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} \quad ; \quad B_L = \frac{1}{X_L}$$

السماحية المطلقة :

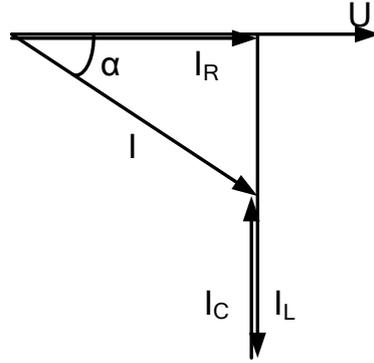
$$Y = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \quad (4-220)$$

وزاويتها مع المحور الحقيقي :

(4 - 221)

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{B_C - B_L}{G}$$

والمخطط الشعاعي النوعي للتوتر والتيارات موضح كما في الشكل (4 - 48)



الشكل (4 - 48) المخطط الشعاعي النوعي للتوتر والتيارات

- أ - $B > 0 \Rightarrow B_C > B_L$ الدارة ذات طبيعة سعوية التيار يتقدم على التوتر بزاوية α
 ب - $B < 0 \Rightarrow B_L > B_C$ الدارة ذات طبيعة تحريضية التيار يتأخر عن التوتر بزاوية φ
 ج - $B = 0 \Rightarrow B_L = B_C$ الدارة ذات طبيعة أومية $\varphi = 0$ ويمكن رسم
 المخططات الشعاعية لكافة الحالات كما ذكر سابقاً في دارات التيار المتناوب المربوطة
 على التسلسل .

ونبين في الجدول رقم (2) الحالات الخاصة للتوصيل الفرعي: [6]

الجدول رقم (2) الحالات الخاصة للتوصيل التفرعي

الدارة	الممانعة الكلية	φ	العلاقة بين \underline{I} و \underline{U}	المخطط الشعاعي
مقاومة وملف تفرعي	$Y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$ $B = -\frac{1}{\omega L}$	$\varphi = -\text{tg}^{-1} \frac{R}{\omega L}$	$\underline{I} = \underline{U} \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$	
مقاومة ومكثف تفرعي	$Y = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$ $B = \omega C$	$\varphi = \text{tg}^{-1} \omega C R$	$\underline{I} = \underline{U} \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}$	
مكثف وملف تفرعي	$G = 0$ $Y = \omega C - \frac{1}{\omega L}$	$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$	$\underline{I} = \underline{U} \sqrt{(\omega C)^2 - \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$	

4- 14 استخدام مخططات الشعاعية لحساب التيارات والتوترات في الدارة الكهربائية :

يمكن حل أية دارة كهربائية إما تحليلياً وذلك باستخدام العلاقات الرياضية المتعلقة بالممانعات، أو السماحيات، وزوايا فرق الصفحة أو بيانياً باستخدام المخططات الشعاعية وذلك عند رسمها وفق مقياس رسم معين لكل من التيارات والتوترات. [5]

من المخطط الشعاعي لتيارات وتوترات أية دارة مؤلفة من C, L, R نحصل على شعاع محصلة التوترات، وشعاع محصلة التيارات $\underline{I}, \underline{U}$. ومن هذين الشعاعين نستطيع تحديد القيمتين المميزتين لممانعة الدارة وهما:

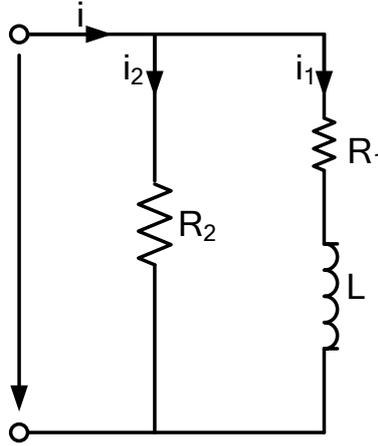
$$Z = \frac{U}{I} \text{ - القيمة الفعالة للممانعة}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \text{ - وزاوية فرق الصفحة أو الطور}$$

4 - 15 - مسائل محلولة :

مسألة (1 - 15 - 4):

لدينا دارة كهربائية مبينة في الشكل (4- 49) وفيها عناصر التوصيل R_1 , L , R_2 وذات قيم معروفة، والمطلوب تحديد قيمة الممانعة الكلية وزاوية الطور باستخدام المخطط الشعاعي. [11]



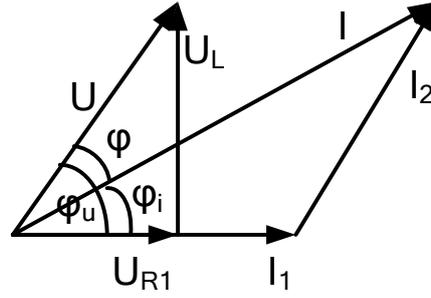
الشكل (4-49)

الحل:

نبدأ بتصميم المخطط الشعاعي برسم شعاع التيار المار في المقاومة R_1 ، بعد ذلك نرسم شعاع التوتر على كل من R_1 و L ، ومن شعاع التوترين \underline{U}_{R_1} , \underline{U}_L نحصل على شعاع التوتر الكلي \underline{U} ، وبذلك نحصل على شعاع التيار المار في المقاومة R_2 . عند ذلك يمكن رسم التيار الكلي كما هو مبين على الشكل (4-50). حينذاك تكون الممانعة الكلية للدارة وزاوية الطور بين التيار والتوتر

$$Z = \frac{U}{I}$$

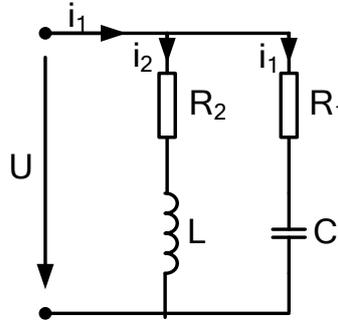
$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$



الشكل (4-50)

مسألة (2 - 15 - 4):

لدينا الدارة المبينة في الشكل (4-51) نفترض أن قيم عناصر توصيل الدارة والتوتر المطبق على مأخذي الدارة معروفة، والمطلوب رسم مخطط شعاعي نوعي للتوترات في الدارة وتياراتها. [11]



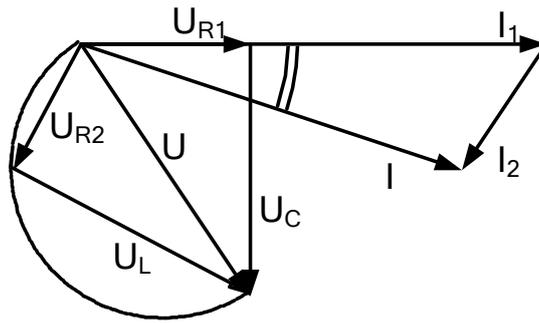
الشكل (4-51)

الحل:

يكون المخطط الشعاعي نوعياً إذا تم تحديد أطوال الأشعة بشكل اختياري وليس بمقياس رسم محدد.

1- نرسم الشعاع I_1 وهو يمثل التيار i_1 .

