

Chapter 9

الانتقالات باستخدام نظريات الطاقة

Deflections Using Energy Methods

هدف الفصل:

استخدام مبدأ العمل الافتراضي (الوهمي) لإيجاد الانتقالات على الجوائز الشبكية والجوائز والإطارات

العمل الخارجي وطاقة التشوه

External Work and Strain Energy

تعتمد أغلب نظريات الطاقة على مبدأ مصونية الطاقة الذي ينص على ما يلي:

العمل الذي تقوم به القوى الخارجية المطبقة على منشأ ما U_e يتحول إلى عمل داخلي أو طاقة تشوه U_i تتطور خلال تشوه المنشأ

$$U_e = U_i$$

(9-1)

إذا لم يتم تجاوز حد المرونة فإن طاقة التشوه المرنة تعيد المنشأ إلى وضعيته غير المتشوّهة عند إزالة الأحمال.

External Work-Force العمل الخارجي لقوة

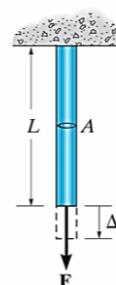
عندما تقوم قوة F بانتقال قدره dx وبنفس اتجاهها فستنتج عملاً قدره $dU_e = F dx$

فإذا أحدثت القوة انتقالاً كلياً قدره x فيصبح العمل الناتج:

$$U_e = \int_0^x F dx \quad (9-2)$$

لندرس تأثير القوة المحورية F المطبقة في نهاية القضيب المبين جانباً. عندما يتم زيادة القوة تدريجياً من الصفر حتى تبلغ قيمة نهائية $F = P$ فتكون استطالة القضيب Δ

$$F = (P/\Delta) x.$$



September 26, 2020

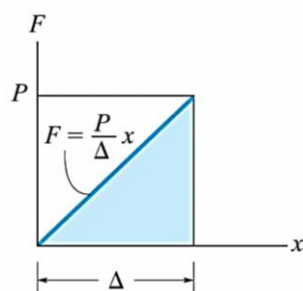
Structural Analysis

Prof. M. Samara

3

بالتعويض في المعادلة 9-2 وبإجراء التكامل من 0 إلى Δ ينتج:

$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad (9-3)$$



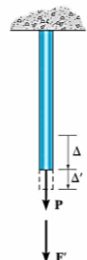
تمثل هذه القيمة مساحة المثلث المضلل

September 26, 2020

Structural Analysis

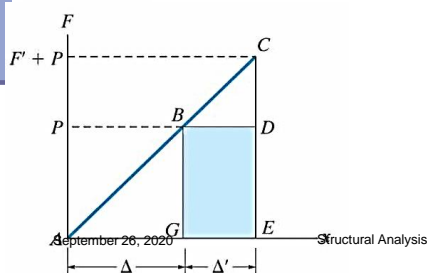
Prof. M. Samara

4



لنفرض أن القوة P مطبقة سلفاً على القضيب
وأن قوة أخرى F' طبقت الآن عليه فتسببت
بانفعال إضافي قدره Δ' فستنتج القوة P عند
انتقالها بمقدار Δ' عملاً يساوي:

$$U_e' = P\Delta' \quad (9-4)$$



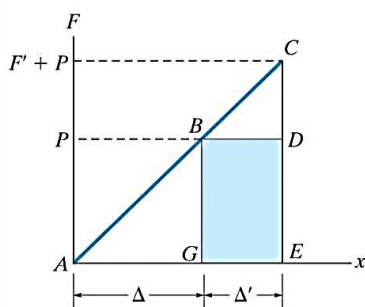
هنا يجب الانتباه إلى أن شدة القوة P ثابتة
وأن الانتقال Δ' نتج عن القوة F' .
يمثل المستطيل المظلل عمل القوة P عندما
انتقلت بمقدار Δ'

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

5



- يمثل المثلث ABG عمل القوة P عندما
انتقلت بمقدار Δ
- يمثل المثلث BCD عمل القوة F' عندما
انتقلت بمقدار Δ'
- يمثل المستطيل $BDEG$ عمل القوة P
عندما انتقلت بمقدار Δ'
- إذاً عندما طبقت القوة P على القضيب
وأتبعت بالقوة F' فإن المثلث ACE يمثل
عمل القوتين

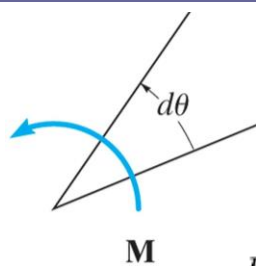
September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

6

العمل الخارجي لعزم External Work-Moment



- العمل الذي يقوم به العزم M نتيجة احداثه دوران قدره $d\theta$ يساوي $dU_e = M d\theta$
- فإذا كانت زاوية الدوران النهائية θ فيصبح العمل المنجز:

$$U_e = \int_0^{\theta} M d\theta \quad (9-5)$$

إذا طُبِق العزم تدريجياً ابتداءً من 0 حتى قيمة نهائية M فسينتج عمل قدره:

$$U_e = \frac{1}{2} M\theta \quad (9-6)$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

7

- إذا كان العزم M مطبق سلفاً على المنشأ وحصل عنده دوران θ' بسبب أحمال أخرى فسينتج عن هذا العزم عملاً قدره:

$$U_e' = M\theta' \quad (9-7)$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

8

طاقة التشوه الناتجة عن القوة المحورية

Strain Energy-Axial Force

- عندما تُطبق قوة محورية N تدريجياً على قضيب فسيكون العمل الخارجي لهذه القوة مساوياً لطاقة التشوه المرنة التي اختزنت فيه.
- فإذا كانت مادة القضيب مرنة خطية فإن:

$$\sigma = E\epsilon, \quad \sigma = N/A, \quad \epsilon = \Delta/L \Rightarrow N/A = E(\Delta/L)$$

حيث: L و A هما طول القضيب ومساحة مقطعه العرضي.

