

Chapter 10: تحليل المنشآت غير المقررة بطريقة القوى

Analysis of Statically Indeterminate Structures by the Force Method

هدف الفصل:

استخدام طريقة القوى في تحليل المنشآت غير المقررة: جوائز
شبكة، جوائز، واطارات

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

1

التقرير والاستقرار Determinacy and Stability

التقرير:

- تؤمن معادلات التوازن الشروط اللازمة والكافية لتوازن أي منشأ
- يُقال عن منشأ أنه مقرر سكونياً إذا كان بالإمكان إيجاد كل القوى فيه باستخدام معادلات التوازن فقط
- يُقال عن منشأ أنه غير مقرر سكونياً إذا احتوى عدد من المجاهيل أكثر من عدد معادلات التوازن المتاحة

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

2

إما أن يكون المنشأ مقررًا سكونياً (statically determinate) أو غير مقرر (indeterminate) ويحدد ذلك برسم مخطط جسم طليق لأجزائه أو لكل عناصره ومقارنة عدد القوى الرديئة المجهولة بعدد معادلات التوازن الممكنة. فمن أجل منشأ مستوي، إذا تم تجزئته إلى n جزء وكان كل جزء يحتوي على r مركبة قوة رديئة أو عزم فإن:

$$r = 3n, \text{ statically determinate}$$

$$r > 3n, \text{ statically indeterminate}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

3

Example 1

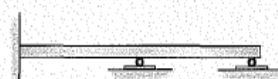


(a)

$$r = 3, n = 1, 3 = 3(1)$$

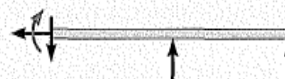


Statically determinate



(b)

$$r = 5, n = 1, 5 > 3(1)$$



Statically indeterminate to the second degree

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

4

(c)
 $r = 6, n = 2, 6 = 3(2)$
 Statically determinate

(d)
 $r = 10, n = 3, 10 > 3(3)$
 Statically indeterminate to the first degree

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

5

Example 2

(a)
 $r = 7, n = 2, 7 > 6$
 Statically indeterminate to the first degree
Ans.

(b)
 $r = 9, n = 3, 9 = 9,$
 Statically determinate
Ans.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

6

(c) $r = 10, n = 2, 10 > 6,$
Statically indeterminate to the fourth degree *Ans.*

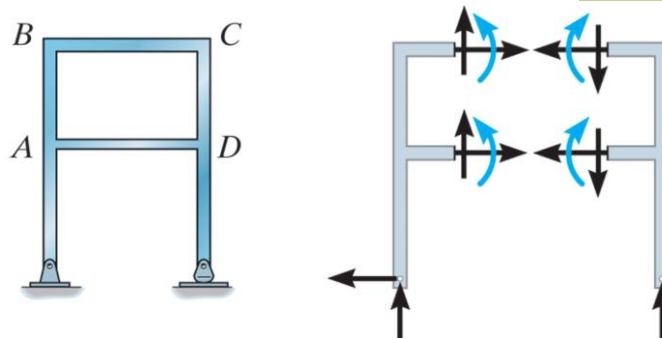
(d) $r = 9, n = 3, 9 = 9,$
Statically determinate *Ans.*

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

7

Example 3

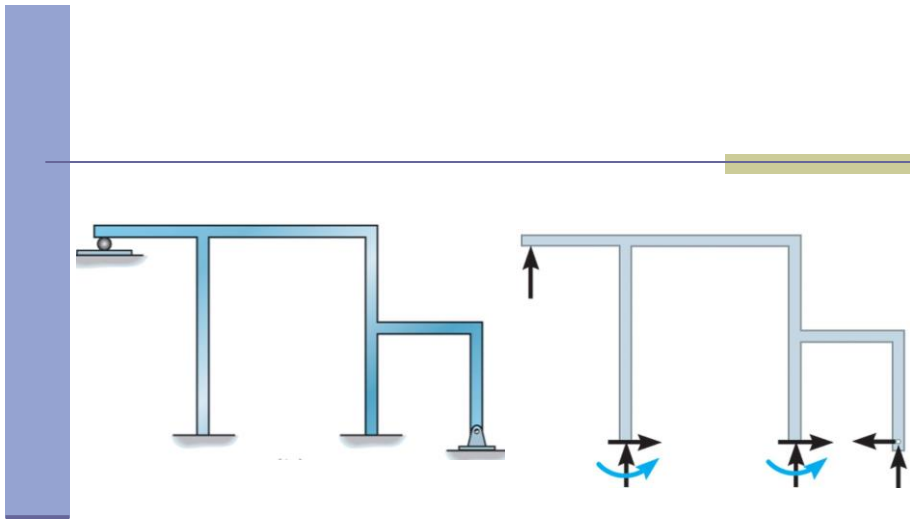


$r = 9, n = 2, 9 > 6,$
Statically indeterminate to the third degree *Ans.*

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

8



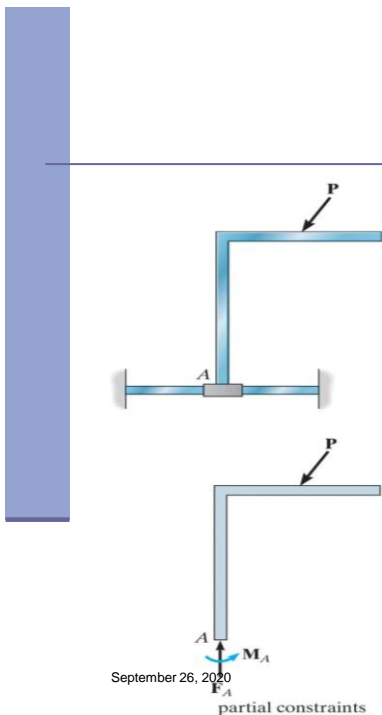
$r = 9, n = 1, 9 > 3,$
 Statically indeterminate to the sixth degree *Ans.*

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

9

الاستقرار Stability



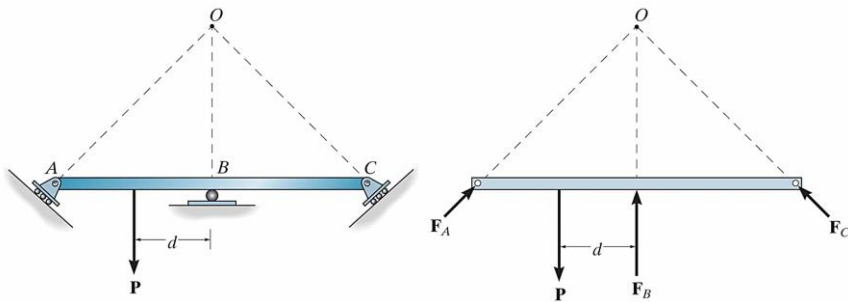
■ عندما يكون للمنشأ أو لأحد عناصره عدد من ردود الأفعال أقل من عدد معادلات التوازن الواجب تحقيقها ($r < 3n$) فيكون المنشأ في هذه الحالة مقيد جزئياً (partially constrained) وعندها يكون غير مستقر

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

10

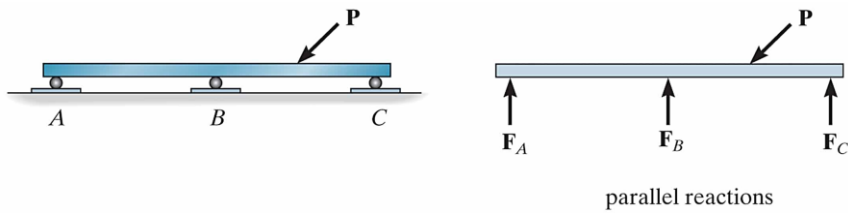
■ عندما يكون تقييد المنشأ إلى مسانده غير سليم تلتقي ردود الأفعال في نقطة واحدة أو تكون متوازية فيمكن أن يتحرك المنشأ ويُعد المنشأ عندها غير مستقر حتى لو كانت $r \geq 3n$



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

11



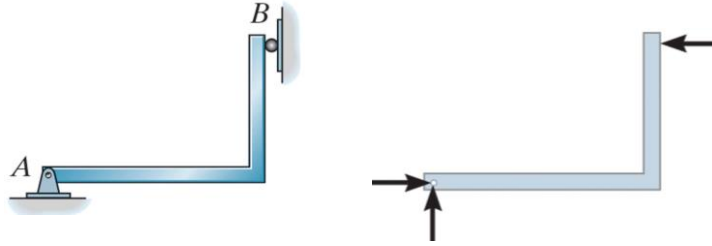
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