- 2- نرسم الشعاع \underline{U}_{R2} وهو ينطبق بالصفحة مع الشعاع \underline{I}_1 .
- 3- نرسم الشعاع \underline{U}_C وهو يتأخر عن الشعاع \underline{I}_1 بزاوية $\frac{\pi}{2}$.
- 4- نجمع الشعاعين \underline{U}_{R1} و \underline{U}_C جمعاً شعاعياً فنحصل على شعاع التوتر المطبق على الدارة \underline{U} .
- 5- بما أن الشعاعين $\underline{U}_{R2} + \underline{U}_L = \underline{U}$ وكذلك $\underline{U}_{R2} \perp \underline{U}_L$ نرسم نصف دائرة قطرها \underline{U} ثم نرسم الشعاعين \underline{U}_{R2} و \underline{U}_L على محيطها مع مراعاة أن الشعاع \underline{U}_L يتقدم على الشعاع \underline{U}_{R2} بزاوية $\frac{\pi}{2}$.
- 6- نرسم الشعاع \bar{I}_2 ويكون موازياً لشعاع التوتر \underline{U}_{R2} .
- 7- نجمع الشعاعين \underline{I}_1 و \bar{I}_2 جمعاً شعاعياً فنحصل على شعاع التيار الكلي \underline{I} .



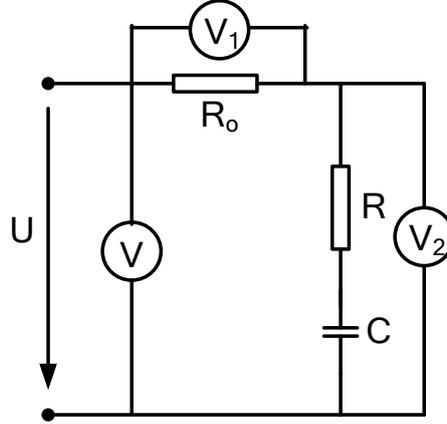
الشكل (4-52)

مسألة (3 - 15 - 4) :

المطلوب إيجاد قيمة R و C للمكثف إذا كانت قيم مؤشرات المقاييس المبينة على

الشكل (4-53) $U = 160[V]$, $U_1 = 100[V]$, $U_2 = 80[V]$ وكانت قيمة

$R_0 = 43.5[\Omega]$ والتردد $f = 50[Hz]$ وذلك باستخدام المخطط الشعاعي. [10]



الشكل (4-53)

الحل:

- أ - نرسم المخطط الشعاعي لهذه الدارة حسب القيم المعطاة بشكل نوعي
- 1- نبدأ برسم شعاع التيار لأن قيمته ثابتة، وهذا الشعاع ينطبق مع المحور الأفقي.
 - 2- شعاع التوتر \bar{U}_1 على طرفي المقاومة R_0 نطبق بالطور مع شعاع التيار.
 - 3- شعاع المركبة الفعلية للتوتر على طرفي مقاومة المكثف \bar{U}_{2a} ينطبق أيضاً مع شعاع التيار.
 - 4- شعاع المركبة الردية للتوتر على طرفي مقاومة المكثف \bar{U}_{2x} يتأخر عن شعاع التيار بزاوية $\frac{\pi}{2}$.
 - 5- محصلة الشعاعين \bar{U}_{2a} و \bar{U}_{2x} هو شعاع التوتر على طرفي المكثف \bar{U}_2 .
 - 6- محصلة الشعاعين \bar{U}_1 و \bar{U}_2 هو شعاع التوتر الكلي على طرفي الدارة \bar{U} كما هو مبين في الشكل (4 - 54).

ب - تحديد مركبات التوتر

1- من المثلث ABC نجد أن:

$$U_2^2 = U_{2a}^2 + U_{2x}^2$$

2- من المثلث OAB نجد:

$$U^2 = (U_{2a}^2 + U_1^2) + U_{2x}^2$$

3- نطرح المعادلة الأولى من الثانية

$$U^2 - U_2^2 = U_1^2 + 2.U_1.U_{2a}$$

ومن هنا نجد المركبة الفعلية للتوتر على أطراف المكثف

$$U_{2a} = \frac{U^2 - U_2^2 - U_1^2}{2.U_1} = 46[V]$$

ومن المعادلة الأولى

$$U_{2x} = \sqrt{U^2 - U_{2a}^2} = 65,5[V]$$

ج - حساب قيمة التيار المار في الدارة

$$I = \frac{U_1}{R_0} = 2,3[A]$$

د - إيجاد قيمة R و C للمكثف

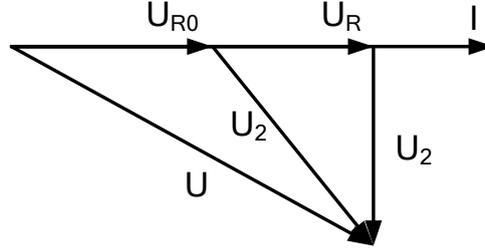
$$U_{2a} = I.R \Rightarrow R = \frac{U_{2a}}{I} = 20[\Omega]$$

$$U_{2x} = I.x_c \Rightarrow x_c = \frac{U_{2x}}{I}$$

$$x_c = \frac{1}{\omega.c} \Rightarrow c = \frac{1}{\omega.x_c}$$

$$c = \frac{I}{\omega.U_{2x}} = \frac{2,3}{2\pi.50.65,5} = 112[\mu F]$$

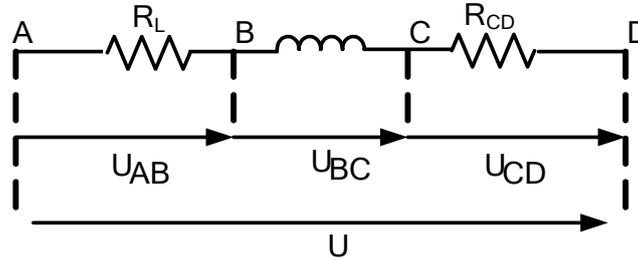
هـ - المخطط الشعاعي



الشكل (4-54)

مسألة (4 - 15 - 4) :

دائرة تيار متناوب تسلسلية كما في الشكل (4-55) تحوي العناصر التالية: مقاومة R_{AB} ، ومقاومة R_{CD} ، وملفاً ذا مقاومة R_L ، و محارضة L ، عند تطبيق توتر قدره $U = 200 [V]$ بتردد $f = 50 [Hz]$ كان التيار المار $I = 10 [A]$ وكانت التوترات التالية:
 $U_{AB} = 80 [V]$ ، $U_{BC} = 100 [V]$ ، $U_{AC} = 145 [V]$



الشكل(4-55)

المطلوب:

- أ- حساب قيمة R_L و L
- ب- حساب قيمة R_{CD} و U_{CD} .
- ج - رسم المخطط الشعاعي للتوترات والتيارات. [12]

الحل:

-أ-

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{80}{10} = 8[\Omega]$$

$$U_{BC} = I \cdot \sqrt{R_L^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$100 = 10 \sqrt{R_L^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$R_L^2 + (\omega \cdot L)^2 = 100$$

$$U_{AC} = I \cdot \sqrt{(R_{AB} + R_L)^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$(8 + R_L)^2 + (\omega \cdot L)^2 = \left(\frac{145}{10}\right)^2$$