- وعليه ستكون الاستطالة النهائية للقضيب:

$$\Delta = \frac{NL}{AE} \quad (9-8)$$

بالتعويض في المعادلة 9-3 نحدد طاقة التشوه المخزنة في القضيب:

$$U_i = \frac{N^2L}{2AE} \quad (9-9)$$

September 26, 2020

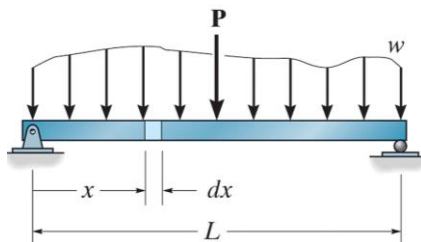
Structural Analysis

Prof. M. Samara

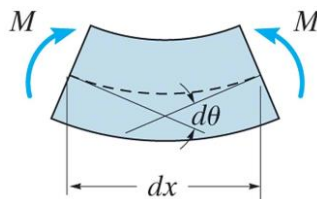
9

طاقة التشوه الناتجة عن الانعطاف

Strain Energy-Bending



يتعرض الجائز المبين إلى الأحمال P و w التي طبقت تدريجياً فنتج عنها عزم داخلي M في المقطع الواقع على بعد x



فينتج دوران $d\theta$ في العنصر التفاضلي الذي طوله dx
 $d\theta = (M/EI) dx.$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

10

تُحدد طاقة التشوه في العنصر التفاضلي بتطبيق المعادلة 9-6 لأن العزم تم تطبيقه تدريجياً فينتج:

$$dU_i = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (9-10)$$

ويتم تحديد طاقة التشوه المخزنة في الجائز بإجراء التكامل على طول الجائز أي:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (9-11)$$

September 26, 2020

Structural Analysis

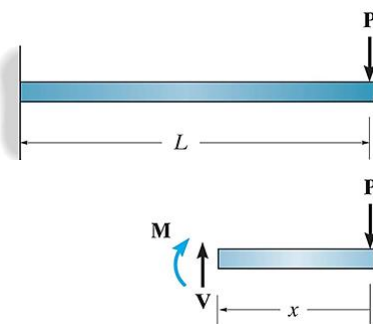
Prof. M. Samara

11

مبدأ العمل والطاقة

Principle of Work and Energy

أوجد الانتقال Δ الناتج عن تطبيق القوة P تدريجياً



$$U_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad \text{العمل الخارجي}$$

$$M = -Px$$

العزم الداخلي الناتج في مقطع على بعد x

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

12

تحدد طاقة التشوه في الجائز كما يلي:

$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{1}{6} \frac{P^2 L^3}{EI}$$

بمساواة العمل الخارجي بطاقة التشوه الداخلي ينتج Δ

$$U_e = U_i$$

$$\frac{1}{2} P \Delta = \frac{1}{6} \frac{P^2 L^3}{EI}$$

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis

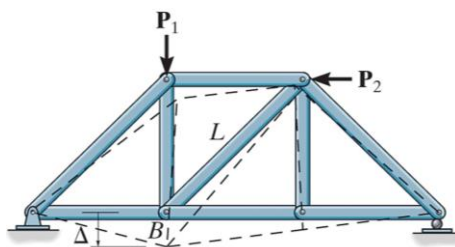
Prof. M. Samara

13

تطبيق مبدأ العمل الافتراضي (الوهمي) على الجوائز الشبكية

Method of Virtual Work: Trusses

لنفرض أن النقطة B من الجائز الشبكي انتقلت بمقدار Δ تحت تأثير القوى الحقيقية P_1, P_2 والمطلوب تحديد هذا الانتقال باستخدام مبدأ العمل والطاقة



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

14

لتحديد الانتقال Δ نطبق أولاً في النقطة B من الجانز الشبكي واحدة القوى الافتراضية (الوهمية) وباتجاه الانتقال المطلوب تحديده فينتج في عنصر نموذجي من الجانز الشبكي قوة وهمية قدرها n أو $(F_{v,j})$ ثم نطبق القوى الحقيقية P_1, P_2 فتسبب انتقال العقد B بمقدار Δ وتسبب أيضاً تغير طول العنصر النموذجي بمقدار NL/AE حيث N أو $(F_{A,j})$ القوة الحقيقية الناتجة في العنصر النموذجي فينتج عمل داخلي افتراضي (وهمي) أو طاقة تشوه داخلية وهمية في كل عناصر الجانز الشبكي تحدد كما يلي:

$$\sum \frac{nNL}{AE} \quad \text{or} \quad \sum_{j=1} \frac{F_{A,j} F_{v,j} L_j}{E_j A_j}$$

طول العنصر L_j ومساحة مقطعه العرضي A_j ومعامل مرونته E_j

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

15

إن العمل الخارجي الوهمي الذي قامت به واحدة القوى الوهمية يساوي $1 \cdot \Delta$ بمساواة العمل الخارجي الوهمي بالعمل الداخلي الوهمي ينتج:

$$1 \cdot \Delta = \sum \frac{nNL}{AE} \quad (9-15)$$

September 26, 2020

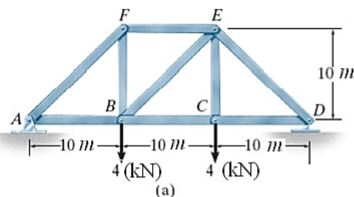
Structural Analysis

Prof. M. Samara

16

EXAMPLE 9-1

Determine the vertical displacement of joint C of the steel truss shown in Fig. 9-8a. The cross-sectional area of each member is $A = 400 \text{ mm}^2$ and $E = 200 \text{ GPa}$



Solution

Virtual Forces n . Only a vertical 1 kN load is placed at joint C, and the force in each member is calculated using the method of joints. The results are shown in Fig. 9-8b. Positive numbers indicate tensile forces and negative numbers indicate compressive forces.

Real Forces N . The real forces in the members are calculated using the method of joints. The results are shown in Fig. 9-8c.