12

أمثلة

تتعرض المنشآت التالية إلى قوى اعتباطية صنف كل منها بمستقر أو غير مستقر

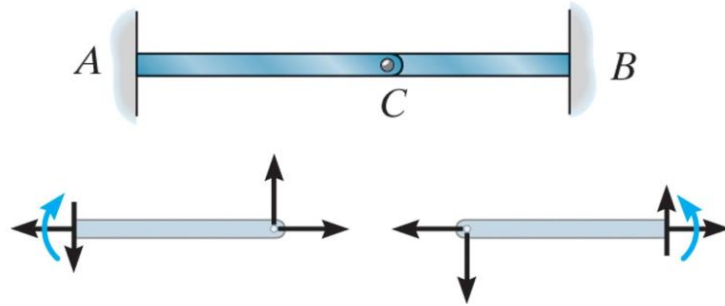


المنشأ مستقر لأن ردود الأفعال غير متوازية ولا تلتقي في نقطة واحدة

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

13

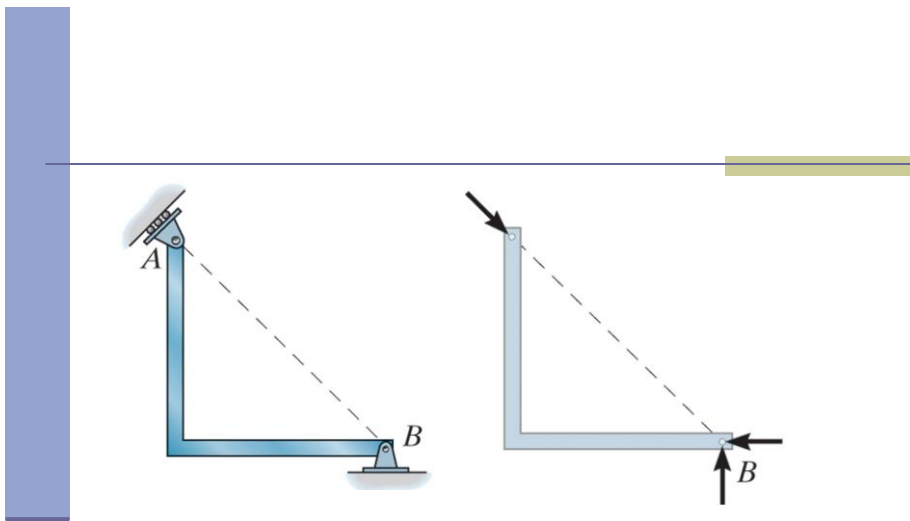


المنشأ مستقر وغير مقرر من الدرجة الثانية

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

14

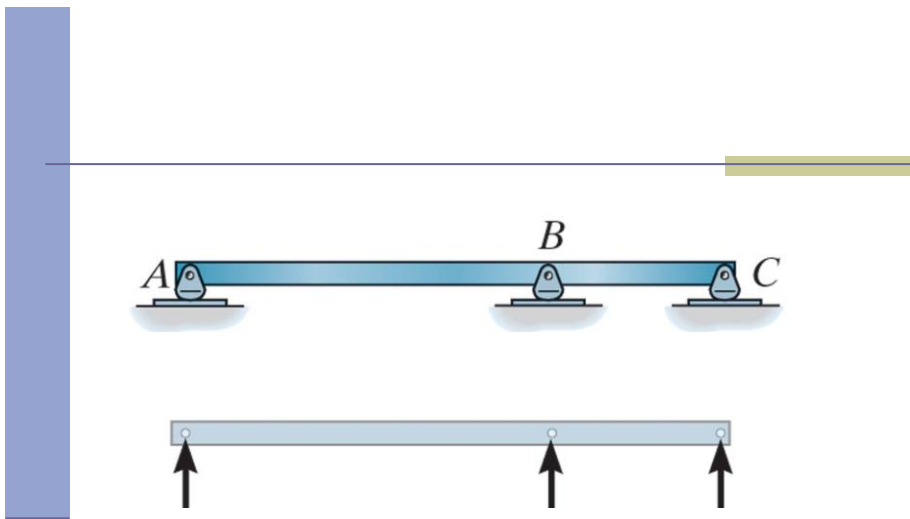


المنشأ غير مستقر لأن ردود الأفعال تلتقي في نقطة واحدة B

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

15

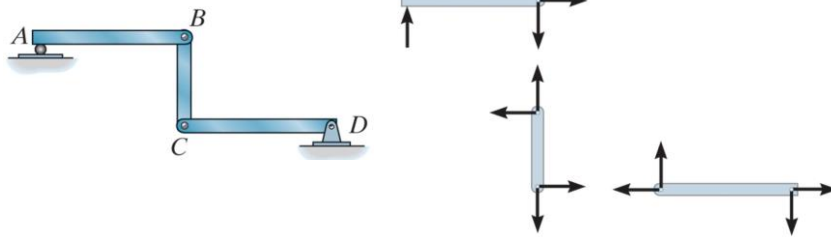


المنشأ غير مستقر لأن ردود الأفعال متوازية

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

16



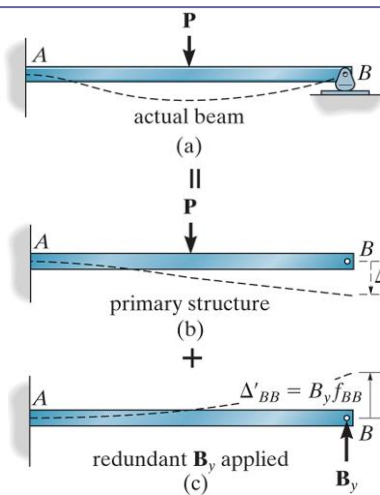
المنشأ غير مستقر لأن: $r = 7, n = 3, \Rightarrow r < 3n$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

17

طريقة القوى The Force Method of Analysis



يبين الشكل جانزاً غير مقرر من الدرجة الأولى فهناك حاجة لمعادلة إضافية كي يُحل الجانز ولهذا نختار أحد ردود أفعال المساند ونعده فائضاً ونزيل أثره على الجانز بشكل مؤقت فيصبح الجانز مقررًا ومستقرًا ويدعى بالمنشأ الأساسي *primary structure*

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

18

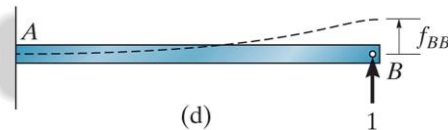
- يسبب الحمل P انتقال النقطة B للأسفل بمقدار Δ_B
- يسبب رد الفعل B_y انتقال النقطة B للأعلى بمقدار Δ'_{BB} ، حيث يشير الحرف الأول من الدالة السفلية إلى النقطة التي حصل عنها الانتقال ويشير الحرف الثاني إلى النقطة التي تُطبق فيها رد الفعل
- بفرض أن الانتقال الموجب باتجاه الأعلى، تُكتب معادلة انسجام الانتقالات عند المسند B كما يلي:

$$(+\uparrow) \quad 0 = -\Delta_B + \Delta'_{BB}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

19

- 
- يسمى الانتقال الحاصل عند B نتيجة تطبيق واحدة القوى في B بمعامل المرونة الخطي f_{BB}
 - وبما أن مادة المنشأ مرنة خطية فإن: $\Delta'_{BB} = B_y f_{BB}$
 - وعليه تُكتب معادلة انسجام الانتقالات عند المسند B كما يلي:

$$0 = -\Delta_B + B_y f_{BB}$$

September 26, 2020

20

E X A M P L E 10-1

Determine the reaction at the roller support B of the beam shown in Fig. 10-8a. EI is constant.

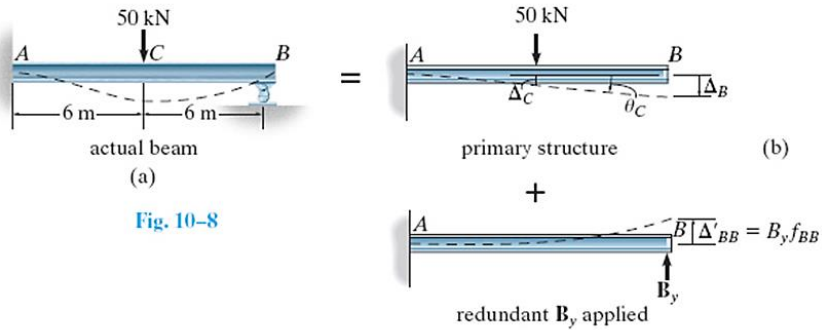


Fig. 10-8

September 26, 2020

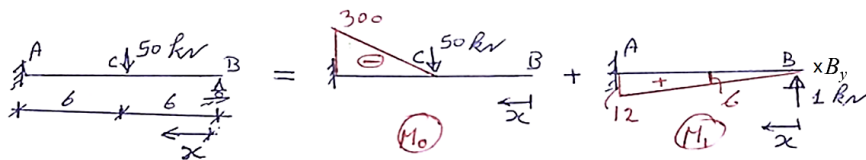
Structural Analysis Prof. M. Samara

21

E X A M P L E 10-1 - (Continued)

Compatibility Equation. Taking positive displacement as upward, Fig. 10-8b, we have

$$(+\uparrow) \quad 0 = -\Delta_B + B_y f_{BB} \quad (1)$$



Range	M_0	M_1
$BC (x: 0 \rightarrow 6)$	0	$1 \times x$
$CA (x: 6 \rightarrow 12)$	$-50(x - 6)$	$1 \times x$

Structural Analysis Prof. M. Samara

22

$$\Delta_B = \int_0^6 \frac{M_0 M_1}{EI} dx + \int_6^{12} \frac{M_0 M_1}{EI} dx = 0 + \int_6^{12} \frac{-50(x-6)(x)}{EI} dx = -\frac{9000}{EI}$$

$$f_{BB} = \int_0^{12} \frac{M_1^2}{EI} dx = \int_0^{12} \frac{x^2}{EI} dx = \frac{576}{EI}$$

Or

$$\Delta_B = \int_0^6 \frac{M_0 M_1}{EI} dx + \int_6^{12} \frac{M_0 M_1}{EI} dx = 0 + \frac{6}{EI} \left[\frac{-300 \times 12}{3} + \frac{-300 \times 6}{6} \right] = \frac{-9000}{EI}$$

$$f_{BB} = \int_0^{12} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{12}{EI} \left[\frac{12 \times 12}{3} \right] = \frac{576}{EI}$$

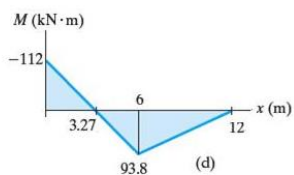
(c)

Substituting these results into Eq. (1) yields

$$(+\uparrow) \quad 0 = -\frac{9000}{EI} + B_y \left(\frac{576}{EI} \right) \quad B_y = 15.6 \text{ kN} \quad \text{Ans.}$$

If this reaction is placed on the free-body diagram of the beam, the reactions at A can be obtained from the three equations of equilibrium, Fig. 10-8c.

Having determined all the reactions, the moment diagram can be constructed as shown in Fig. 10-8d.



(d)

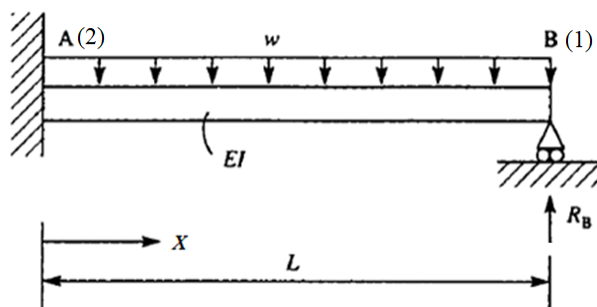
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

23

مثال

■ أوجد ردود أفعال الجائز المبين في الشكل



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

24

- الجانز غير مقرر من الدرجة الأولى ويصبح مقررًا بإزالة المسند B
- ثم نحسب الانتقال الشاقولي v_{B_0} عند B الناجم عن الأحمال المطبقة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي

$$v_{B_0} = \int_0^L \frac{M_o M_1}{EI} dx$$

$$M_o = -\frac{w}{2}(L-x)^2, \quad M_1 = -1(L-x)$$

بالتعويض ينتج:

$$v_{B_0} = \int_0^L \frac{w}{2EI} (L-x)^3 dx = \frac{wL^4}{8EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

25

- أوجد الانتقال الشاقولي f_{11} عند النقطة B (معامل المرونة) وذلك بتطبيق واحدة القوى الافتراضية باتجاه الأسفل عند B

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \int_0^L \frac{1}{EI} (L-x)^2 dx = \frac{L^3}{3EI}$$

وعليه يُحدد الانتقال الشاقولي عند النقطة B الناتج عن رد الفعل R_B :- $f_{11} R_B$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

26

■ وعليه تُكتب معادلة انسجام الانتقالات عند المسند B كما يلي:

$$v_{B0} - f_{11}R_B = 0$$

بالتعويض ينتج:

$$\frac{wL^3}{8EI} - R_B \frac{L^3}{3EI} = 0$$

hence
$$R_B = \frac{3wL}{8}$$

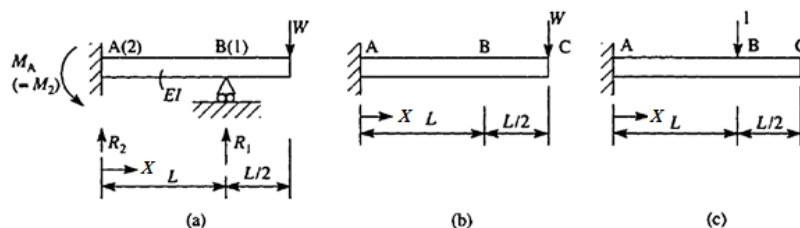
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

27

مثال

أوجد ردود أفعال الجانز المبين في الشكل (a).