وبحل المعادلات نجد

$$R_L = 2,89[\Omega]$$

$$L = 0,03[H]$$

-ب-

$$U \sqrt{(R_{AB} + R_L + R_{CD})^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$200 = 10 \sqrt{(8 + 2,98 + R_{CD})^2 + 9,42^2}$$

$$R_{CD} = 6,75[\Omega]$$

$$U_{CD} = 10 \cdot 6,75 = 67,5[V]$$

ج- المخطط الشعاعي

1- شعاع التيار ينطبق على المحور الأفقي وشعاع التوتر U_{AB} ينطبق على المحور الأفقي

2- شعاع المركبة الفعلية للتوتر U_{BC} ينطبق مع شعاع التيار

$$U_a = I.R_L = 28,2[V]$$

3- شعاع المركبة الردية للتوتر U_{BC} يتقدم على شعاع التيار بزواوية $\frac{\pi}{2}$

$$U_X = I.\omega.L = 94,2[V]$$

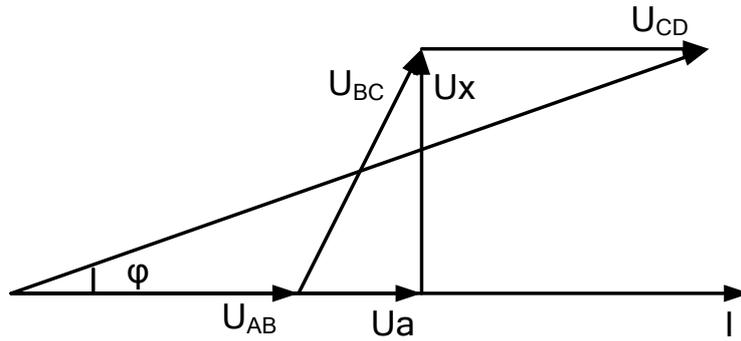
4- محصلة الشعاعين \bar{U}_a و \bar{U}_X عبارة عن الشعاع \bar{U}_{BC} .

5- شعاع التوتر \bar{U}_{CD} يوازي شعاع التيار.

6- نصل النقطة A مع النقطة D فنحصل على شعاع التوتر الكلي المطبق على طرفي الدارة.

7- الزاوية φ هي زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر

$$\varphi = \text{tg}^{-1} \frac{\omega.L}{R} = \text{tg}^{-1} \frac{9,42}{17,64} = 28^\circ$$



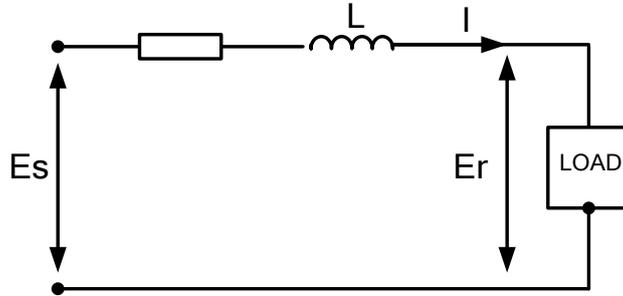
الشكل (4-56)

مسألة (5 - 15 - 4) :

في الدارة المبينة في الشكل (4-57) لدينا :

$$f = 60 \text{ Hz} , X_L = 1,6 \Omega , R = 1,4 \Omega , \underline{I} = 27,1 \angle 0^\circ \text{ A} , \underline{E}_T = 460 \angle 36^\circ \text{ V}$$

احسب قيمة E_s والزاوية بينها وبين التيار .



الشكل (4-57)

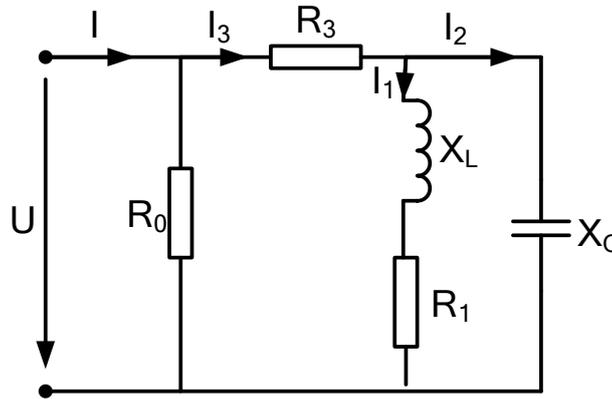
يمكن باختيار التيار كمرجع كما هو معطى في المسألة أن نكتب ما يلي :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= 27,1 \angle 0^\circ [\text{A}] \\ \underline{E}_r &= 460 \angle 36^\circ = 372 + j 270 [\text{V}] \\ \underline{E}_s &= I (R + j X) + E_r \\ \underline{E}_s &= 27,1 (1,4 + j 1,6) + 237 + j 270 \\ \underline{E}_s &= 410 + j 313 = 516 \angle 37^\circ [\text{V}] \end{aligned}$$

مسألة (6 - 15 - 4) :

لدينا الدارة الكهربائية المبينة في الشكل (4-58) وذات المحددات التالية:

$$\begin{aligned} R_0 &= 39[\Omega], R_1 = 7[\Omega], R_3 = 4,5[\Omega] \\ X_L &= 24[\Omega], X_C = 44[\Omega], U_2 = 220[V] \end{aligned}$$



الشكل (4-58)

والمطلوب:

أ- حساب قيم جميع التيارات والتوتر \underline{U}
 ب- رسم المخطط الشعاعي للتيارات والتوترات. [6]
الحل:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{220}{7 + j24} = 2,46 - j8,45$$

$$= 8,8 \cdot e^{-j73,46^\circ} [A]$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{220}{-j44} = j5$$

$$= 5 \cdot e^{j90^\circ} [A]$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 2,46 - j8,4 + j5$$

$$= 2,56 - j3,45$$

$$= 5 \cdot e^{-j54,5^\circ} [A]$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3 = 4,5 \cdot 4,24 \cdot e^{-j54,5^\circ}$$

$$= 19,08 \cdot e^{-j54,5^\circ} [V]$$

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 220 + 11,07 - j15,53$$

$$= 231,07 - j15,53$$

$$= 231,6 \cdot e^{-j3,50^\circ} [V]$$

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{R_0} = \frac{231,6 \cdot e^{-j3,50^\circ}}{39} = 5,94 \cdot e^{-j3,50^\circ}$$

$$= 5,93 - j0,4 [A]$$

$$\underline{I} = \underline{I}_0 + \underline{I}_3 = 5,93 - j0,4 + 2,46 - j3,45 = 8,4 - j3,85$$

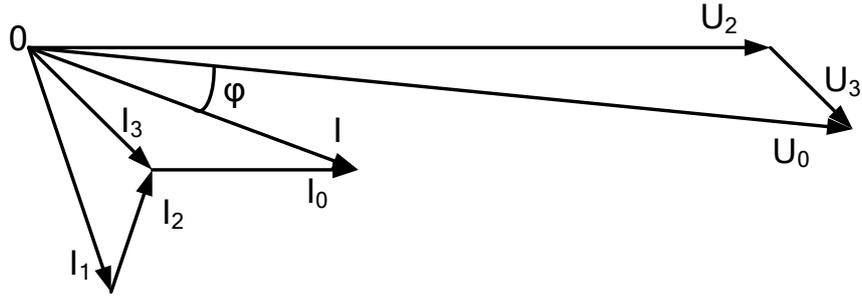
$$= 9,2 \cdot e^{-j24,40^\circ} [A]$$

$$\underline{U} = \underline{U}_0 = 231,6 \cdot e^{-j3,50^\circ} [V]$$

زاوية فرق الصفحة

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -3^\circ 50' - (-24^\circ 40') \approx 21^\circ$$

التوتر يتقدم على التيار بزاوية $\varphi = 21^\circ$ والدارة ذات طبيعة تحريضية.