Virtual-Work Equation. Arranging the data in tabular form, we have

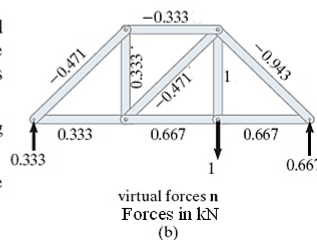
Member	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN \cdot m)
--------	----------	----------	---------	----------------------

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

17



EXAMPLE 9-1 (Continued)

Virtual-Work Equation. Arranging the data in tabular form, we have

Member	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN \cdot m)
AB	0.333	4	10	13.33
BC	0.667	4	10	26.67
CD	0.667	4	10	26.67
DE	-0.943	-5.66	14.14	75.42
FE	-0.333	-4	10	13.33
EB	-0.471	0	14.14	0
BF	0.333	4	10	13.33
AF	-0.471	-5.66	14.14	37.71
CE	1	4	10	40
				$\Sigma 246.47$

Thus $1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{246.47 \text{ (kN}\cdot\text{m)}}{AE}$

substituting the numerical values for A and E , we have

$\Delta_{C_v} = 3 \text{ mm}$

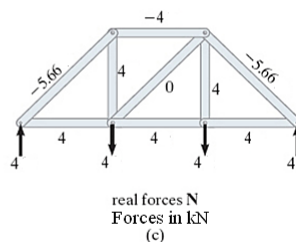


Fig. 9-8

September 26, 2020

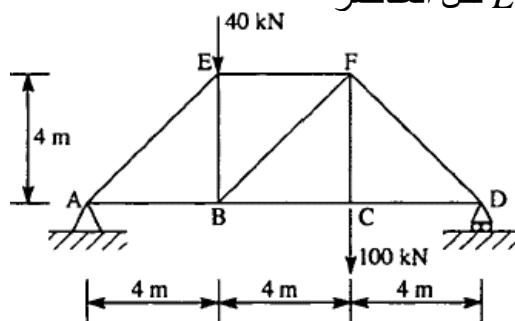
Structural Analysis

Prof. M. Samara

18

مثال

حدد الانتقال الشاقولي للعقدة B والانتقال الأفقي للمسند D من الجائز الشبكي المبين في الشكل معتبراً أن $A=1800 \text{ mm}^2$ و $E=200 \text{ GPa}$ لكل العناصر

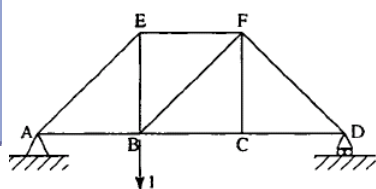


September 26, 2020

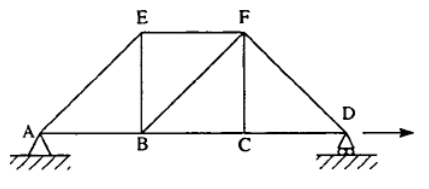
Structural Analysis (a) Prof. M. Samara

19

لحساب الانتقال الشاقولي للعقدة B والانتقال الأفقي للمسند D باستخدام القوى الوهمية الشاقولية عند B وكذلك نطبق واحدة القوى الوهمية الأفقية عند D كما هو مبين في الشكلين (b) و (c)



(b)



(c)

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

20

- العمل الوهمي الذي تقوم به واحدي القوى الوهميتين يساوي $1\delta_{D,h}$ و $1\delta_{B,v}$ على الترتيب
- العمل الوهمي الداخلي أو طاقة التشوه الداخلية الوهمية المخزنة في كل العناصر يساوي:

$$\sum_{j=1} \frac{F_{A,j} F_{v,j} L_j}{E_j A_j}$$

بما أن $E=200 \text{ GPa}$ و $A=1800 \text{ mm}^2$ لكل العناصر فيكفي حساب

$$\sum_{j=1} F_{A,j} F_{v,j} L_j \text{ ثم نقسم الناتج على } EA$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

21

Member	L(m)	F_A (kN)	$F_{1,B}$	$F_{1,D}$	$F_A F_{1,B} L$ (kN m)	$F_A F_{1,D} L$ (kN m)
AE	5.7	-84.9	-0.94	0	+451.4	0
AB	4.0	+60.0	+0.67	+1.0	+160.8	+240.0
EF	4.0	-60.0	-0.67	0	+160.8	0
EB	4.0	+20.0	+0.67	0	+53.6	0
BF	5.7	-28.3	+0.47	0	-75.2	0
BC	4.0	+80.0	+0.33	+1.0	+105.6	+320.0
CD	4.0	+80.0	+0.33	+1.0	+105.6	+320.0
CF	4.0	+100.0	0	0	0	0
DF	5.7	-113.1	-0.47	0	+301.0	0
					$\Sigma = +1263.6$	$\Sigma = +880.0$

- بمساوات العمل الداخلي مع العمل الخارجي ينتج:

$$1\delta_{B,v} = \frac{1263.6 \times 10^6}{200000 \times 1800} \Rightarrow \delta_{B,v} = 3.51 \text{ mm}$$

$$1\delta_{D,h} = \frac{880 \times 10^6}{200000 \times 1800} \Rightarrow \delta_{D,h} = 2.44 \text{ mm}$$

September 26, 2020

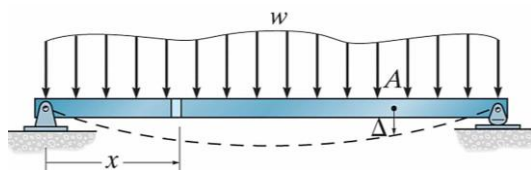
Structural Analysis

Prof. M. Samara

22

تطبيق مبدأ العمل الافتراضي (الوهمي) على الجوائز والإطارات Method of Virtual Work: Beams and Frames

لنفرض أن النقطة A من الجائز المبين في الشكل انتقلت بمقدار Δ تحت تأثير القوى الحقيقية المطبقة والمطلوب تحديد هذا الانتقال باستخدام مبدأ العمل والطاقة



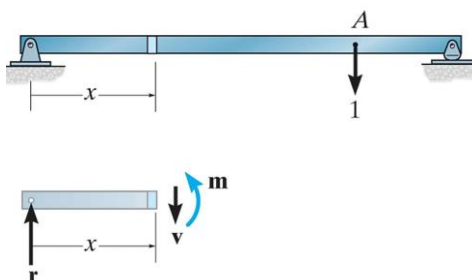
September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