■ الجانز غير مقرر من الدرجة الأولى ويصبح مقررًا بإزالة المسند B فنحصل على المنشأ الأساس المبين في الشكل (b)

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

28

■ ثم نحسب الانتقال الشاقولي v_{B_0} عند B الناجم عن الأحمال المطبقة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي

$$v_{B_0} = \int_0^L \frac{M_o M_1}{EI} dx$$

$$v_{B,0} = \int_0^L \left\{ -\frac{W}{EI} \left(\frac{3L}{2} - x \right) \right\} \{-1(L-x)\} dx$$

$$v_{B,0} = \frac{7WL^3}{12EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

29

أوجد الانتقال الشاقولي f_{11} عند النقطة B (معامل المرونة) وذلك بتطبيق واحدة القوى الافتراضية باتجاه الأسفل عند B

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{L^3}{3EI}$$

$$v_{B,0} - f_{11} R_1 = 0$$

$$\frac{7WL^3}{12EI} - \frac{L^3}{3EI} R_1 = 0$$

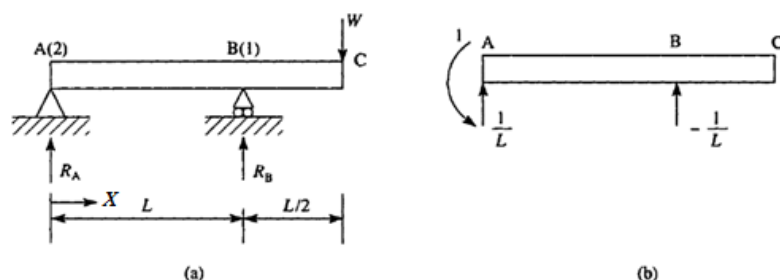
$$R_1 = \frac{7W}{4}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

30

كمنشأ أساس بديل يمكن تحويل الوثاقة عند A إلى مسند ثابت كما في الشكل (a)



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

31

ثم نحسب الدوران θ_{Ao} عند A الناجم عن الأحمال المطبقة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي وتطبيق وحدة العزوم الوهمية عند A كما في الشكل (b)

$$1\theta_{Ao} = \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} dx + \int_L^{3L/2} \frac{M_0 M_1}{EI} dx$$

$$M_0 = -\frac{W}{2}x, \quad M_1 = \frac{1}{L}x - 1 \quad (0 \leq x \leq L)$$

$$M_0 = Wx - \frac{3WL}{2}, \quad M_1 = 0 \quad (L \leq x \leq \frac{3L}{2})$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

32

بالتعويض ينتج:

$$\theta_{A.0} = \frac{W}{2EI} \int_0^L (Lx - x^2) dx$$

From which $\theta_{A.0} = \frac{WL^2}{12EI}$ (anticlockwise)

أوجد الدوران θ_{22} عند النقطة A (معامل المرونة) وذلك بتطبيق واحدة العزوم الافتراضية عند A فينتج:

$$\theta_{22} = \frac{L}{3EI} \quad (\text{anticlockwise})$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

33

تُكتب معادلة انسجام الدورانات عند A كما يلي:

$$\theta_{A.0} + \theta_{22}M_2 = 0$$

or

$$\frac{WL^2}{12EI} + \frac{L}{3EI}M_2 = 0$$

$$M_2 = -\frac{WL}{4} \quad (\text{clockwise})$$

لإيجاد رد الفعل R_1 نكتب معادلة توازن العزوم عند A

$$R_1L - W\frac{3L}{2} - \frac{WL}{4} = 0$$

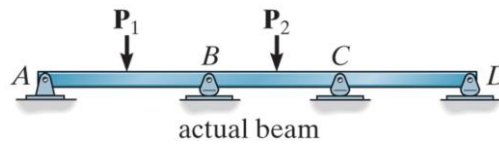
$$R_1 = \frac{7W}{4}$$

September 26, 2020

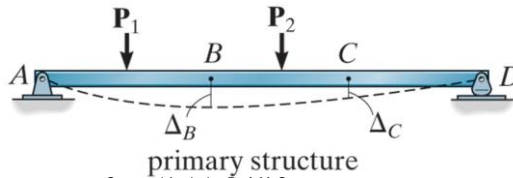
Structural Analysis Prof. M. Samara

34

الجائز المبين في الشكل غير مقرر من الدرجة الثانية فلحلّه لابد من كتابة معادلتين لانسجام الانتقالات



وعليه سنعتبر ردي الفعل عند B و C فائضين وبالتالي سنقوم بتحرير القيد عند هذين المسندين فينج الجائز المقرر (المنشأ الأساس) المبين في الشكل

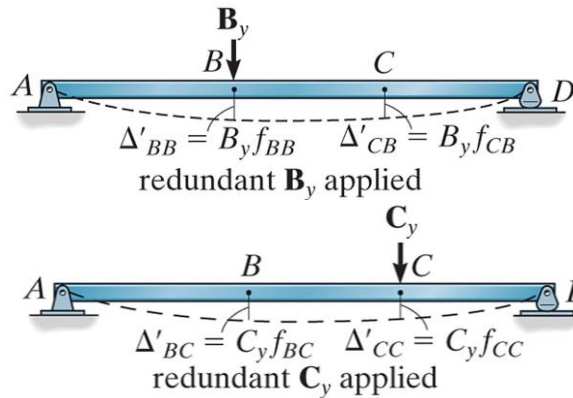


September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

35

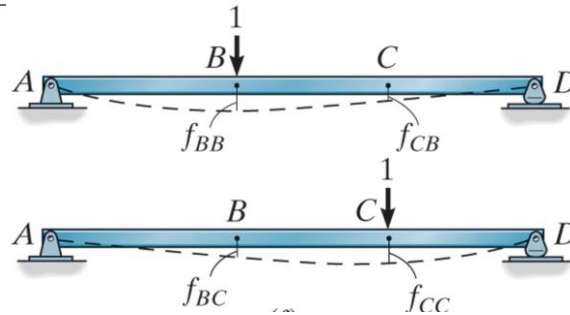
كل من هاتين القوتين الفائضتين ستحدث انتقالات في المنشأ الأساس كما هو مبين في الشكل



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

36



يتم إيجاد معاملي
المرونة f_{CB} و f_{BB}
بتطبيق واحدة القوى عند
B

وكذلك يتم إيجاد معاملي
المرونة f_{BC} و f_{CC}
بتطبيق واحدة القوى عند
C

بتطبيق مبدأ جمع الآثار نُكتب معادلتين انسجام الانتقالات عند C و B على النحو التالي:

$$(+\downarrow) \quad 0 = \Delta_B + B_y f_{BB} + C_y f_{BC}$$

$$(+\downarrow) \quad 0 = \Delta_C + B_y f_{CB} + C_y f_{CC}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

37

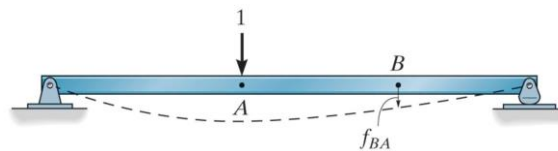
نظرية الانتقالات المتبادلة

Theorem of reciprocal displacements

انتقال النقطة B من منشأ نتيجة تطبيق واحدة الحمل عند النقطة A يساوي انتقال النقطة A عندما تطبق واحدة الحمل عند B، أي:

$$f_{BA} = f_{AB}$$

سيتم برهان هذه النظرية بسهولة باستخدام مبدأ العمل الافتراضي عندما نطبق واحدة الحمل الحقيقي عند A فينشأ عزم داخلي في المنشأ ممثلاً بـ m_A

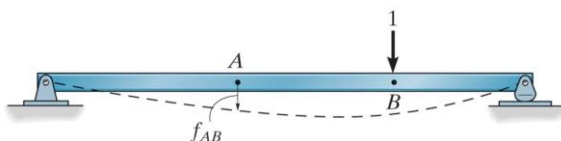


September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

38

لإيجاد معامل المرونة f_{BA} نطبق واحدة الأحمال الوهمية عند B فينشأ عزم داخلي افتراضي في المنشأ ممثلاً بـ m_B



بتطبيق مبدأ العمل الافتراضي ينتج:

$$f_{BA} = \int \frac{m_B m_A}{EI} dx$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

39

بشكل مماثل عند تطبيق واحدة الحمل الحقيقي عند B ينشأ عزم داخلي في المنشأ ممثلاً بـ m_B

لإيجاد معامل المرونة f_{AB} نطبق واحدة الأحمال الوهمية عند A فينشأ عزم داخلي افتراضي في المنشأ ممثلاً بـ m_A

بتطبيق مبدأ العمل الافتراضي ينتج:

$$f_{AB} = \int \frac{m_A m_B}{EI} dx$$

واضح أن التكاملين السابقين متساويان.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

40

تُطبق النظرية أيضاً على الدورانات

- الدوران الناتج عند النقطة B من منشأ نتيجة تطبيق واحدة العزوم عند النقطة A يساوي الدوران الناتج عند النقطة A عندما تطبق واحدة العزوم عند B .
- الدوران الناتج عند النقطة B من منشأ نتيجة تطبيق واحدة القوى عند النقطة A يساوي الانتقال الناتج عند النقطة A عندما تطبق واحدة العزوم عند B .

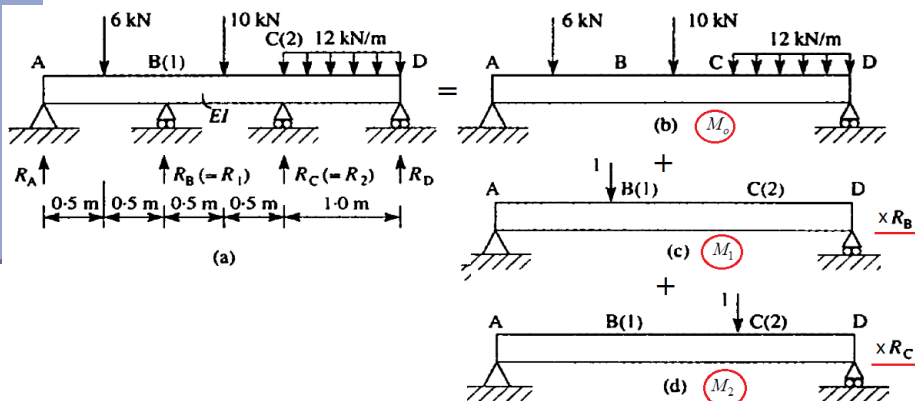
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

41

مثال

أوجد ردود أفعال مساند الجانز المبين في الشكل (a).