الشكل (4-59) المخطط الشعاعي

مسألة (7 - 15 - 4) :

لدينا الدارة الكهربائية المبينة على الشكل (4-60) وفيها العناصر التالية [6] :

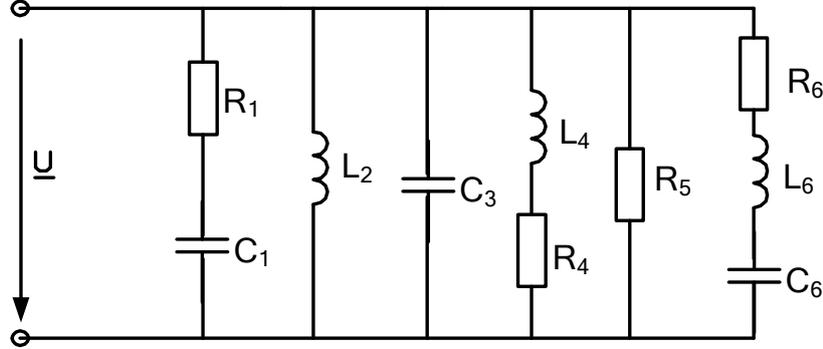
$$R_1 = 3[\Omega], X_{C1} = 2[\Omega], X_L = 4[\Omega]$$

$$X_{C2} = 4[\Omega], R_4 = 3[\Omega], X_{L4} = 2[\Omega]$$

$$R_5 = 5[\Omega], R_6 = 7[\Omega], X_{L6} = 2[\Omega], X_{C6} = 2[\Omega]$$

والمطلوب حساب:

- 1- السماحية الكلية للدارة.
 - 2- التوتر المطبق على طرفي الدارة.
 - 3- القيم الفعالة للتيارات المارة في فروع الدارة.
 - 4- زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر.
 - 5- رسم المخطط الشعاعي للدارة .
- وذلك عندما يكون التيار $I_3 = 1 \text{ [A]}$



الشكل (4-60)

الحل:

1- نحسب السماحية الكلية العقدية للدائرة

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 - jX_{C1}} = \frac{R_1 + jX_{C1}}{R_1^2 + X_{C1}^2} = \frac{3}{13} + j\frac{2}{13} [S]$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{jX_{L2}} = -j0,25 [S]$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-jX_{C3}} = j0,25 [S]$$

$$\underline{Y}_4 = \frac{1}{\underline{Z}_4} = \frac{1}{R_4 + jX_{L4}} = \frac{R_4 - jX_{L4}}{R_4^2 + X_{L4}^2} = \frac{3}{13} - j\frac{2}{12} [S]$$

$$\underline{Y}_6 = \frac{1}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{R_6 + j(X_{L6} - X_{C6})} = \frac{1}{7 + j(2-2)} = \frac{1}{7} [S]$$

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6$$

$$\underline{Y}_{eq} = 0,8 [S]$$

السماحية الكلية تحتوي فقط على قسم حقيقي، وبالتالي الدارة ذات طبيعة أومية.

2- التوتر على طرفي الدارة هو التوتر على طرفي كل فرع من فروع الدارة وذلك لأن كافة الفروع موصولة مع بعضها على التفرع.

$$\underline{U} = \underline{U}_3 = \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3$$

$$\underline{U}_3 = 1 \cdot (-j4) = -j4 = 4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} [V]$$

القيمة الفعالة للتوتر المطبق $U = 4[V]$ التيارات المارة في فروع الدارة

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \left(\frac{3}{13} + j\frac{2}{13}\right) \cdot (-j4) = \frac{8}{13} - j\frac{12}{13} [A]$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = (-j0,25) \cdot (-j4) = -1 [A]$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_4} = \left(\frac{3}{13} - j\frac{2}{12}\right) \cdot (-j4) = -\frac{8}{13} - j\frac{12}{13} [A]$$

$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_5} = \frac{1}{5} \cdot (-j4) = -j\frac{4}{5} [A]$$

$$\underline{I}_6 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_6} = \frac{1}{7} \cdot (-j4) = -j\frac{4}{7} [A]$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 + \underline{I}_4 + \underline{I}_5 + \underline{I}_6$$

$$\underline{I} = -j3,2 = 3,2 e^{-j\frac{\pi}{2}} [A]$$

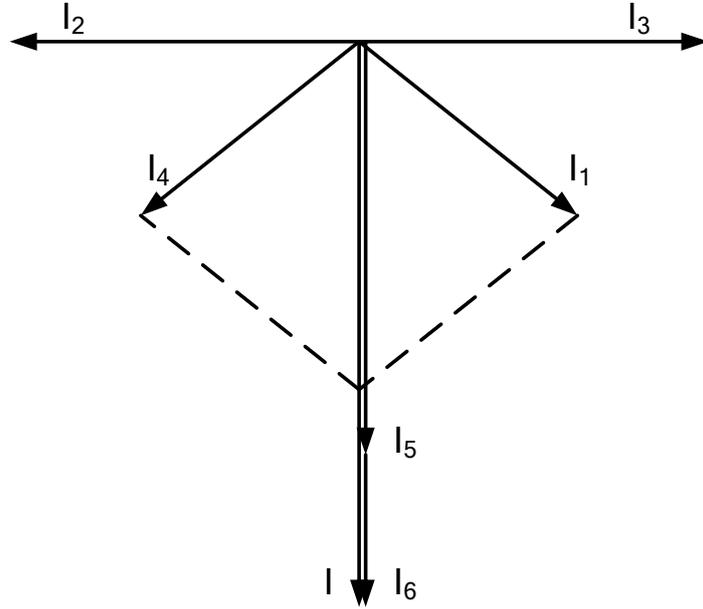
القيمة الفعالة للتيار الكلي

$$I = 3,2 [A]$$

4 - زاوية فرق الصفحة بين التيار والتوتر

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

5 - المخطط الشعاعي: كما هو مبين في الشكل (4-61).

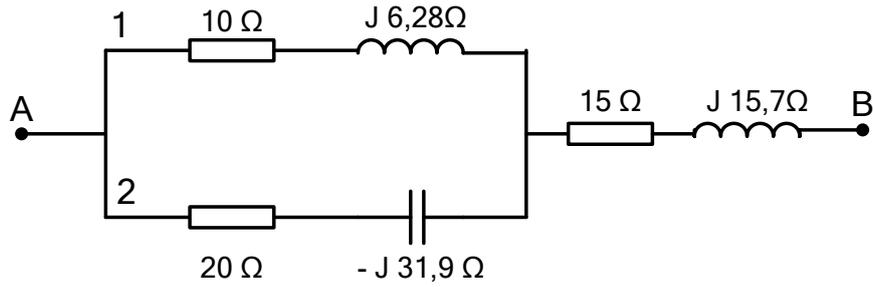


الشكل (4-61) المخطط الشعاعي

4 - 16 - مسائل غير محلولة :

مسألة (1 - 16 - 4) :

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل (4-62) المطلوب حساب الممانعة الكلية للدارة بين النقطتين A و B .