23

■ لتحديد الانتقال Δ نطبق أولاً في النقطة A من الجائز واحدة القوى الافتراضية (الوهمية) وباتجاه الانتقال المطلوب تحديده فينتج عزم وهمي قدره m أو (M_v) عند مقطع ما يبعد عن الطرف الأيسر من الجائز



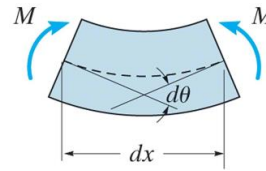
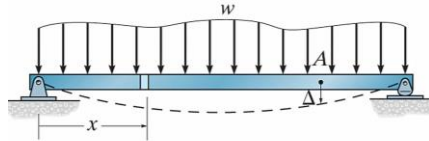
September 26, 2020

Structural Analysis

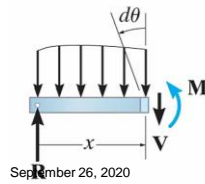
Prof. M. Samara

24

ثم نطبق القوى الحقيقية فتسبب انتقال النقطة A بمقدار Δ وتسبب أيضاً تشوه عنصر نموذجي تفاضلي طوله dx بمقدار $d\theta = (M / EI) dx$ حيث M أو (M_A) هو العزم الحقيقي الناتج في العنصر النموذجي



$$d\theta = (M / EI) dx$$



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

25

فتنتج واحدة القوى الوهمية عملاً خارجياً قدره: $1 \cdot \Delta$
وينتج العزم الداخلي الوهمي m أو (M_v) عملاً داخلياً قدره:
($m d\theta = m(M/ EI) dx$)

بجمع الأعمال الداخلية الوهمية الناتجة في كل العناصر التفاضلية المكون منها الجائز ينتج:

$$\int_0^L \frac{mM}{EI} dx \quad \text{or} \quad \int_L \frac{M_A M_v}{EI} dx$$

بمساواة العمل الخارجي الوهمي بالعمل الداخلي الوهمي ينتج:

$$1 \cdot \Delta = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx \quad (9-18)$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

26

بشكل مشابه إذا طلب تحديد ميل المماس θ في نقطة ما من المنحني المرن للجائز نطبق واحدة العزم الوهمي في تلك النقطة فينتج عزم وهمي داخلي m_θ وستقوم واحدة العزم بعمل خارجي قدره $1 \cdot \theta$ وعليه:

$$1 \cdot \theta = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \quad (9-19)$$

عندم يحدث تغير في الأحمال على مجاز الجائز يتم تقسيم المجاز إلى مجالات بحيث لا يحتوي أي منها على تغير في الأحمال، أي أن لكل منها معادلة عزم تختلف عن المجال الأخرى وبالتالي يُجرى التكامل على كل مجال على حدى ثم تُجمع نتائج التكاملات

September 26, 2020

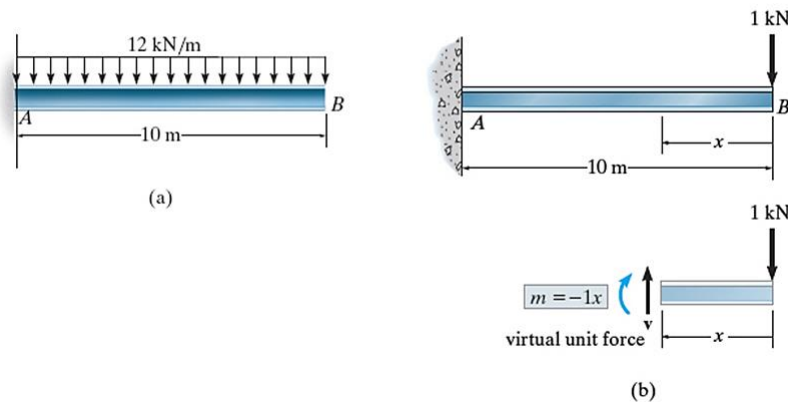
Structural Analysis

Prof. M. Samara

27

EXAMPLE 9-4

Determine the displacement of point B of the steel beam shown in Fig. 9-13a. Take $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 500(10^6) \text{ mm}^4$.



September 26, 2020

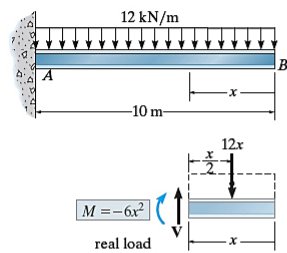
Structural Analysis

Prof. M. Samara

28

EXAMPLE 9-4 (Continued)

Solution



(c)
Fig. 9-13

Virtual Moment m . The vertical displacement of point B is obtained by placing a virtual unit load of 1 kN at B , Fig. 9-13b. By inspection there are no discontinuities of loading on the beam for both the real and virtual loads. Thus, a *single* x coordinate can be used to determine the virtual strain energy. This coordinate will be selected with its origin at B , since then the reactions at A do not have to be determined in order to find the internal moments m and M . Using the method of sections, the internal moment m is formulated as shown in Fig. 9-13b.

Real Moment M . Using the *same* x coordinate, the internal moment M is formulated as shown in Fig. 9-13c.

Virtual-Work Equation. The vertical displacement of B is thus

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_B = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{10} \frac{(-1x)(-6x^2)}{EI} dx$$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_B = \frac{15(10^3) \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI}$$

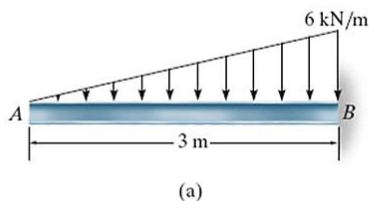
or

$$\Delta_B = \frac{15(10^3) \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{200(10^6) \text{ kN/m}^2(500(10^6) \text{ mm}^4)(10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.150 \text{ m} = 150 \text{ mm} \quad \text{Ans.}$$

EXAMPLE 9-5

Determine the tangential rotation at point A of the steel beam shown in Fig. 9-14a. Take $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 60(10^6) \text{ mm}^4$.