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

42

الجائز غير مقرر سكونياً من الدرجة الثانية وبالتالي فهو يحتوي على قيدين
فائضين لذا نحرر المسندين B و C كي نحوله إلى منشأ أساس مقرر سكونياً كما
في الشكل (b). بتطبيق واحدة القوى الوهمية في كل من B(1) و C(2) على
التوالي ينتج:

Range	M_o	M_1	M_2
$0.0 \leq x \leq 0.5$	$12x$	$2x/3$	$x/3$
$0.5 \leq x \leq 1.0$	$6x+3$	$2x/3$	$x/3$
$1.0 \leq x \leq 1.5$	$6x+3$	$1-x/3$	$x/3$
$1.5 \leq x \leq 2.0$	$-4x+18$	$1-x/3$	$x/3$
$2.0 \leq x \leq 3.0$	$-6+20x-6x^2$	$1-x/3$	$2-2x/3$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

43

Range	M_o	M_1	M_2
$0.0 \leq x \leq 0.5$	$12x$	$2x/3$	$x/3$
$0.5 \leq x \leq 1.0$	$6x+3$	$2x/3$	$x/3$
$1.0 \leq x \leq 1.5$	$6x+3$	$1-x/3$	$x/3$
$1.5 \leq x \leq 2.0$	$-4x+18$	$1-x/3$	$x/3$
$2.0 \leq x \leq 3.0$	$-6+20x-6x^2$	$1-x/3$	$2-2x/3$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

44

نحدد انتقالات الجائز الأساس المقرر الناجمة عن الأحمال الخارجية في
النقطتين B(1) و C(2) باستخدام مبدأ العمل الوهمي فينتج:

$$v_{Bo} = \int_0^L \frac{M_o M_1}{EI} dx \quad , \quad v_{Co} = \int_0^L \frac{M_o M_2}{EI} dx \quad , \quad L = 3$$

$$v_{Bo} = \int_0^{0.5} \frac{M_o M_1}{EI} dx + \int_{0.5}^1 \frac{M_o M_1}{EI} dx + \int_1^{1.5} \frac{M_o M_1}{EI} dx + \int_{1.5}^2 \frac{M_o M_1}{EI} dx + \int_2^3 \frac{M_o M_1}{EI} dx$$

$$v_{Bo} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{0.5} (12x) \left(\frac{2}{3} x \right) dx + \int_{0.5}^1 (6x+3) \left(\frac{2}{3} x \right) dx + \int_{1.0}^{1.5} (6x+3) \left(1 - \frac{1}{3} x \right) dx \right. \\ \left. + \int_{1.5}^2 (-4x+18) \left(1 - \frac{1}{3} x \right) dx + \int_2^3 (-6+20x-6x^2) \left(1 - \frac{1}{3} x \right) dx \right\} = \frac{8.88}{EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

45

$$v_{Co} = \int_0^{0.5} \frac{M_o M_2}{EI} dx + \int_{0.5}^{1.5} \frac{M_o M_2}{EI} dx + \int_{1.5}^2 \frac{M_o M_2}{EI} dx + \int_2^3 \frac{M_o M_2}{EI} dx$$

$$v_{Co} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{0.5} (12x) \left(\frac{1}{3} x \right) dx + \int_{0.5}^{1.5} (6x+3) \left(\frac{1}{3} x \right) dx + \int_{1.5}^2 (-4x+18) \left(\frac{1}{3} x \right) dx \right. \\ \left. + \int_2^3 (-6+20x-6x^2) \left(2 - \frac{2}{3} x \right) dx \right\} = \frac{9.08}{EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

46

نحدد انتقالات الجانز الأساس المقرر في النقطتين B(1) و C(2) الناجمة عن واحدة الأحمال الوهمية المطبقة في النقطة B(1) باستخدام مبدأ العمل الوهمي فينتج:

$$f_{11} = \int_0^L \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \int_0^1 \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int_1^3 \frac{M_1 M_1}{EI} dx$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x\right)^2 dx + \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{3}x\right)^2 dx \right\} = \frac{0.45}{EI}$$

$$f_{21} = \int_0^L \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \int_0^1 \frac{M_1 M_2}{EI} dx + \int_1^2 \frac{M_1 M_2}{EI} dx + \int_2^3 \frac{M_1 M_2}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{3}x\right) dx + \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{3}x\right)\left(2 - \frac{2}{3}x\right) dx \right\} = \frac{0.39}{EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

47

نحدد انتقالات الجانز الأساس المقرر في النقطتين B(1) و C(2) الناجمة عن واحدة الأحمال الوهمية المطبقة في النقطة C(2) باستخدام مبدأ العمل الوهمي فينتج: (f_{12}, f_{22})

$$f_{12} = f_{21} = \frac{0.39}{EI} \quad \text{بناءً على نظرية الانتقالات المتبادلة نكتب:}$$

$$f_{22} = f_{11} = \frac{0.45}{EI} \quad \text{نتيجة التناظر نكتب:}$$

الانتقال النهائي عند المسدين B(1) و C(2) يساوي الصفر وبناءً على ذلك يُكتب شرطي انسجام الانتقالات عند هاتين النقطتين كما يلي:

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

48

$$v_{B0} + f_{11}R_B + f_{12}R_C = 0$$

$$v_{C0} + f_{21}R_B + f_{22}R_C = 0$$

or

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} v_{B0} \\ v_{C0} \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 0.45 & 0.39 \\ 0.39 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_B \\ R_C \end{Bmatrix} = - \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 8.88 \\ 9.08 \end{Bmatrix}$$

$$R_B = -8.7 \text{ kN}, \quad R_C = -12.68 \text{ kN} \quad \text{بحل هاتين المعادلتين ينتج:}$$

إشارة السالب تدل على أن الانتقالين يُعكسان بالاتجاه واحدة القوى الوهمية

باستخدام معادلات التوازن ينتج ردي الفعل عند A و D

$$R_A = 1.97 \text{ kN}, \quad R_D = 4.65 \text{ kN}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

49

تجدر الملاحظة أن عدد المعادلات الخطية يساوي عدد درجات عدم التقدير السكوني، أي:

$$v_{1.0} + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + \dots + f_{1n}R_n = 0$$

$$v_{n.0} + f_{n1}R_1 + f_{n2}R_2 + \dots + f_{nn}R_n = 0$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & & f_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n12} & & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} v_{1.0} \\ \vdots \\ v_{n.0} \end{Bmatrix}$$

أو على شكل مصفوفي

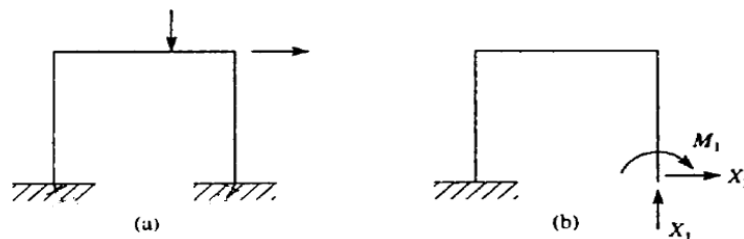
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

50

تحليل الإطارات غير المقررة سكونياً Analysis of Statically indeterminate frames

الإطار المبين في الشكل (a) غير مقرر سكونياً من الدرجة الثالثة وبالتالي فهو يحتوي على ثلاث قيود فائضة لذا كأحد الخيارات نحرر وثيقة العمود الأيمن كي نحوله إلى منشأ أساس مقرر سكونياً كما في الشكل (b). ولحل هذا الإطار لا بد من كتابة ثلاث معادلات لانسجام الانتقالات عند القيود التي تم تحريرها ومن ثم حل هذه المعادلات لإيجاد مركبات رد الفعل عند الوثيقة.



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

51

EXAMPLE 10-6

Determine the support reactions on the frame shown in Fig. 10-13a. EI is constant.

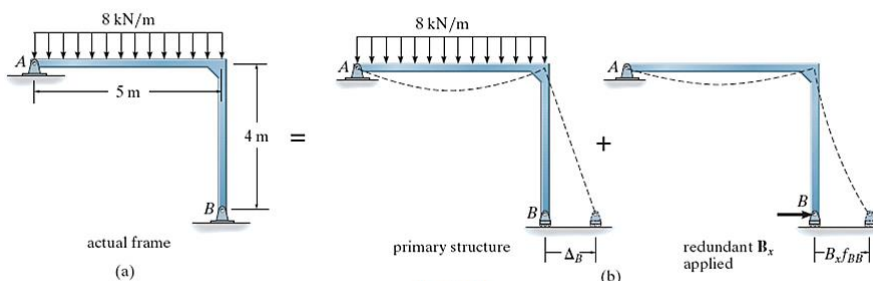


Fig. 10-13

Compatibility Equation. Reference to point B in Fig. 10-13b requires

$$0 = \Delta_B + B_x f_{BB} \quad (1)$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

52

E X A M P L E 10-6 - (Continued)

The terms Δ_B and f_{BB} will be computed using the method of virtual work. The frame's x coordinates and internal moments are shown in Fig. 10-13c and 10-13d. It is important that in each case the selected coordinate x_1 or x_2 be the *same* for both the real and virtual loadings. Also, the positive directions for \mathbf{M} and \mathbf{m} must be the *same*.

For Δ_B we require application of real loads, Fig. 10-13c, and a virtual unit load at B , Fig. 10-13d. Thus,

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(20x_1 - 4x_1^2)(0.8x_1) dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{0(1x_2) dx_2}{EI}$$

$$= \frac{166.7}{EI} + 0 = \frac{166.7}{EI}$$

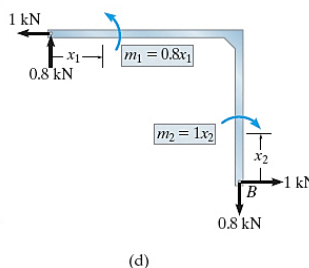
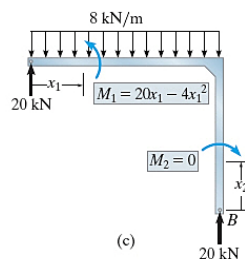
For f_{BB} we require application of a real unit load and a virtual unit load acting at B , Fig. 10-13d. Thus,

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{mm}{EI} dx = \int_0^5 \frac{(0.8x_1)^2 dx_1}{EI} + \int_0^4 \frac{(1x_2)^2 dx_2}{EI}$$

$$= \frac{26.7}{EI} + \frac{21.3}{EI} = \frac{48.0}{EI}$$

Substituting the data into Eq. (1) and solving yields

$$0 = \frac{166.7}{EI} + B_x \left(\frac{48.0}{EI} \right) \quad B_x = -3.47 \text{ kN} \quad \text{Ans.}$$



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

53

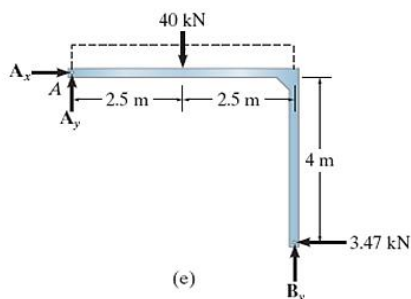
E X A M P L E 10-6 - (Continued)