الشكل (4-62)

الجواب :

$$\underline{Z} = 31,8 \angle 35,7^\circ \Omega$$

مسألة (2 - 16 - 4):

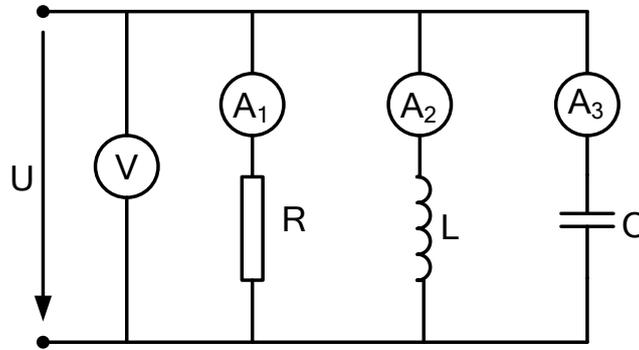
لدينا دارة كهربائية مبينة على الشكل (4-63)، عند تطبيق توتر متناوب قيمته الفعالة $U = 120[V]$ فإن مقاييس الأمبير أعطت القيم التالية:

$$I_1 = 2[A], I_2 = 4[A], I_3 = 3[A]$$

والمطلوب:

أ- حساب محددات الدارة الكهربائية وشدة التيار الكلي.

ب- حساب محددات ثنائي الأقطاب المكافئ. [6]



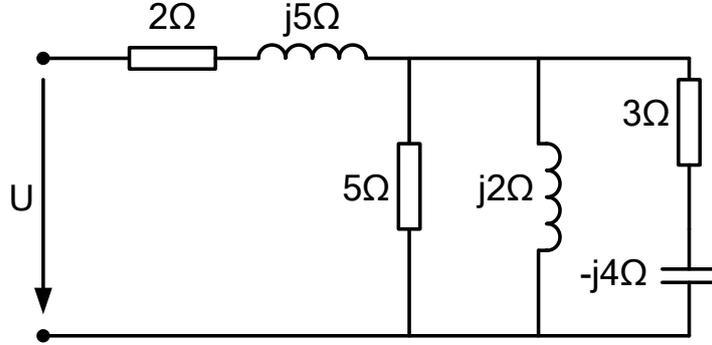
الشكل (4-63)

الأجوبة:

$$I = 2,24[A], R_{eq} = 47,7[\Omega], X_{eq} = -23,85[\Omega]$$

مسألة (3 - 16 - 4):

أوجد قيمة Z_{eq} و Y_{eq} للدارة المبينة في الشكل (4-64)، ثم أوجد التيار الكلي إذا كان توتر المنبع $U = 120 \angle 0^\circ [V]$.



الشكل (4-64)

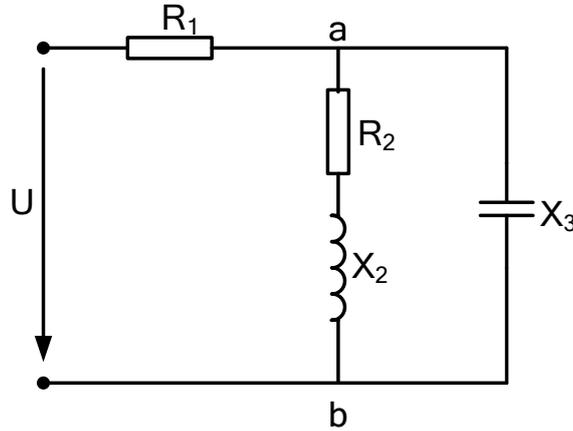
الأجوبة :

$$\underline{Z}_{eq} = 7,42 \angle 62,1^\circ [\Omega] , \underline{Y}_{eq} = 0,135 \angle -62,1^\circ [S]$$

مسألة (4 - 16 - 4) :

احسب قيمة المقاومة R_1 لكي تبلغ القيمة الفعالة للتيار فيها $I_1 = 2 [A]$ عند تطبيق توتر قيمته الفعالة $U = 100 [V]$ على طرفي الدارة المبينة في الشكل (4-65) ذات المحددات التالية :

$$R_2 = 10 [\Omega] , X_2 = 20 [\Omega] , X_3 = 50 [\Omega]$$



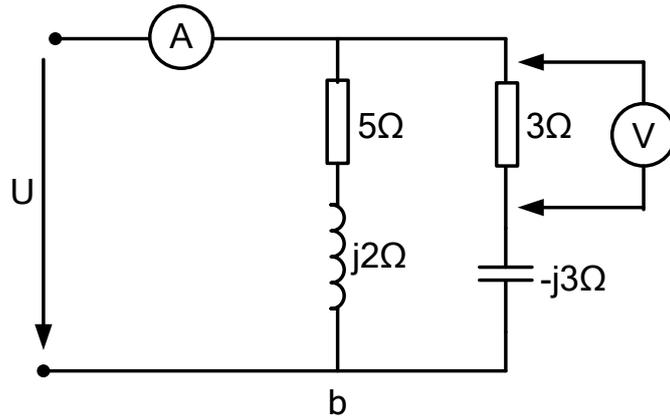
الشكل (4-65)

$$R_1 = 18,3 [\Omega]$$

الجواب :

مسألة (5 - 16 - 4) :

في الدارة التفرعية المبينة في الشكل (4-66) يشير مقياس الفولت إلى 45 V على طرفي المقاومة 3Ω .
أوجد قراءة مقياس الأمبير المبين في الشكل .



الشكل (4-66)

$$I_T = 22,4 \text{ [A]}$$

الجواب :

17-4 الحلول البيانية لدارات التيار المتناوب الأحادية الطور

1-17-4 تحويل دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة على المأخذين وبالعكس:

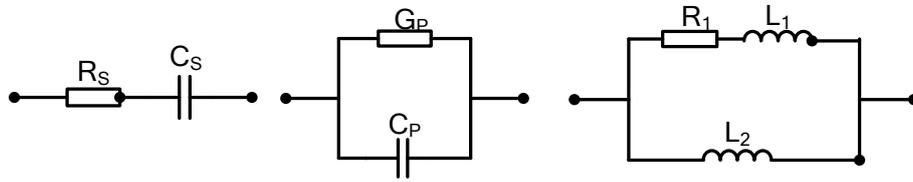
1-1-17-4 التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة :

إذا كان لدينا ثنائي أقطاب عقدي ممثل بدارة تسلسلية مؤلفة من جزء حقيقي وجزء تخيلي، فإنه يمكن أن نحول هذه الدارة إلى دارة تفرعية عقدية مكافئة ونحسب عنصرها الحقيقي والتخيلي على المأخذين [12].