(a)

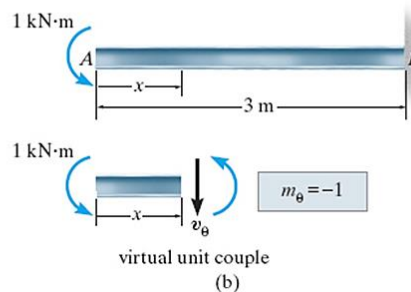


Fig. 9-14

EXAMPLE 9-5 (Continued)

Solution

Virtual Moment m_θ . The tangential rotation of point A is obtained by placing a virtual unit couple of $1 \text{ kN} \cdot \text{m}$ at A , Fig. 9-14b. A single x coordinate can be used to determine the virtual strain energy. This coordinate will be selected with its origin at A , in order to find the internal moments m_θ and M . Using the method of sections, the internal moment m_θ is formulated as shown in Fig. 9-14b.

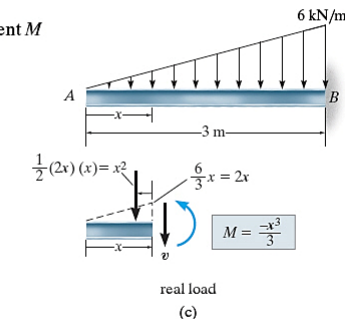
Real Moment M . Using the same x coordinate, the internal moment M is formulated as shown in Fig. 9-14c.

Virtual-Work Equation. The tangential rotation at A is thus

$$\begin{aligned} (1 \text{ kN} \cdot \text{m}) \cdot \theta_A &= \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx \\ &= \int_0^3 \frac{(-1) \left(\frac{-x^3}{3} \right)}{EI} dx \\ &= \frac{1}{3EI} \int_0^3 x^3 dx \\ &= \frac{6.75}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 (60(10^6) \text{ mm}^4) (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)} \end{aligned}$$

or

$$\theta_A = 0.000563 \text{ rad}$$



Ans.

EXAMPLE 9-8

Determine the horizontal displacement of point C on the frame shown in Fig. 9-17a. Take $E = 200 \text{ GPa}$ and $I = 250 \times 10^6 \text{ mm}^4$ for both members.

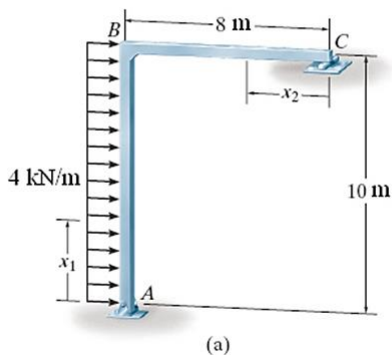
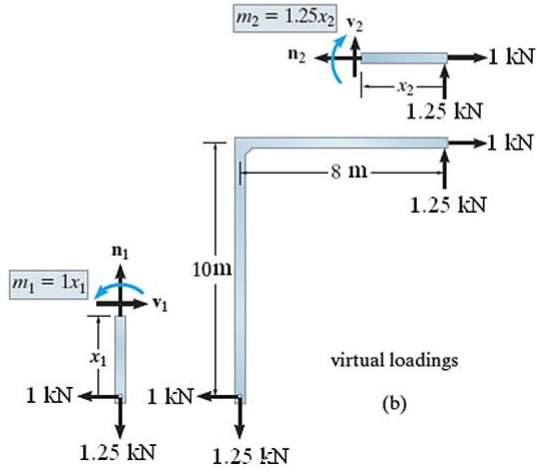


Fig. 9-17

E X A M P L E 9-8 (Continued)

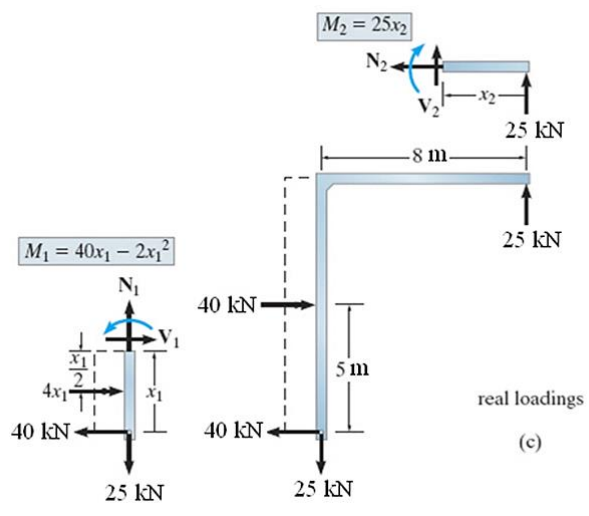
Solution

Virtual Moments m. For convenience, the coordinates x_1 and x_2 in Fig. 9-17a will be used. A horizontal unit load is applied at C, Fig. 9-17b. Why? The support reactions and internal virtual moments are computed as shown.



33

E X A M P L E 9-8 (Continued)



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

34

E X A M P L E 9-8 (Continued)

Real Moments M . In a similar manner the support reactions and real moments are computed as shown in Fig. 9-17c.

Virtual-Work Equation. Using the data in Fig. 9-17b and 9-17c, we have

$$1 \cdot \Delta_{C_h} = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \int_0^{10} \frac{(1x_1)(40x_1 - 2x_1^2)}{EI} dx_1 + \int_0^8 \frac{(1.25x_2)(25x_2)}{EI} dx_2$$

$$\Delta_{C_h} = \frac{8333.3}{EI} + \frac{5333.3}{EI} = \frac{13\,666.7 \text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = 0.273 \text{ m}$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

35

E X A M P L E 9-9

Determine the tangential rotation at point C of the frame shown in Fig. 9-18a. Take $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 15(10^6) \text{ mm}^4$.