Equilibrium Equations. Showing B_x on the free-body diagram of the frame in the correct direction, Fig. 10-13e, and applying the equations of equilibrium, we have

$$\pm \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 3.47 = 0 \quad A_x = 3.47 \text{ kN} \quad \text{Ans.}$$

$$\downarrow + \Sigma M_A = 0; \quad -40(2.5) + B_y(5) - 3.47(4) = 0 \quad B_y = 22.8 \text{ kN} \quad \text{Ans.}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 40 + 22.8 = 0 \quad A_y = 17.2 \text{ kN} \quad \text{Ans.}$$



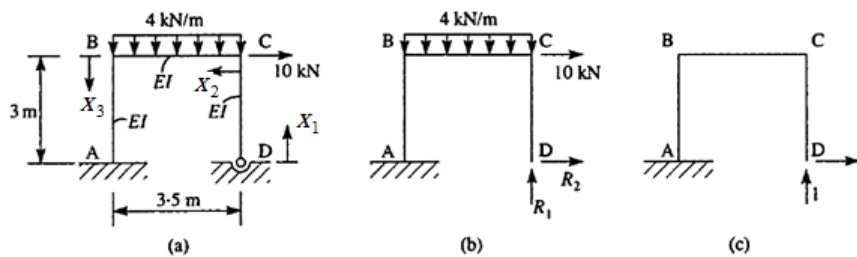
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

54

مثال

ارسم مخطط عزم الانعطاف للإطار المبين في الشكل (a) معتبراً صلابة الانعطاف EI ثابتة لكل عناصر الإطار



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

55

- الإطار المبين في الشكل (a) غير مقرر سكونياً من الدرجة الثانية وبالتالي فهو يحتوي على قيدين فائضين لذا كأحد الخيارات نحرر قيدي العمود الأيمن عند المسند D كي نحوله إلى منشأ أساس مقرر سكونياً كما في الشكل (b).
- ولذلك ستخضع النقطة D من المنشأ الأساس إلى انتقالين: شاقولي $\Delta_{D,V}$ وأفقي $\Delta_{D,H}$ ناجمين عن الأحمال الخارجية
- ولحل هذا الإطار لابد من كتابة معادلتين لانسجام الانتقالات عند القيد اللذين تم تحريرهما ومن ثم حل هاتين المعادلتين لإيجاد مركبتي رد الفعل (R_1 و R_2) عند D.

$$\Delta_{D,V} + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 = 0 \quad (i)$$

$$\Delta_{D,H} + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 = 0 \quad (ii)$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

56

سنستخدم مبدأ العمل الافتراضي لإيجاد الانتقالات ومعاملات المرونة

$$\Delta_{D,V} = \sum \int_L \frac{M_0 M_{1,V}}{EI} dx \quad \Delta_{D,H} = \sum \int_L \frac{M_0 M_{1,H}}{EI} dx$$

$$f_{11} = \sum \int_L \frac{M_{1,V}^2}{EI} dx \quad f_{22} = \sum \int_L \frac{M_{1,H}^2}{EI} dx$$

$$f_{12} = f_{21} = \sum \int_L \frac{M_{1,V} M_{1,H}}{EI} dx$$

M_0 العزم الناجم عن الأحمال الخارجية في أي نقطة المنشأ الأساس

$M_{1,V}$ العزم في أي نقطة المنشأ الأساس الناجم عن واحدة القوى الوهمية المطبقة شاقولياً عند D

$M_{1,H}$ العزم في أي نقطة المنشأ الأساس الناجم عن واحدة القوى الوهمية المطبقة أفقياً عند D

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

57

يبين الجدول أدناه معادلات العزوم في كل جزء من المنشأ الأساس
معتبرين العزم موجب إذا كان شاداً من الخارج

Range	M_0	$M_{1,V}$	$M_{1,H}$
DC	0	0	$-x_1$
CB	$2x_2^2$	$-x_2$	-3
BA	$24.5 + 10x_3$	-3.5	$-(3-x_3)$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

58

$$\Delta_{D,V} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{3.5} (-2x_2^3) dx_2 + \int_0^3 -(24.5 + 10x_3) 3.5 dx_3 \right] = -\frac{489.8}{EI}$$

$$\Delta_{D,H} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{3.5} (-6x_2^3) dx_2 + \int_0^3 -(24.5 + 10x_3)(3 - x_3) dx_3 \right] = -\frac{241.0}{EI}$$

$$f_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{3.5} x_2^2 dx_2 + \int_0^3 3.5^2 dx_3 \right] = \frac{51.0}{EI}$$

$$f_{22} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^3 x_1^2 dx_1 + \int_0^{3.5} 3^2 dx_2 + \int_0^3 (3 - x_3)^2 dx_3 \right] = \frac{49.5}{EI}$$

$$f_{12} = f_{21} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^{3.5} 3x_2 dx_2 + \int_0^3 3.5(3 - x_3) dx_3 \right] = \frac{34.1}{EI}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

59

Substituting for $\Delta_{D,V}$, $\Delta_{D,H}$, f_{11} , etc., in Eqs (i) and (ii) we obtain

$$-\frac{489.8}{EI} + \frac{51.0}{EI} R_1 + \frac{34.1}{EI} R_2 = 0$$

$$-\frac{241.0}{EI} + \frac{34.1}{EI} R_1 + \frac{49.5}{EI} R_2 = 0$$

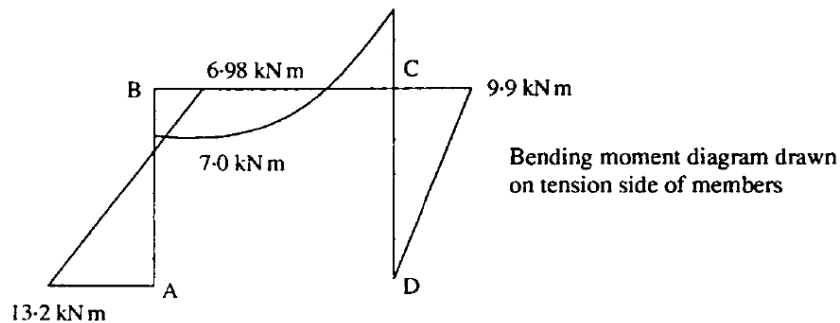
Solving these two Eqs yields $R_1 = 11.8$ kN, $R_2 = -3.3$ kN

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

60

The bending moment diagram is then drawn as shown in the following Fig.



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

61

تحليل الجوائز الشبكية غير المقررة سكونياً

Analysis of Statically Indeterminate trusses

يمكن أن يكون الجوائز الشبكية غير مقرر خارجياً أو داخلياً أو كليهما معاً فإذا كان غير مقرر خارجياً سيتم إيجاد ردود أفعال مسانده بذات المنهجية التي تم شرحها سابقاً في تحليل المنشآت الأخرى، أما إذا كان غير مقرر داخلياً فسيتم تحليله كما سيأتي في الأمثلة.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

62

عدم التقرير السكوني للجوائز الشبكية

Static Indeterminacy of Trusses

$$b + r = 2j \quad \text{statically determinate}$$

$$b + r > 2j \quad \text{statically indeterminate}$$

b عدد عناصر الجوائز الشبكي

j عدد عقد الجوائز الشبكي

r عدد مركبات ردود الأفعال

درجة عدم التقرير السكوني $(b + r) - 2j$

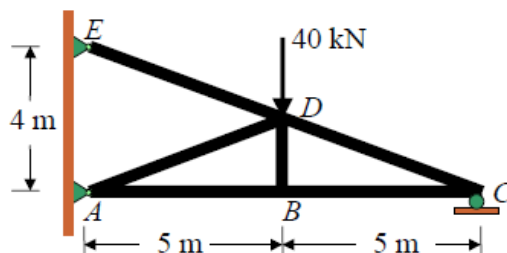
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

63

مثال:

Determine the reaction at support A , C , E and all the member forces. Take $E = 200 \text{ GPa}$ and $A = 500. \text{ mm}^2$.



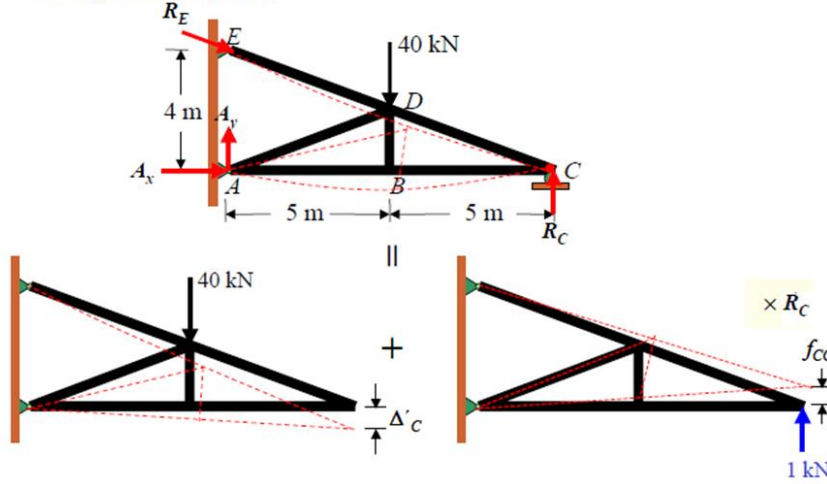
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

64

SOLUTION Use compatibility of displacement to obtain reaction

• Principle of superposition



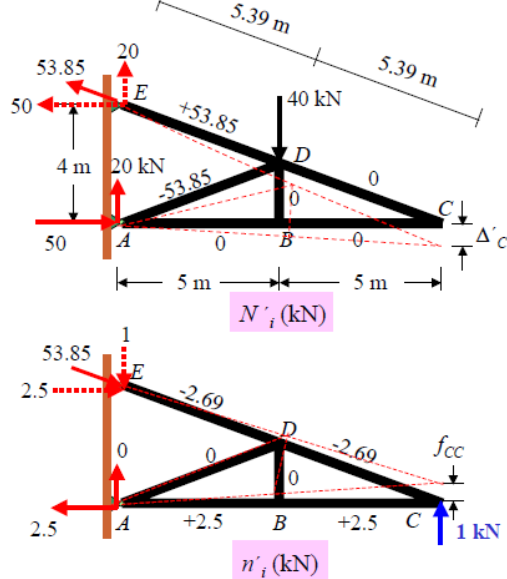
Compatibility equation : $\Delta_c = 0 = \Delta'_c + f_{cc}R_c$ -----(1)

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

65

• Use unit load method for Δ'_c and f_{cc}



$$\Delta'_c = \frac{\sum n'_i N'_i L_i}{A_i E_i} = \frac{(53.85)(-2.69)(5.38)}{(200 \times 10^6)(500 \times 10^{-6})} = -7.81 \text{ mm, } \downarrow$$

$$f_{cc} = \frac{\sum n'_i n'_i L_i}{A_i E_i} = \frac{2(-2.69)^2(5.385)}{(200 \times 10^6)(500 \times 10^{-6})} + \frac{2(2.5)^2(5)}{(200 \times 10^6)(500 \times 10^{-6})} = 1.41 \text{ mm, } \uparrow$$