لهذا الغرض نساوي معادلة الممانعة العقدية للدارة المعطاة المراد تحويلها مع مقلوب معادلة السماحية العقدية للدارة المكافئة المطلوب حسابها، وبمساواة الجزئين الحقيقيين

نستطيع حساب المركبة الحقيقية للدارة المكافئة، وبمساواة الجزئين التخيليين نستطيع حساب المركبة التخيلية للدارة المكافئة.
ويكافئ التحويل من دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة على المأخذين التحويل من \underline{Z} إلى \underline{Y} .

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_S + jX_S} = G_P + jB_P \quad (4-223)$$



الشكل (4-67) التحويل من دارة تسلسلية إلى تفرعية

a- دارة تسلسلية b- دارة تفرعية

عند الضرب بمرافق المقام يكون :

$$\frac{R_S - jX_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} - j \frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} \quad (4-224)$$

وبالمقارنة نجد

$$G_P = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{Z_S^2} \quad (4-225)$$

$$R_S \cdot R_P = Z_S^2 \quad (4-226)$$

$$B_P = -\frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} = -\frac{X_S}{Z_S^2} \quad (4-227)$$

$$X_S \cdot X_P = Z_S^2 \quad (4-228)$$

مع ملاحظة أن :

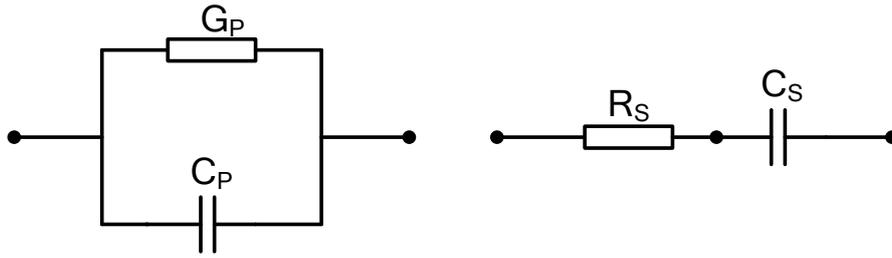
$$B_P = -\frac{1}{X_P} \quad (4-229)$$

2-1-17-4 التحويل من دائرة تفرعية إلى دائرة تسلسلية مكافئة :

في هذه الحالة الدارة المعطاة

$$\underline{Y} = G_P + jB_P \quad [12] \text{ عبارة عن دائرة تفرعية}$$

(4 - 230)



الشكل (4-68) التحويل من دائرة تفرعية إلى تسلسلية

ويكافئ التحويل من دائرة تفرعية إلى دائرة تسلسلية مكافئة على المأخذين التحويل من

\underline{Y} إلى \underline{Z} .

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G_P + jB_P} = R_S + jX_S \quad (4-231)$$

عند الضرب بمرافق المقام يكون

$$\frac{G_P - jB_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} - j \frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} \quad (4-232)$$

وبالمقارنة نجد

$$R_S = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{G_P}{Y_P^2} \quad (4-233)$$

$$G_P \cdot G_S = Y_P^2 \quad (4-234)$$

$$X_S = -\frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} = -\frac{B_P}{Y_P^2}$$

(4-235)

$$B_P \cdot B_S = Y_P^2 \quad (4-236)$$

ونلاحظ هنا أن إشارة الناقص قبل المركبات التخيلية وتغير هذه الإشارة لهذه المركبات عند الانتقال من المسابرة إلى المفاعلة و بالعكس، وينجم هذا التغيير من تعريف كل من X و Y .

18-4 أشكال الاستطاعات :

1-18-4 الاستطاعة اللحظية Instantaneous Power :

قد تمت دراسة هذه الاستطاعة وتبين أن الاستطاعة اللحظية تابع للزمن يتغير بضعف تردد الجهد والتيار المطبقين عل مأخذي ثنائي الأقطاب غير الفعال :

$$P(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u - \varphi_i) \quad (4-237)$$

4-18-2 الاستطاعة الفعالة Active Power:

هي القدرة المستهلكة في ثنائي الأقطاب غير الفعال في وحدة الزمن كأن تشع مثلاً على شكل حرارة أو موجات ضوئية أو كهربية . يرمز لها بالرمز P وتعطى بالعلاقة [15] :

$$P = I . U . \cos \varphi \quad (4 - 238)$$

ومن مثلث التوترات (المخطط الشعاعي لهبوطات التوتر في دارة تسلسلية مؤلفة من R,L أو R,C أو R,L,C) نجد أن :

$$U . \cos \varphi = I . R \quad (4 - 239)$$

بالتالي يمكن كتابة علاقة الاستطاعة الفعالة بشكل آخر :

$$P = R . I^2 \quad (4 - 240)$$

ومن المخطط الشعاعي للتيارات في دارة تفرعية مؤلفة من R,L أو R,C أو R,L,C نجد أن :

$$I . \cos \varphi = G . U \quad (4 - 241)$$

بالتالي يمكن كتابة علاقة الاستطاعة الفعالة بشكل آخر أيضاً :

$$P = G . U^2 \quad (4 - 242)$$

إذاً الاستطاعة الفعالة يمكن كتابتها بثلاثة أشكال :

$$P = U . I . \cos \varphi = R . I^2 = G . U^2 \quad [W] \quad (4 - 243)$$

حيث تقاس بوحدة الوات [W] .

4-18-3 الاستطاعة الردية Reactive Power:

هي القدرة الكهربائية التي يتم اختزانها في ثنائي الأقطاب غير الفعال في وحدة الزمن ثم يعاد توويرها إلى المولد مرة أخرى (يجب أن يكون ثنائي الأقطاب مؤلفاً من مقاومات وهمية) ، يرمز لها بالرمز Q وتعطى بالعلاقة :

$$Q = I . U . \sin \varphi \quad (4 - 244)$$

ومن مثلث التوترات دارة مؤلفة من R , L , C مربوطة على التسلسل نجد:

$$U . \sin \varphi = X . I \quad (4 - 245)$$

إذاً يمكن كتابة علاقة الاستطاعة الردية بالشكل التالي :

$$Q = X . I^2 \quad (4 - 246)$$

ومن المخطط الشعاعي للتيارات دارة تفرعية مؤلفة من R,L أو R,C أو R,L,C نجد أن :

$$I . \sin \varphi = - B . U \quad (4 - 247)$$

إذاً يمكن كتابة علاقة الاستطاعة الردية بالشكل التالي أيضاً :

$$Q = B \cdot U^2 \quad (4-248)$$

إذاً الاستطاعة الردية يمكن كتابتها بثلاثة أشكال :

$$Q = I \cdot U \cdot \sin \varphi = X \cdot I^2 = -B \cdot U^2 \quad [V.A.r] \quad (4-249)$$

حيث تقاس بوحدة فولت . أمبير . ردي [V.A.r] .

4-18-4 الاستطاعة الظاهرية Apparent Power :

هي قيمة حسابية لا تحتوي معنى فيزيائياً كما هي الحال بالنسبة للاستطاعة الردية ،

ويرمز لها بالرمز S وتحسب من العلاقة :

$$S = U \cdot I \quad (4-250)$$

ومن الدارة المؤلفة من R , L , C المربوطة على التسلسل القيمة الفعالة للتوتر :

$$U = I \cdot Z \quad (4-251)$$

بتعويض (4-251) في (4-250) نجد :

$$S = Z \cdot I^2 \quad (4-252)$$

وفي الدارة التفرعية المؤلفة من R , L , C :

$$I = Y \cdot U \quad (4-253)$$

بالتعويض في (4-250) نجد :

$$S = Y \cdot U^2 \quad (4-254)$$

إذاً الاستطاعة الردية يمكن كتابتها بثلاثة أشكال :

$$S = U \cdot I = Z \cdot I^2 = Y \cdot U^2 \quad [V.A] \quad (4-255)$$

حيث تقاس بوحدة فولت . أمبير [V.A] .