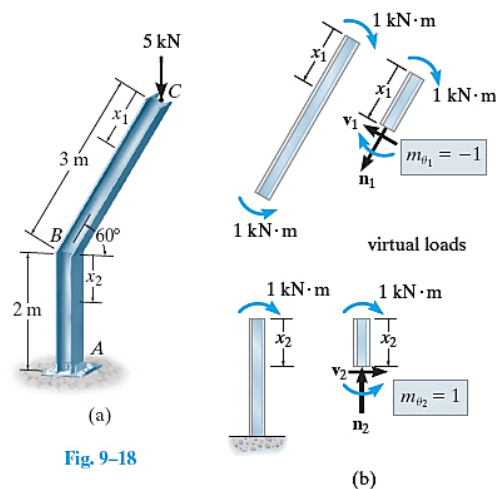
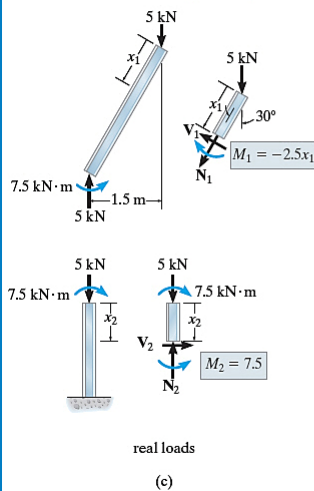


Fig. 9-18

E X A M P L E 9-9 (Continued)



Solution

Virtual Moments m_θ . The coordinates x_1 and x_2 shown in Fig. 9-18a will be used. A unit couple moment is applied at C and the internal moments m_θ are calculated, Fig. 9-18b.

Real Moments M . In a similar manner, the real moments M are calculated as shown in Fig. 9-18c.

Virtual-Work Equation. Using the data in Fig. 9-18b and 9-18c, we have

$$1 \cdot \theta_C = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx = \int_0^3 \frac{(-1)(-2.5x_1)}{EI} dx_1 + \int_0^2 \frac{(1)(7.5)}{EI} dx_2$$

$$\theta_C = \frac{11.25}{EI} + \frac{15}{EI} = \frac{26.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$$

or

$$\theta_C = \frac{26.25 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{200(10^6) \text{ kN/m}^2 [15(10^6) \text{ mm}^4] (10^{-12} \text{ m}^4/\text{mm}^4)}$$

$$= 0.00875 \text{ rad}$$

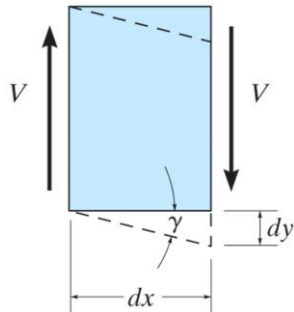
Ans.

طاقة التشوه الافتراضية (الوهمية) الناتجة عن القوة المحورية
Virtual Strain Energy Caused by Axial load

تخضع عناصر الإطارات إلى قوى محورية أيضاً، وكما بينا في عناصر الجوائز الشبكية يُحدد العمل الافتراضي أو طاقة التشوه المرنة الافتراضي بالعلاقة التالية:

$$U_n = \frac{nNL}{AE} \tag{9-20}$$

طاقة التشوه الافتراضية (الوهمية) الناجمة عن القص Virtual Strain Energy Caused by Shear



- تُحدد تشوهات القص الناجمة عن القوى الحقيقية في عنصر تفاضلي من جانز طوله dx كالمبين في الشكل بـ: $dy = \gamma dx$.
- فإذا كانت مادة الجانز مرنة فتحدد تشوهات القص γ باستخدام قانون هوك كما يلي:
حيث $\gamma = \tau/G$ و τ اجهاد القص ومعامل مرونة القص على الترتيب
- إذاً: $dy = (\tau/G) dx$
- يُحدد اجهاد القص بـ: $\tau = K(V/A)$ حيث A و K معامل الشكل يعتمد على شكل المقطع العرضي للجانز

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

39

- بالتعويض يُكتب تشوه القص: $dy = K(V/GA) dx$.
- يُحدد العمل الافتراضي الذي تقوم به قوة القص الوهمية v المطبقة على العنصر التفاضلي أثناء انتقالها بمقدار dy الناتج عن القوة الحقيقية بالعلاقة التالية:

$$dU_s = v dy = v (KV/GA) dx.$$

- بجمع الأعمال الداخلية الوهمية الناتجة في كل العناصر التفاضلية المكون منها الجانز ينتج:

$$U_s = \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx \quad (9-21)$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

40

- للمقاطع العرضية المستطيلة $K = 1.2$
- للمقاطع العرضية الدائرية $K = 10/9$
- للمقاطع العرضية على شكل I $K \approx 1$
- $G = E/[2(1 + \mu)]$ معامل مرونة القص و μ معامل بواسون

September 26, 2020

Structural Analysis

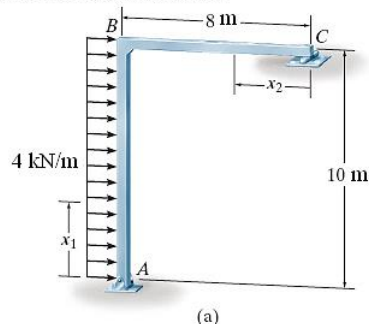
Prof. M. Samara

41

EXAMPLE 9-10

Determine the horizontal displacement of point C on the frame shown in Fig. 9-22a. Take $E = 200 \text{ GPa}$, $G = 80 \text{ GPa}$, $I = 250 \times 10^6 \text{ mm}^4$, and $A = 52 \times 10^3 \text{ mm}^2$ for both members.

The cross-sectional area is rectangular. Include the internal strain energy due to axial load and shear.



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

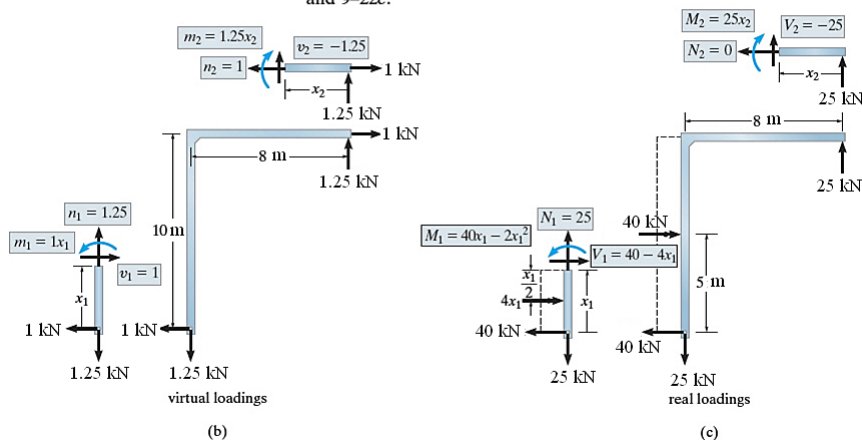
42

Fig. 9-22

EXAMPLE 9-10 (Continued)

Solution

Here we must apply a horizontal unit load at C. The necessary free-body diagrams for the real and virtual loadings are shown in Fig. 9-22b and 9-22c.