45

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

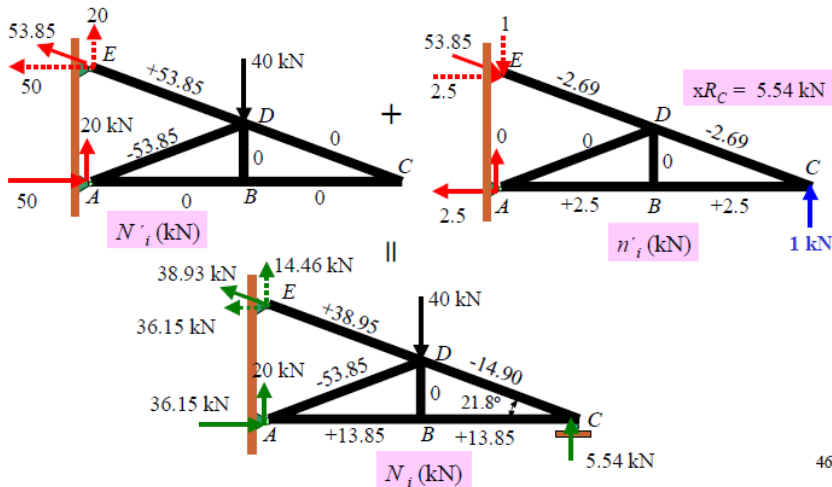
66

• Substitute Δ'_C and f_{CC} in Eq. (1): $\Delta_C = 0 = \Delta'_C + f_{CC}R_C$

$$+\uparrow: -7.81 + 1.41R_C = 0$$

$$R_C = 5.54 \text{ kN}, \uparrow$$

$\Delta'_C = 7.81 \text{ mm}, \downarrow$
 $f_{CC} = 1.41 \text{ mm}, \uparrow$



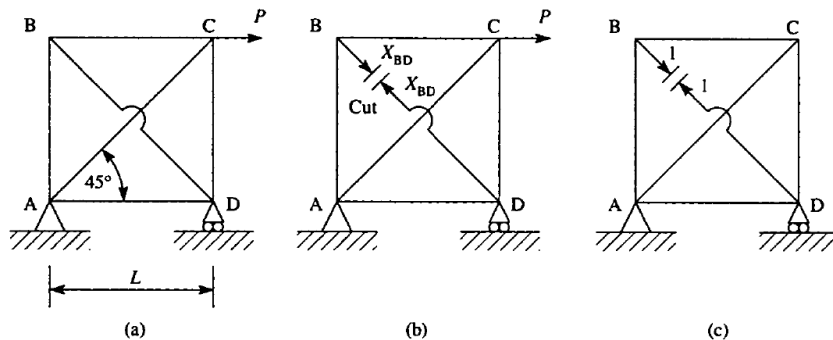
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

67

مثال:

أوجد القوى في عناصر الجانز الشبكي المبين في الشكل (a) معتبراً أن كل العناصر لها نفس EA



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

68

- الجائز الشبكي المبين في الشكل (a) مقرر خارجياً ولكنه غير مقرر داخلياً من الدرجة الأولى ويتحول إلى مقرر (منشأ أساس) بقطع أحد عناصره وليكن العنصر BD كما هو مبين في الشكل (b)
- لحساب الانتقال بين طرفي القطع الناجم عن الحمل الخارجي P نطبق واحدة القوى الوهمية عند جانبي القطع كما هو مبين في الشكل (c). وبتطبيق العلاقة التالية يتم حساب الانتقال المطلوب:

$$\Delta_{BD} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{0,j} F_{1,j} L_j}{AE}$$

$F_{0,j}$ هي القوى في عناصر الجائز الشبكي الأساس الناتجة عن القوى الخارجية $F_{1,j}$ هي القوى في عناصر الجائز الشبكي الأساس الناتجة عن واحدة القوى الوهمية

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

69

- لحساب الانتقال بين طرفي القطع الناجم عن واحدة القوى الوهمية (معامل المرونة f_{BD}) نطبق واحدة القوى الوهمية عند جانبي القطع كما هو مبين في الشكل (c). وبتطبيق العلاقة التالية يتم حساب f_{BD} المطلوب:

$$f_{BD} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{1,j}^2 L_j}{AE}$$

■ الانتقال الناتج عن X_{BD} يُساوي $X_{BD} f_{BD}$

■ من انسجام التشوهات بين وجهي القطع نكتب:

$$\Delta_{BD} + X_{BD} f_{BD} = 0$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

70

■ بحل معادلة انسجام التشوهات ينتج X_{BD} ومن ثم يمكن إيجاد القوى في بقية عناصر الجائز الشبكي بطريقة العقد أو بطريقة المقاطع.

■ يبين الجدول التالي نتائج الحساب.

Member	$L_j(m)$	$F_{0,j}$	$F_{1,j}$	$F_{0,j}F_{1,j}L_j$	$F_{1,j}^2L_j$	$F_{a,j}$
AB	L	0	-0.71	0	$0.5L$	$+0.40P$
BC	L	0	-0.71	0	$0.5L$	$+0.40P$
CD	L	-P	-0.71	$0.71PL$	$0.5L$	$+0.60P$
BD	$1.41L$	-	1.0	-	$1.41L$	$+0.56P$
AC	$1.41L$	$1.41P$	1.0	$2.0PL$	$1.41L$	$+0.85P$
AD	L	0	-0.71	0	$0.5L$	$+0.40P$
				$\Sigma=2.71PL$	$\Sigma=4.82L$	

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

71

من الجدول نجد: $\Delta_{BD} = \frac{2.71PL}{AE}$, $f_{BD} = \frac{4.82L}{AE}$

نعوض في معادلة انسجام التشوهات: $\frac{2.71PL}{AE} + X_{BD} \frac{4.82L}{AE} = 0$

بحل معادلة انسجام التشوهات ينتج:

$$X_{BD} = -0.56P \quad (\text{i.e. compression})$$

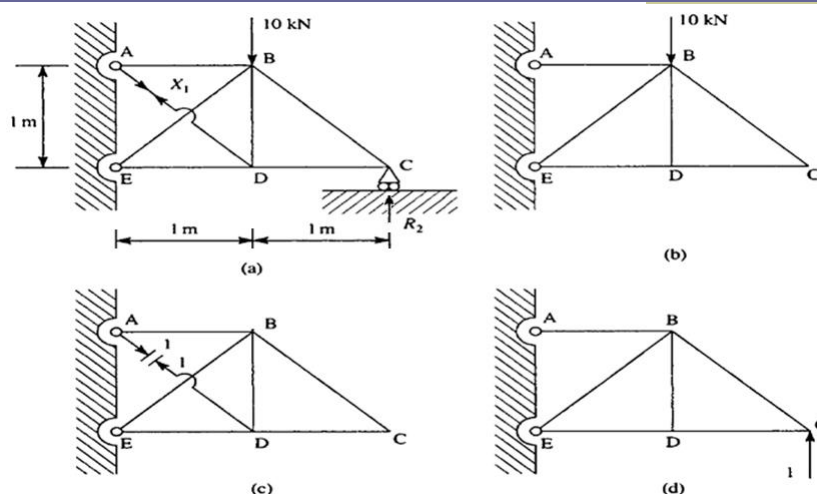
ومن ثم يتم إيجاد القوى الفعلية $F_{a,j}$ في بقية عناصر الجائز الشبكي بطريقة العقد أو بطريقة المقاطع.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

72

مثال: أوجد القوى في عناصر الجائز الشبكي المبين في الشكل (a)
 علماً أن كل العناصر لها نفس EA



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

73

- الجائز الشبكي المبين في الشكل (a) غير مقرر خارجياً و غير مقرر داخلياً لأنه يبقى مستقراً ومتوازناً إذا تم إزالة أحد القطرين AD أو BD وكذلك إزالة المسند عند النقطة C وبالتالي فهو غير مقرر من الدرجة الثانية ويتحول إلى مقرر (منشأ أساس) بقطع القطر AD وإزالة المسند عند C كما هو مبين في الشكل (b)
- نسمي القوة في العنصر AD بـ X_1 ورد الفعل الشاقولي عند C بـ R_2
- إذا سيكون لدينا شرطان لانسجام التشوهات: أحدهما للعنصر AD والآخر للمسند C

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

74

- لحساب الانتقال بين طرفي القطع في العنصر AD الناتج عن القوى الخارجية (Δ_{AD}) نطبق واحدة القوى الوهمية عند جانبي القطع كما هو مبين في الشكل (c)
- لحساب الانتقال الشاقولي عند النقطة C الناتج عن القوى الخارجية (v_C) نطبق واحدة القوى الوهمية عند C كما هو مبين في الشكل (d).
- لحساب الانتقال بين طرفي القطع في العنصر AD الناتج عن واحدة القوى الوهمية (معامل المرونة f_{11}) نطبق واحدة القوى الوهمية عند جانبي القطع كما هو مبين في الشكل (c).
- لحساب الانتقال الشاقولي عند النقطة C الناتج عن واحدة القوى الوهمية الشاقولية (معامل المرونة f_{22}) نطبق واحدة القوى الوهمية عند C كما هو مبين في الشكل (d).
- لحساب الانتقال بين طرفي القطع في العنصر AD الناتج عن واحدة القوى الوهمية الشاقولية المطبقة عند C (معامل المرونة f_{21}) نطبق واحدة القوى الوهمية عند C كما هو مبين في الشكل (d).

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

75

Member	L_j	$F_{0,j}$	$F_{1,j}$	$F_{2,j}$	$F_{0,j}F_{1,j}L_j$	$F_{0,j}F_{2,j}L_j$	$F_{1,j}^2L_j$	$F_{2,j}^2L_j$	$F_{1,j}F_{2,j}L_j$	$F_{a,j}$
AB	1	10.0	-0.71	-2.0	-7.1	-20.0	0.5	4.0	1.41	0.67
BC	1.41	0	0	-1.41	0	0	0	2.81	0	-4.45
CD	1	0	0	1.0	0	0	0	1.0	0	3.15
DE	1	0	-0.71	1.0	0	0	0.5	1.0	-0.71	0.12
AD	1.41	0	1.0	0	0	0	1.41	0	0	4.28
BE	1.41	-14.14	1.0	1.41	-20.0	-28.11	1.41	2.81	2.0	-5.4
BD	1	0	-0.71	0	0	0	0.5	0	0	-3.03
					$\Sigma=-27.1$	$\Sigma=-48.11$	$\Sigma=4.32$	$\Sigma=11.$	$\Sigma=2.7$	
										62

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

76

From the table

$$\Delta_{AD} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{0,j} F_{1,j} L_j}{AE} = \frac{-27.1}{AE}$$

$$v_C = \sum_{j=1}^n \frac{F_{0,j} F_{2,j} L_j}{AE} = \frac{-48.11}{AE}$$

$$f_{11} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{1,j}^2 L_j}{AE} = \frac{4.32}{AE}$$

$$f_{22} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{2,j}^2 L_j}{AE} = \frac{11.62}{AE}$$

$$f_{12} = f_{21} = \sum_{j=1}^n \frac{F_{1,j} F_{2,j} L_j}{AE} = \frac{2.7}{AE}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

77

يُكتب شرطاً انسجام التشوهات كما يلي:

$$\Delta_{AD} + f_{11}X_1 + f_{12}R_2 = 0$$

$$v_C + f_{21}X_1 + f_{22}R_2 = 0$$

بالتعويض ينتج:

$$-27.1 + 4.32X_1 + 2.7R_2 = 0$$

$$-48.11 + 2.7X_1 + 11.62R_2 = 0$$

بحل هاتين المعادلتين ينتج:

$$X_1 = 4.28 \text{ kN}, \quad R_2 = 3.15 \text{ kN}$$

ومن ثم يتم إيجاد القوى الفعلية $F_{a,j}$ في بقية عناصر الجانز الشبكي بطريقة العقد أو بطريقة المقاطع.