5-18-4 حساب الاستطاعة باستخدام الأعداد العقدية :

ليكن التوتر المطبق

$$\underline{U} = |U|(\cos \alpha + j \sin \alpha) = |U| \angle \alpha$$

عنه بالأعداد العقدية بالعلاقة [15] :

$$(4-256)$$

وليكن التيار المار في الدارة معبراً عنه بالأعداد العقدية بالعلاقة :

$$\underline{I} = |\underline{I}|(\cos \beta + j \sin \beta) = |\underline{I}| \angle \beta \quad (4-257)$$

بحيث $(\alpha - \beta)$ هي زاوية فرق الطور بين التيار والتوتر .
تُعرف الاستطاعة الحقيقية المستهلكة في الدارة هي :

$$\underline{P} = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot \cos(\alpha - \beta) \quad (4-258)$$

إذا أجرينا الجداء بالأعداد العقدية لعلاقتي التوتر والتيار نحصل على :

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I} = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \angle \alpha + \beta \quad (4-259)$$

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I} = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + j \sin(\alpha + \beta)]$$

نلاحظ أن الجزء الحقيقي $|\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot \cos(\alpha + \beta)$ لا يمثل الاستطاعة المستهلكة في الدارة التي يجب أن تكون $|\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot \cos(\alpha - \beta)$ وكذلك لا يمثل الجزء التخيلي $|\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot \sin(\alpha + \beta)$ الاستطاعة التي يجب أن تكون $|\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot \sin(\alpha - \beta)$.
للحصول على الاستطاعة الفعالة والرديّة باستخدام الأعداد العقدية يجب إجراء جداء التوتر معبراً عنه بالعدد العقدي بمرافق التيار معبراً عنه بالعدد العقدي .

العدد العقدي المرافق للتيار السابق :

$$\underline{I}^* = |\underline{I}| \angle -\beta = |\underline{I}|(\cos \beta - j \sin \beta) \quad (4-260)$$

والاستطاعة الظاهرية S تحسب من العلاقة :

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot \angle \alpha - \beta$$

$$\underline{S} = |\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \cdot [\cos(\alpha - \beta) + j \sin(\alpha - \beta)] \quad (4-261)$$

وهكذا فإن الجزء الحقيقي يمثل الاستطاعة الفعالة والجزء التخيلي يمثل الاستطاعة الرديّة والقيمة المطلقة للاستطاعة تمثل الاستطاعة الظاهرية .

إذاً يمكن تمثيل قيم الاستطاعة المعروفة (فعالة - رديّة - ظاهريّة) كأشعة من حاصل

جداء الشعاعين \underline{I}^* و \underline{U} أو الشعاعين \underline{U}^* و \underline{I} حيث \underline{U}^* هو الشعاع المرافق

للشعاع \underline{U} وحيث $\psi_u - \psi_i = \varphi$.

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U \cdot I \cos \varphi + jU \cdot I \sin \varphi$$

$$\underline{U}^* \cdot \underline{I} = U \cdot I \cdot e^{j(\psi_u - \psi_i)} = U \cdot I \cos \varphi - jU \cdot I \sin \varphi$$

ومنه تكون الاستطاعة الفعالة :

$$\operatorname{Re}\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\} = \operatorname{Re}\{\underline{U}^* \cdot \underline{I}\} = U \cdot I \cdot \cos \varphi = P \quad (4-262)$$

والاستطاعة الردية :

$$J\{\underline{U} \cdot \underline{I}^*\} = -J\{\underline{U}^* \cdot \underline{I}\} = U \cdot I \cdot \sin \varphi = Q \quad (4-263)$$

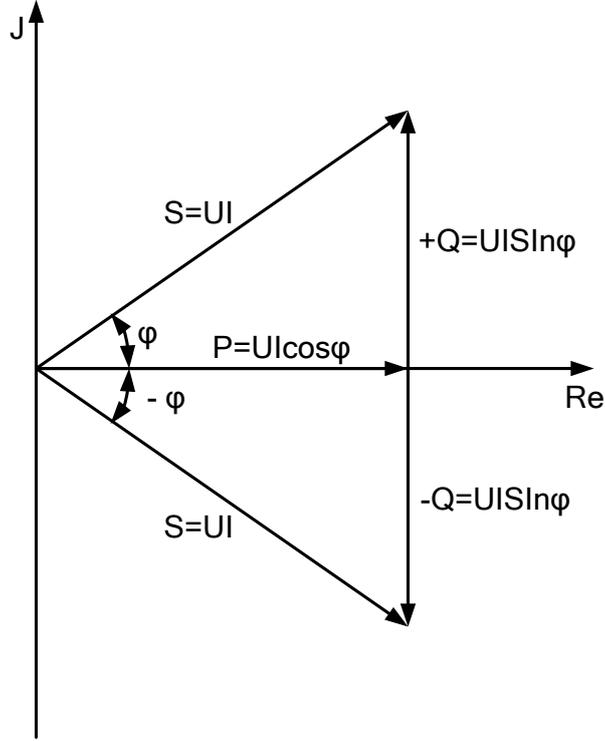
والاستطاعة الظاهرية :

$$\underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ \quad (4-264)$$

$$\underline{U}^* \cdot \underline{I} = P - jQ \quad (4-265)$$

$$(4-266) \quad |\underline{U} \cdot \underline{I}^*| = |\underline{U}^* \cdot \underline{I}| = U \cdot I = S$$

ويبين الشكل (4-69) التمثيل الشعاعي للاستطاعات الثلاث حيث تظهر الاستطاعة الفعالة على المحور الحقيقي والاستطاعة الردية الموجبة على المحور التخيلي (الردية) والاستطاعة الردية السالبة على المحور التخيلي (الردية) السالب .



الشكل (4-69) التمثيل الشعاعي للاستطاعات

19-4 مسائل محلولة :

مسألة (1 - 19 - 4) :

نطبق على الممانعة $Z = 3+j4[\Omega]$ التوتر $\underline{U} = 100e^{j30}$ [V] المطلوب رسم مثلث الاستطاعة وتحديد قيم الاستطاعات. [7]

الحل:

يمكن تحديد مثلث الاستطاعة بأربع طرائق، لهذا الغرض نحسب أولاً التيار المار في الممانعة \underline{Z} .