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

43

EXAMPLE 9-10 (Continued)

Bending. The virtual strain energy due to bending has been determined in Example 9-8. There it was shown that

$$U_b = \int_0^L \frac{mM}{EI} dx = \frac{13\,666.7 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3}{EI} = 0.273 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Axial load. From the data in Fig. 9-22b and 9-22c, we have

$$\begin{aligned}
 U_a &= \sum \frac{nNL}{AE} \\
 &= \frac{1.25 \times 25 \times 10}{52 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^6} + \frac{1 \times 0 \times 8}{52 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^6} \\
 &= 0.3 \times 10^{-4} \text{ kN} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

44

EXAMPLE 9-10 - (Continued)

Shear. Applying Eq. 9-21 with $K = 1.2$ for rectangular cross sections, and using the shear functions shown in Fig. 9-22*b* and 9-22*c*, we have

$$\begin{aligned} U_s &= \int_0^L K \left(\frac{vV}{GA} \right) dx \\ &= \int_0^{10} \frac{1.2(1)(40 - 4x_1) dx_1}{GA} + \int_0^8 \frac{1.2(-1.25)(-25) dx_2}{GA} \\ &= \frac{540 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}}{GA} = \frac{540}{80 \times 10^6 \times 52 \times 10^{-3}} = 0.13 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Applying the equation of virtual work, we have

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_{C_h} = (273 + 0.03 + 0.13) \times 10^{-3} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\Delta_{C_h} = 273.16 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Ans.

Including the effects of shear and axial load contributed only a 0.06% increase in the answer to that determined only from bending.

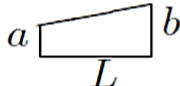
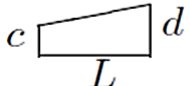
September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

45

$$\int_0^L g_1(x)g_2(x)dx$$

	$g_2(x)$
$g_1(x)$	
	$\frac{La(2c+d) + Lb(c+2d)}{6}$

September 26, 2020

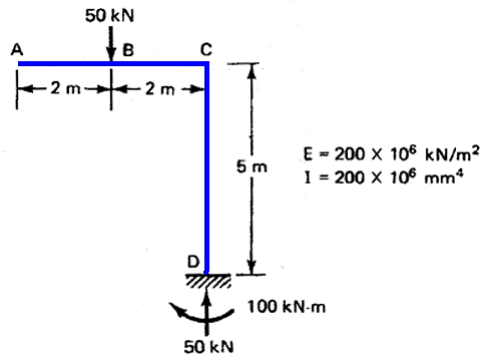
Structural Analysis

Prof. M. Samara

46

مثال

حدد الانتقال الأفقي في النقطة A



September 26, 2020

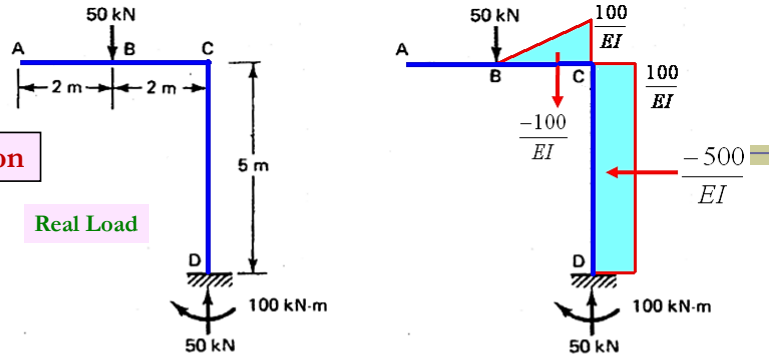
Structural Analysis

Prof. M. Samara

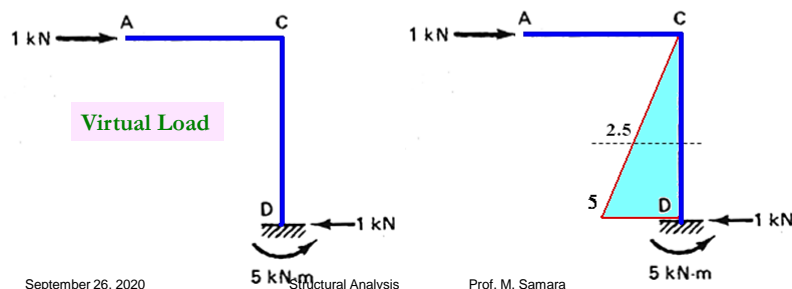
47

Solution

Real Load



Virtual Load



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

48

$$1 \times \Delta_A = 0 + \frac{5 \times (-100)(2 \times 0 + 5) + 5 \times (-100)(0 + 2 \times 5)}{6 \times EI}$$

$$\Delta_A = -\frac{1250}{EI}$$

$$\Delta_A = \frac{-100}{EI} \times 0 + \frac{-500}{EI} \times 2.5 = \frac{-1250}{EI}$$

$$= \frac{-1250}{200(10^9) \times 200 \times 10^{-6}} = -0.031 \text{ m}$$

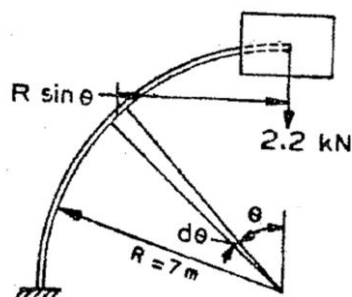
September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

49

مثال



تم حمل لوحة إعلانات على قوس دائري ظفري من الفولاذ نصف قطره 7m احسب الانتقال الشاقولي لمركز اللوحة علماً أن وزنها 2.2 kN وأن الخصائص الهندسية للمقطع العرضي للقوس هي:

$$I = 50 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \text{ and}$$

$$E = 200 \times 10^6 \text{ kN/m}^2.$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