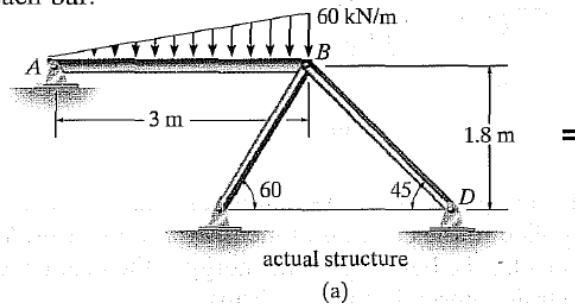
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

78

مثال

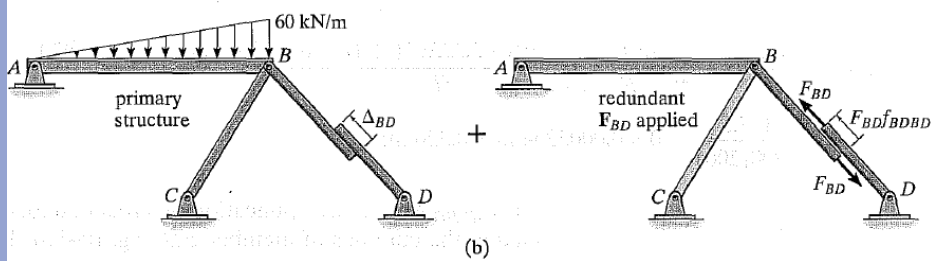
The beam shown in Fig. 10-17a is supported by a pin at A and two pin-connected bars at B . Determine the force in member BD . Take $E = 200 \text{ GPa}$, $I = 300 (10^6) \text{ mm}^4$ for the beam, and $A = 1800 \text{ mm}^2$ for each bar.



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

79



Compatibility Equation. With reference to the relative displacement of the cut ends of member BD , Fig. 10-17b, we require

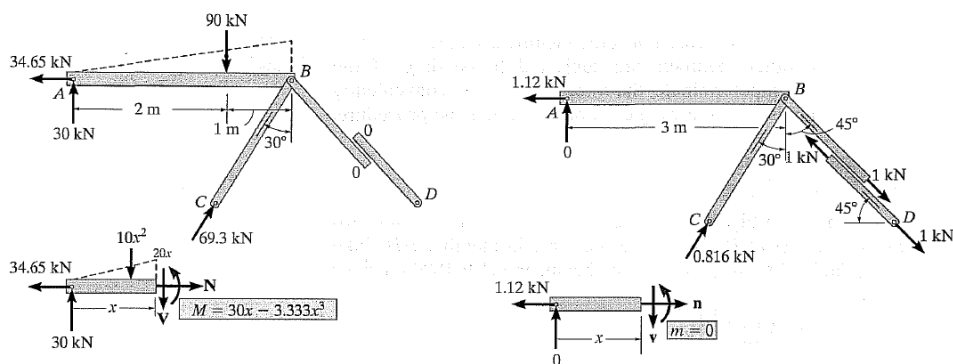
$$0 = \Delta_{BD} + F_{BD} f_{BD BD} \tag{1}$$

The method of virtual work will be used to compute Δ_{BD} and $f_{BD BD}$.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

80



$$\Delta_{BD} = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx + \sum \frac{nNL}{AE} = \int_0^3 \frac{(30x - 3.333x^2)(0)}{EI} dx + \frac{(-69.3)(-0.816)(1.8/\cos 30^\circ)}{AE} + \frac{(0)(1)(1.8/\cos 45^\circ)}{AE}$$

$$= 0 + \frac{117.5}{1800(200)} + 0 = 0.0003264 \text{ m} = 0.326 \text{ mm}$$

$$f_{BD BD} = \int_0^L \frac{m^2}{EI} dx + \sum \frac{n^2 L}{AE} = \int_0^3 \frac{(0)^2}{EI} dx + \frac{(-0.816)^2(1.8/\cos 30^\circ)}{AE} + \frac{(1)^2(1.8/\cos 45^\circ)}{AE} = \frac{3.93}{1800(200)}$$

$$= 1.092(10^{-5}) \text{ m/kN}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

81

Substituting the data into Eq. (1) yields

$$0 = D_{BD} + F_{BD} f_{BD BD}$$

$$0 = 0.003264 + F_{BD}(1.092)(10^{-5})$$

$$F_{BD} = -29.9 \text{ kN} = 29.9 \text{ kN (C)} \quad \text{Ans.}$$

Using this result, draw the free-body diagram of the beam and show that $F_{BC} = 44.9 \text{ kN (C)}$, $A_x = 1.31 \text{ kN}$, and $A_y = 30.0 \text{ kN}$.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

82

ملاحظات إضافية على طريقة القوى

تتعتمد معاملات المرونة f_{ij} على الخصائص الهندسية لعناصر المنشأ وخصائص المواد المكونة لها ولا علاقة لها بالأحمال الخارجية المطبقة على المنشأ الأساس. وعليه ما إن تُحسب هذه المعاملات تصبح جاهزة للاستخدام لإيجاد ردود أفعال مساند المنشأ الناجمة عن تطبيق أي أحمال على المنشأ.

لكل منشأ غير مقرر سكونياً من الدرجة n لا بد من كتابة n معادلة

$$\Delta_1 + f_{11}R_1 + f_{12}R_2 + \dots + f_{1n}R_n = 0$$

$$\Delta_2 + f_{21}R_1 + f_{22}R_2 + \dots + f_{2n}R_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n + f_{n1}R_1 + f_{n2}R_2 + \dots + f_{nn}R_n = 0$$

تعتمد $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ على الأحمال الخارجية المطبقة على المنشأ الأساس

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

83

يمكن كتابة مجموعة المعادلات السابقة على الشكل المصفوفي التالي:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} \quad (10-2)$$

or

$$\mathbf{fR} = -\Delta$$

بما أن $f_{ij} = f_{ji}$ فإن مصفوفة المرونة \mathbf{f} ستكون متناظرة

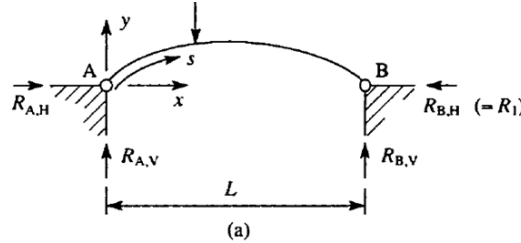
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

84

تحليل الأقواس ذات المفصلين Analysis of Two-Pinned Arches

للقوس ذي المفصلين المبين في الشكل (a) درجة عدم تقرير سكوني واحدة



يمكن التعبير عن الشكل الهندسي للقوس بواسطة الإحداثيين x و y . ويمكن تحديد المسافة على طول القوس بالإحداثي المنحني s وسنعتبر عزم عطالة مقطعه العرضي ثابتاً I

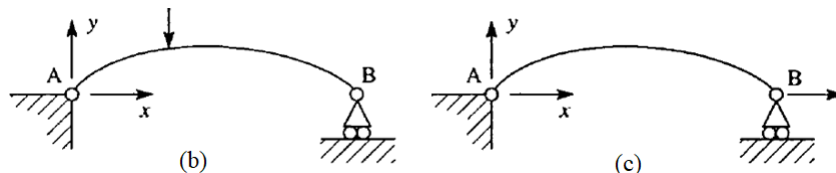
يمكن تحليل القوس ذي المفصلين بطريقة القوى كما هو الحال في تحليل الإطارات، ومن الطبيعي أن نهمل تأثير القوى المحورية عند حساب الانتقالات

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

85

في البداية نحول المنشأ إلى مقرر (منشأ أساس) بتحرير رد الفعل الأفقي R_1 عند B كما هو مبين في الشكل (b) ومن ثم نطبق واحدة الأحمال الوهمية عند B وذلك لإيجاد الانتقال الأفقي $\Delta_{B,H}$ الناتج عن الأحمال الخارجية وكذلك إيجاد معامل المرونة f_{11}



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

86

$$\Delta_{B,H} = \int_{Profile} \frac{M_0 M_1}{EI} ds \quad f_{11} = \int_{Profile} \frac{M_1^2}{EI} ds$$

R_1 سالبة كونها معاكسة لوادة الحمل الوهمي.

M_0 العزم في المنشأ الأساس الناجم عن الأحمال الخارجية

$M_1 = 1 \times y$ العزم في المنشأ الأساس الناجم عن وادة الأحمال الوهمية

$$f_{11} = \int_{Profile} \frac{y^2}{EI} ds$$

نكتب معادلة الانسجام الانتقالات عند B كما يلي:

$$\Delta_{B,H} - f_{11} R_1 = 0$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

87

بتعويض $\Delta_{B,H}$ و f_{11} في معادلة الانسجام ينتج:

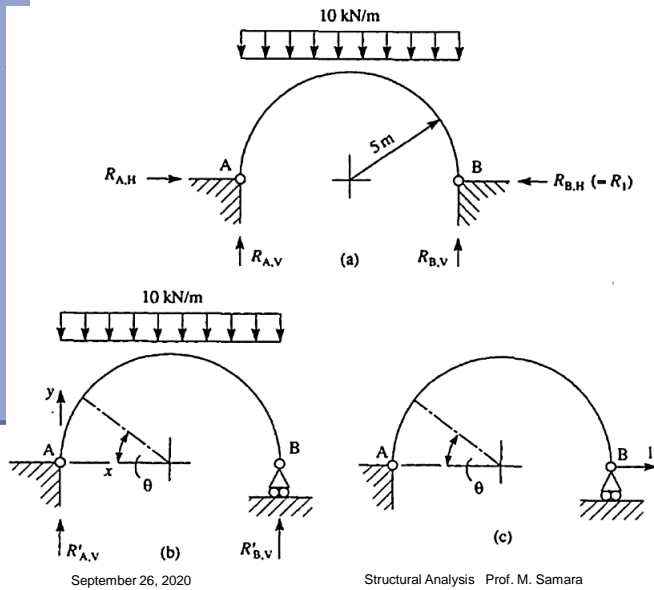
$$R_1 = \frac{\int_{Profile} \frac{M_0 y}{EI} ds}{\int_{Profile} \frac{y^2}{EI} ds}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