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100.e^{j30^\circ}}{(3 + j4)} = \frac{100.e^{j30^\circ}}{5.e^{j53,1^\circ}}$$

$$= 20.e^{-j23,1^\circ} \text{ [A]}$$

وبذلك يكون التوتر الهابط على المقاومة R هو:

$$\underline{U}_R = \underline{I}.R = 20.e^{-j23,1^\circ} [V]$$

ويكون التوتر الهابط على التحريض L هو:

$$\underline{U}_L = \underline{I}.jX_L = 20.e^{-j23,1^\circ}.4.e^{j90^\circ} = 80.e^{j66,9^\circ} [V]$$

الطريقة الأولى:

$$P = I^2.R = 20^2.3 = 1200[W]$$

$$Q = I^2.X_L = 20^2.4 = 1600[VAR]$$

$$S = I^2.Z = 20^2.5 = 2000[VA]$$

الطريقة الثانية:

$$P = \frac{U_R^2}{R} = \frac{60^2}{3} = 1200[W]$$

$$Q = \frac{U_L^2}{X_2} = \frac{80^2}{4} = 1600[VAR]$$

$$S = \frac{U^2}{Z} = \frac{100^2}{5} = 2000[VA]$$

الطريقة الثالثة:

$$P = U.I.\cos\varphi = 100.20.\cos 53,1 = 1200[W]$$

$$Q = U.I.\sin\varphi = 100.20.\sin 53,1 = 1600[VAR]$$

$$S = U.I. = 100.20. = 2000[VA]$$

الطريقة الرابعة:

$$\underline{S} = \underline{U}.\underline{I}^* = 100.e^{J30} .20.e^{J23,1} = 2000.e^{J53,1}[VA]$$

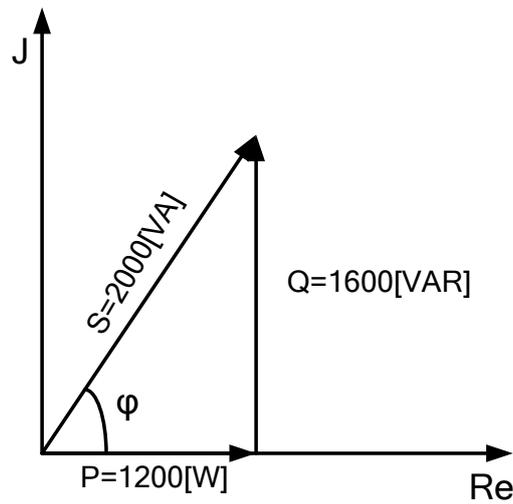
$$\underline{S} = 1200 = +J1600[VA]$$

ومنه:

$$P = \text{Re}[\underline{S}] = 1200[W]$$

$$Q = \text{Im}[\underline{S}] = 1600[VAR]$$

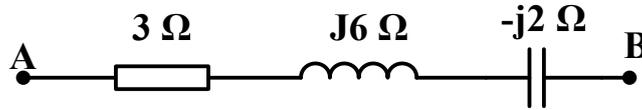
وبين الشكل (4-70) مثلث الاستطاعة المطلوب.



الشكل (4-70) مثلث الاستطاعة

مسألة (2 - 19 - 4) :

نطبق على الدارة المبينة في الشكل (4-71) التوتر $\underline{U} = 50.e^{-j90}[V]$ المطلوب رسم مثلث الاستطاعة وتحديد قيم استطاعاته. [9]



الشكل (4-71)

الحل:

نحسب التيار المار في الدارة:

$$\underline{Z} = (3 + j6 - j2) = (3 + j4) = 5.e^{j53.1}[\Omega]$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{50e^{-j90}}{5e^{j53.1}} = 10e^{j143.1}[A]$$

1 . الاستطاعة الفعلية:

$$P = I^2 . R = 10^2 . 3 = 300[W]$$

2 . الاستطاعة الردية التحريضية:

$$Q_L = I^2 . X_L = 10^2 . 6 = 600[VAR]$$

3 . الاستطاعة الردية السعوية:

$$Q_C = I^2 . X_C = 10^2 . (-2) = -200[VAR]$$

4 . الاستطاعة الظاهرية:

$$S = I^2 \cdot Z = 10^2 \cdot 5 = 500[VA]$$

ويبين الشكل (4-72) مثلث الاستطاعة موضحاً عليه الاستطاعة التخيلية التحريضية الموجبة والاستطاعة التخيلية السعوية السالبة. إلا أنه يمكننا تحديد مثلث الاستطاعة مباشرة وبدون الرجوع إلى الاستطاعتين التخيليتين الإفراديتين، كما ورد في الطريقة التالية:

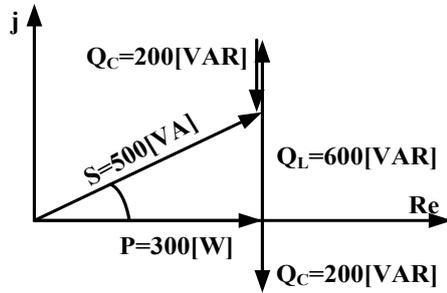
$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 50 \cdot e^{-j90} \cdot 10 \cdot e^{j143,1} \\ &= 500 \cdot e^{j53,1} = 300 + j400[VA] \end{aligned}$$

ومنه:

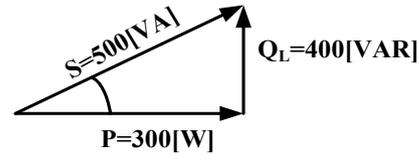
$$P = \text{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*] = 300[W]$$

$$Q = I_m [\underline{U} \cdot \underline{I}^*] = 400[VAR]$$

ونرسم مثلث الاستطاعة كما هو مبين في الشكل (4-73).



الشكل (4-72)



الشكل (4-73)

4-20 تعميم طرق حساب دارات التيار المستمر على دارات التيار المتناوب:

يمكن تعميم جميع القواعد الأساسية، والقوانين المتعلقة بالتيار المستمر التي تمت دراستها في الفصل السابق على دارات التيار المتناوب، وذلك بعد كتابتها بالشكل العقدي المناسب، حيث نبدل المقاومة R بالممانعة Z ونبدل أيضاً الناقلية G بالسماحية Y، أي

أن الفارق هو أننا في التيار المستمر نحسب بالقيم الحقيقية بينما في التيار المتناوب نجري الحسابات بالقيم العقدية.

4-20-1 : القوانين والقواعد الأساسية:

التيار المتناوب

$$\sum i_{in} = \sum i_{out}$$

$$\sum U = \sum E \quad \sum \underline{U} = \sum \underline{E}$$

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad \frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

$$\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

إذا احتوت ممانعة مدخل ثنائي الأقطاب مركبة وهمية سعوية يكون الفرق بين زاويتي طور التوتر والتيار سالباً ($\psi_u - \psi_i = -\phi$) وتحدث عند ذلك عن الاستطاعة التخيلية السالبة .

أما إذا كانت المركبة التخيلية تحريضية يكون الفرق بين زاويتي طور الجهد والتيار موجباً ($\psi_u - \psi_i = \phi$) وتحدث عند ذلك عن الاستطاعة الوهمية الموجبة .

إذا احتوى ثنائي الأقطاب سعة وتحريضاً في آنٍ معاً عندها تزيل الاستطاعتان الوهميتان السالبة والموجبة بعضهما ، أي تتأرجح الاستطاعة الوهمية بين السعة والملف ولا يلاحظ المولد تأرجح القدرة ضمن ثنائي الأقطاب ، في تقنية التيار العالي تسمى هذه العملية بتحسين عامل الاستطاعة وفي تقنية التيار الضعيف تسمى ظاهرة الطنين .