50

بما أن نصف قطر تقوس القوس كبير بالمقارنة مع ابعاد مقطعه العرضي لذا يمكن استعمال علاقات الانتقالات الخاصة بالجوائز ولكن بعد استبدال $dx = R d\theta$ بتطبيق واحدة القوى الوهمية ينتج:

$$M = -2.2 R \sin\theta \quad m = -R \sin\theta$$

$$\Delta = \frac{1}{EI} \int_0^L M m ds$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (2.2 R \sin\theta)(-R \sin\theta) R d\theta \\ &= \frac{2.2R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta = 59.27 \text{ mm} \end{aligned}$$

September 26, 2020

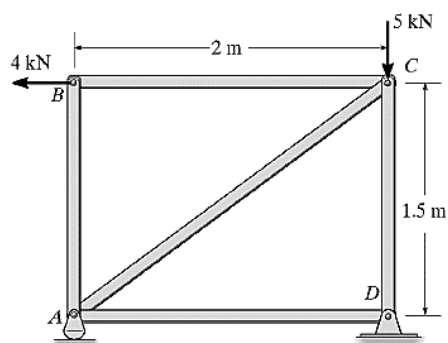
Structural Analysis

Prof. M. Samara

51

مثال

حدد الانتقال الأفقي للعقدة B من الجانز الشبكي المبين في الشكل معتبراً أن $E=200 \text{ GPa}$ و $A=400 \text{ mm}^2$ لكل العناصر

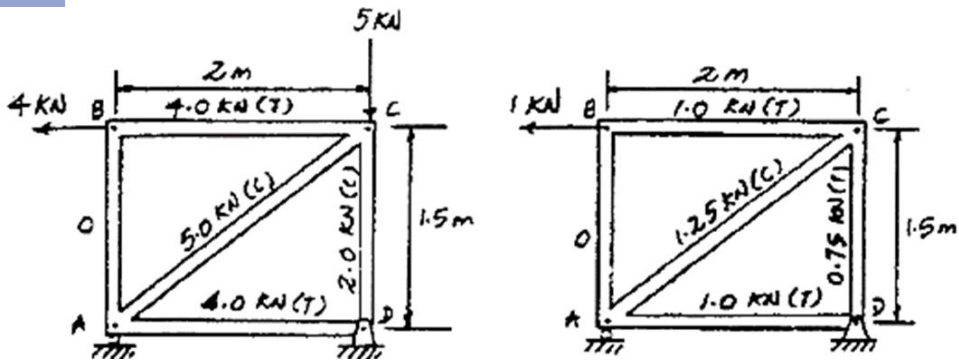


September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

52



September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

53

MEMBER	n	N	L	nNL
AB	0	0	1.5	0
AC	-1.25	-5.00	2.5	15.625
AD	1.00	4.00	2.0	8.000
BC	1.00	4.00	2.0	8.000
CD	0.75	-2.00	1.5	-2.25
				$\Sigma = 29.375$

$$I \cdot \Delta_{B_1} = \Sigma \frac{nNL}{AE}$$

$$\Delta_{B_1} = \frac{29.375(10^3)}{400(10^{-6})(200)(10^9)} = 0.3672(10^{-3}) \text{ m} = 0.367 \text{ mm} \quad \text{Ans}$$

September 26, 2020

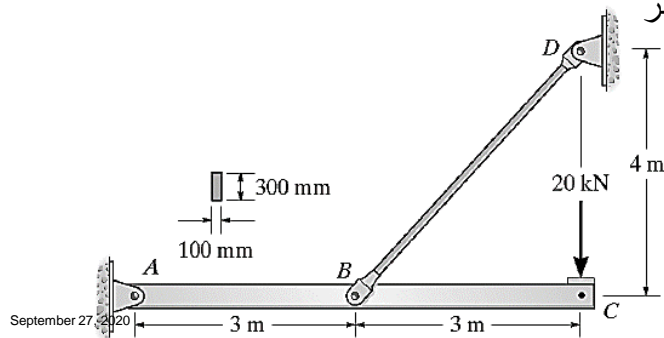
Structural Analysis

Prof. M. Samara

54

مثال

احسب دوران المسند A للجائز ABC علماً أن ابعاد مقطعه العرضي 300×100 mm وأن المقطع العرضي للعنصر BD دائري نصف قطره 20 mm وأن عامل المرونة $E=200$ GPa لكل العناصر

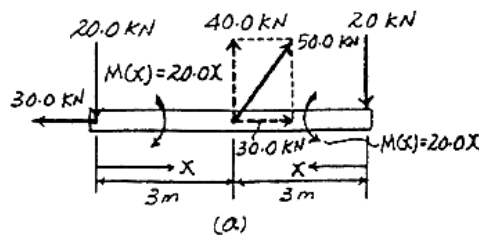


September 27, 2020

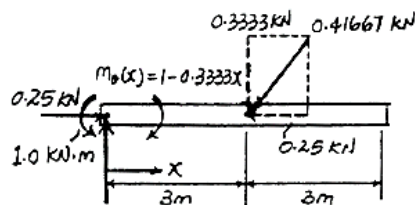
55

Real Moment Function $M(x)$: As shown on figure(a).

Virtual Moment Functions $m_\theta(x)$: As shown on figure(b).



(a)



(b)

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

56

$$\begin{aligned}
 1 \cdot \theta &= \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI} dx + \frac{nNL}{AE} \\
 1 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot \theta_A &= \frac{1}{EI} \int_0^{3\text{m}} (1 - 0.3333x)(20.0x) dx \\
 &\quad + \frac{(-0.41667)(50.0)(5)}{AE} \\
 \theta_A &= \frac{30.0 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} - \frac{104.167 \text{ kN}}{AE} \\
 &= \frac{30.0(1000)}{200(10^9) \left[\frac{1}{12}(0.1)(0.3^3) \right]} - \frac{104.167(1000)}{\left[\frac{\pi}{4}(0.02^2) \right] [200(10^9)]} \\
 &= -0.991(10^{-3}) \text{ rad} = 0.991(10^{-3}) \text{ rad} \quad \text{Ans}
 \end{aligned}$$

September 26, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

57