88

مثال



أوجد ردود أفعال القوس نصف الدائري ذي المفصلين المبين في الشكل (a) علماً أن EI ثابتة

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

89

$$R_1 = \frac{\int_{Profile} \frac{M_0 y}{EI} ds}{\int_{Profile} \frac{y^2}{EI} ds}$$

$$M_0 = R'_{B,V}(5 + 5 \cos \theta) - \frac{10}{2}(5 + 5 \cos \theta)^2 \quad (i)$$

\$R'_{B,V} = 50\$ kN. بسبب التناظر

بالتعويض في المعادلة (i) ينتج:

$$M_0 = 125 \sin^2 \theta \quad (ii)$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

90

$$y = 5 \sin \theta \quad , \quad ds = 5 d\theta,$$

$$R_1 = \frac{\int_0^\pi 125 \sin^2 \theta \cdot 5 \sin \theta \cdot 5 d\theta}{\int_0^\pi 25 \sin^2 \theta \cdot 5 d\theta} = \frac{\int_0^\pi 25 \sin^3 \theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta}$$

$$R_1 = 21.2 kN (= R_{B,H})$$

وباستخدام معادلات التوازن ينتج:

$$R_{A,H} = 21.2 kN$$

$$R_{A,V} = R_{B,V} = 50 kN$$

September 26, 2020

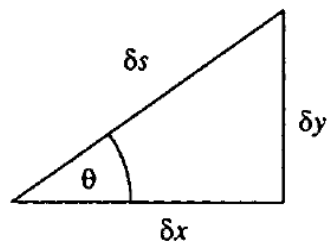
Structural Analysis Prof. M. Samara

91

فرضية القاطع

Secant assumption

لإيجاد R_1 يمكن تبسيط الحل إذا تم استبدال الحد ds/I بحد آخر يكون تابعاً لـ x



لنأخذ عنصراً من القوس طوله δs فيكتب مسقطه δx على المحور x كما يلي:

$$\delta x = \delta s \cos \theta$$

وعندما تنتهي $\delta s \rightarrow ds$ نكتب:

$$ds = dx / \cos \theta = dx \sec \theta \quad \text{and} \quad \frac{ds}{I} = \frac{dx \sec \theta}{I}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

92

فإذا فرضنا أن عزم عطالة المقطع العرضي للقوس I يتغير على طول القوس بحيث $I = I_0 \sec \theta$ نجد:

$$\frac{ds}{I} = \frac{dx \sec \theta}{I_0 \sec \theta} = \frac{dx}{I_0}$$

حيث I_0 عزم عطالة المقطع العرضي للقوس عند ذروته بالتعويض في معادلة R_1 نجد:

$$R_1 = \frac{\int_{\text{Profile}} \frac{M_0 y}{EI_0} dx}{\int_{\text{Profile}} \frac{y^2}{EI_0} dx} \quad \text{Or} \quad R_1 = \frac{\int_{\text{Profile}} M_0 y dx}{\int_{\text{Profile}} y^2 dx}$$

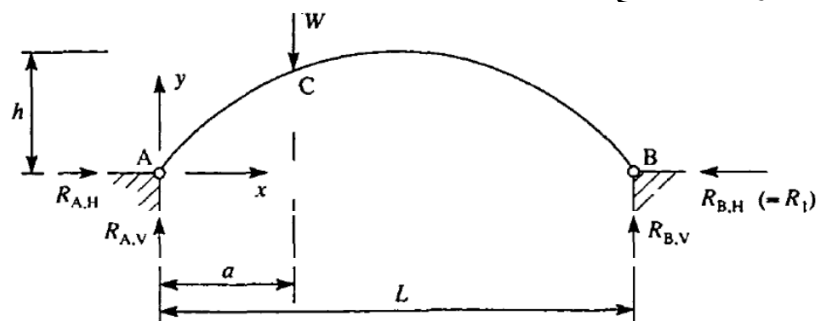
September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

93

مثال

أوجد ردود أفعال مساند المنشأ القوس المبين في الشكل علماً أن للقوس شكل قطع مكافئ وأن عزم عطالة مقطعه العرضي يتغير وفقاً لفرضية القاطع.



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

94

تُكتب معادلة منحنى القوس كما يلي:

$$y = \frac{4h}{L^2} (Lx - x^2) \quad (i)$$

للحصول على منشأ نحرر القيد الأفقي عند المسند B وعليه نكتب:

$$M_0 = R'_{A,V}x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$M_0 = R'_{A,V}x - W(x - a) \quad (a \leq x \leq L)$$

$R'_{A,V}$ رد الفعل الشاقولي للمسند A على المنشأ الأساس

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

95

بكتابة معادلة توازن العزوم عند المسند B ينتج:

$$R'_{A,V}L - W(L - a) = 0$$

$$R'_{A,V} = \frac{W}{L}(L - a)$$

بالتعويض في معادلة M_0 ينتج:

$$M_0 = \frac{W}{L}(L - a)x \quad (a \leq x \leq L) \quad (ii)$$

$$M_0 = \frac{Wa}{L}(L - x) \quad (0 \leq x \leq a) \quad (iii)$$

بمكاملة مقام الكسر في معادلة R_1 بشكل مستقل ينتج:

$$\int_{\text{Profile}} y^2 dx = \int_0^L \left(\frac{4h}{L^2}\right)^2 (Lx - x^2)^2 dx = \frac{8h^2L}{15}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

96

$$R_1 = \frac{15}{8h^2L} \left[\int_0^a \frac{W}{L} (L-a)x \frac{4h}{L^2} (Lx - x^2) dx + \int_a^L \frac{Wa}{L} (L-x) \frac{4h}{L^2} (Lx - x^2) dx \right] \quad \text{إذاً}$$

$$R_1 = \frac{5Wa}{8hL^3} (L^3 + a^3 - 2La^2) \quad \text{(iv)}$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

97

في المثال السابق إذا كتبنا $a = kL$ تصبح المعادلة (iv) كما يلي:

$$R_1 = \frac{5WL}{8h} (k + k^4 - 2k^3)$$

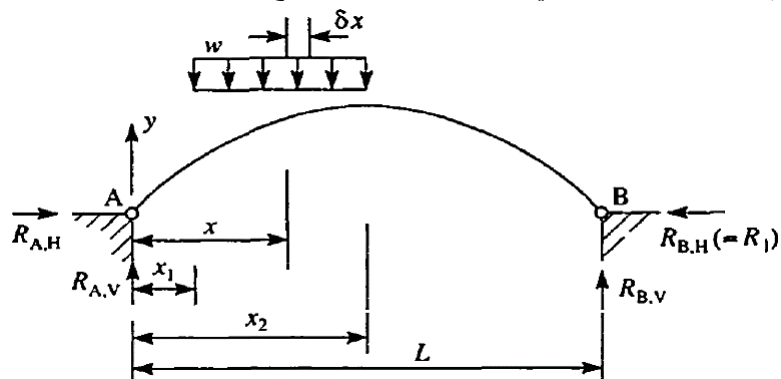
إذا من أجل مجموعة من الأحمال مطبقة على مسافات k_1L, k_2L, \dots, k_3L من B يتم حساب رد الفعل R_1 لكل حمل على حدى ثم تُجمع ردود الأفعال للحصول على رد الفعل الكلي.

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

98

يمكن استخدام النتيجة السابقة في إيجاد رد الفعل R_1 النجم عن حمل موزع بانتظام على جزء من مجاز القوس كما في الشكل أدناه علماً أن القوس قطع مكافئ وأن عزم عطالة مقطعه العرضي يتغير وفقاً لفرضية القاطع



September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

99

يمكن اعتبار الحمولة $w\delta x$ الموزعة على طول من مسقط القوس δx مركزاً وعليه تنتج رد فعل أفقي δR_1 يُحدد بالعلاقة التالية:

$$\delta R_1 = \frac{5}{8} w \delta x \frac{L}{h} (k + k^4 - 2k^4)$$

$$k = x/L$$

لإيجاد R_1 نكامل المعادلة السابقة ولكن بعد تعويض $k=x/L$

$$R_1 = \frac{5wL}{8h} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x}{L} + \frac{x^4}{L^4} - \frac{2x^3}{L^3} \right) dx$$

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

100

$$R_1 = \frac{5wL}{8h} \left[\frac{x^2}{2L} + \frac{x^5}{5L^4} - \frac{x^4}{2L^3} \right]_{x_1}^{x_2}$$

من أجل حمل موزع بانتظام على كامل المجاز ($x_1 = 0, x_2 = L$) ينتج:

$$R_1 = \frac{5wL}{8h} \left(\frac{L^2}{2L} + \frac{L^5}{5L^4} - \frac{L^4}{2L^3} \right) = \frac{wL^2}{8h}$$

يُحدد عزم الانعطاف في أي نقطة من القوس (x, y) كما يلي:

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h} \left[\frac{4h}{L^2} (Lx - x^2) \right]$$

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x + \frac{wx^2}{2} = 0$$

September 26, 2020

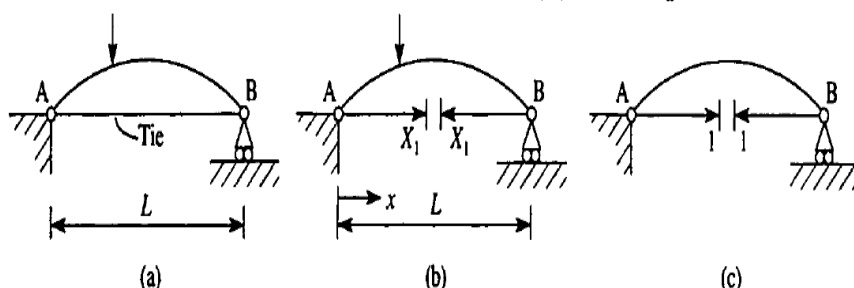
Structural Analysis Prof. M. Samara

101

الأقواس ذات الشدادات

Tied arches

■ في بعض الحالات يُستبدل رد الفعل الأفقي بشدادة يصل طرفي القوس كما في الشكل (a):



للحصول على منشأ أساس نحرر القوة في الشدادة X_1 وذلك بقطعه كما في الشكل (b).

September 26, 2020

Structural Analysis Prof. M. Samara

102

لتحديد الانتقال الأفقي عند B من المنشأ الأساس نطبق واحدة القوى الوهمية كما في الشكل (c) فينتج:

$$\Delta_{B,H} = \int_{\text{Profile}} \frac{M_0 M_1}{EI} ds + \int_0^L \frac{F_0 F_1 L}{AE} dx$$

And
$$f_{11} = \int_{\text{Profile}} \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_0^L \frac{F_1^2 L}{AE} dx$$

نعوض في معادلة انسجام الانتقالات عند B

$$\Delta_{B,H} + f_{11} X_1 = 0$$