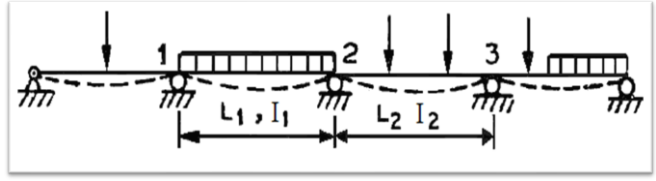
نظرية العزوم الثلاثة

Theorem of Three Moment

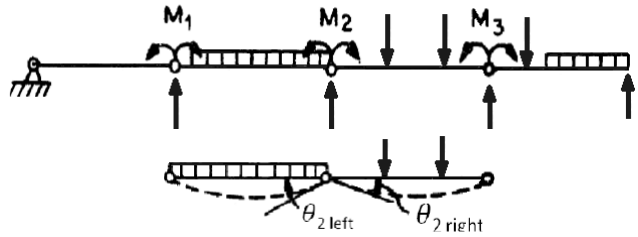
نظرية العزوم الثلاثة Theorem of Three Moment

لندرس الجائز المستمر ذا المساند المتتالية 1و 2 و 3 حيث يخضع المجازين 2-1 و 3-2 إلى أحمال اعتباطية كما هو مبين في الشكل



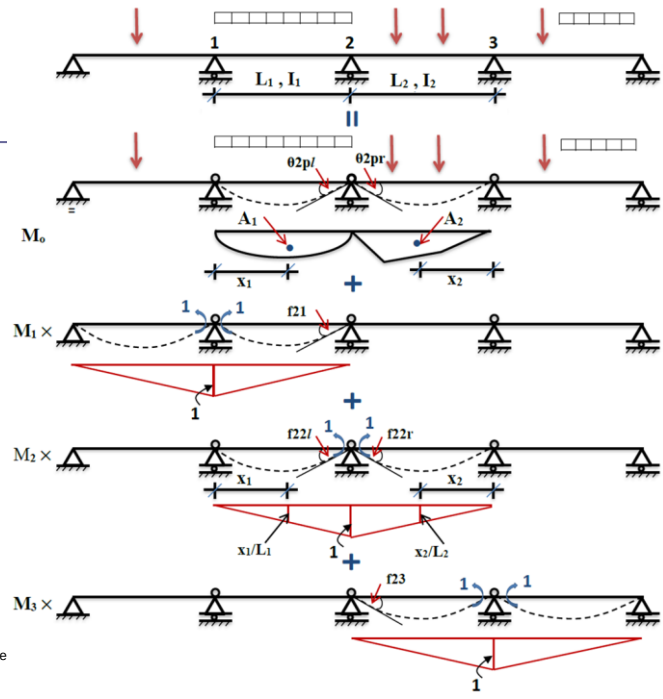
يمكن تحويل الجائز إلى مقرر (منشأ أساس) بإدخال مفاصل عند المساند واعتبار العزوم عند المساند M_1 و M_2 و M_3 فائضة ويجب ايجادها

والآن سندرس الشكل المتشوه للمنشأ الأساس تحت تأثير الأحمال المطبقة والعزوم الفائضة



يُكتب الدوران النسبي بين مجازي الجائز عند المسند 2 كما يلي:

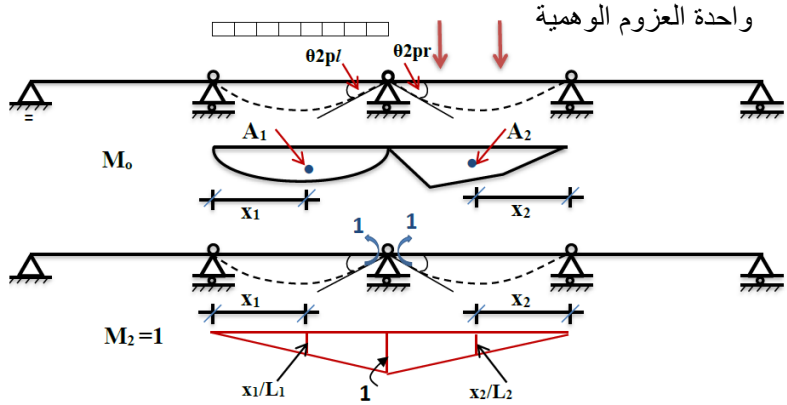
$$\theta_2 = \theta_{2\ left} + \theta_{2\ right}$$



تُكتب معادلة انسجام الدورانات بين مجازي الجائز عند المسند 2 كما يلي:

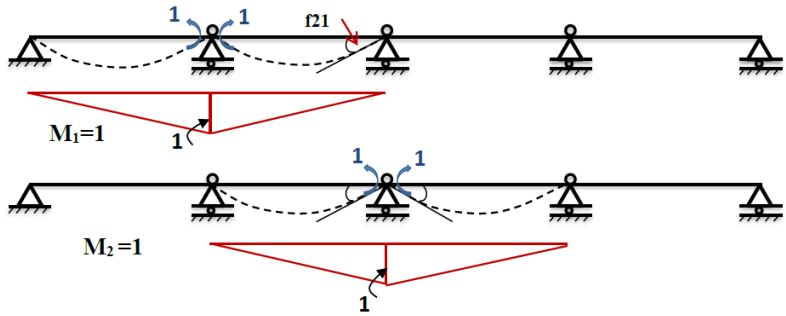
$$\theta_{2P} + f_{21}M_1 + f_{22}M_2 + f_{23}M_3 = 0$$

لحساب الدوران النسبي عند المسند 2 الناجم عن الأحمال الخارجية نطبق واحدة العزوم الوهمية



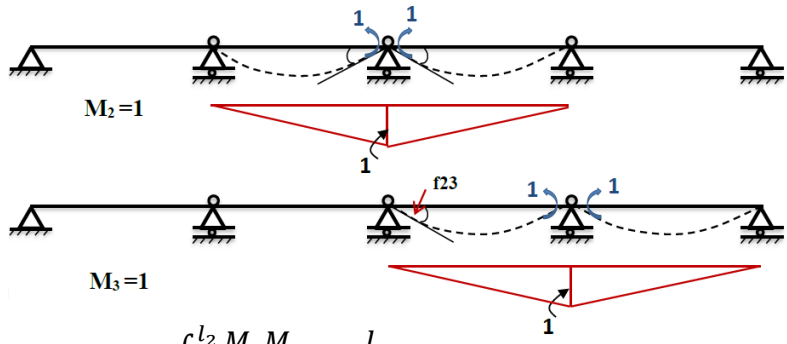
$$\theta_{2p} = \theta_{2pl} + \theta_{2pr} = \int_0^{l_1} \frac{M_O M_2}{EI_1} + \int_0^{l_2} \frac{M_O M_2}{EI_2} = \frac{A_1 x_1}{EI_1 l_1} + \frac{A_2 x_2}{EI_2 l_2}$$

لإيجاد معامل المرونة f_{21} نطبق واحدة العزوم الوهمية عند المسند 1 ونحسب الدوران عند المسند 2



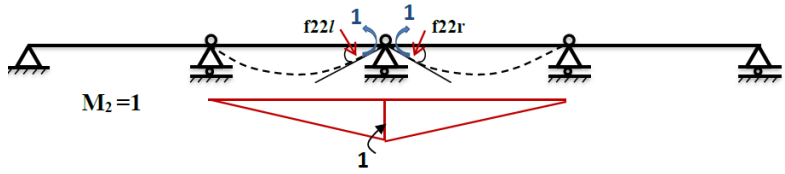
$$f_{21} = \int_0^{l_1} \frac{M_1 M_2}{EI_1} = \frac{l_1}{6EI_1}$$

لإيجاد معامل المرونة f_{23} نطبق واحدة العزوم الوهمية عند المسند 3 ونحسب الدوران عند المسند 2



$$f_{23} = \int_0^{l_2} \frac{M_3 M_2}{EI_1} = \frac{l_2}{6EI_2}$$

لإيجاد معامل المرونة f_{22} نطبق واحدة العزوم الوهمية عند المسند 2 ونحسب الدوران عند المسند 2



$$f_{22} = \int_0^{l_1} \frac{M_2 M_2}{EI_1} + \int_0^{l_2} \frac{M_2 M_2}{EI_2} = \frac{l_1}{3EI_1} + \frac{l_2}{3EI_2}$$

بالتعويض في معادلة انسجام التشوهات ينتج:

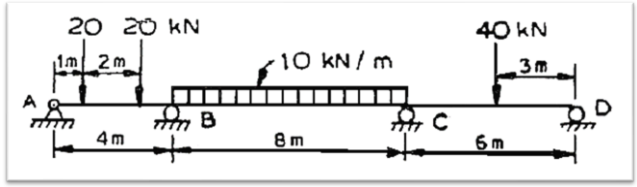
$$\frac{M_1 L_1}{EI_1} + 2M_2\left(\frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{EI_2}\right) + \frac{M_3 L_2}{EI_2} = -\frac{6A_1 x_1}{EI_1 L_1} - \frac{6A_2 x_2}{EI_2 L_2}$$

تُبسط المعادلة السابقة عندما تكون EI ثابتة فتصبح:

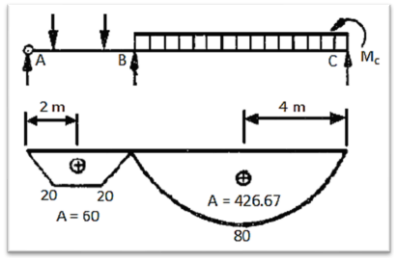
$$M_1 L_1 + 2M_2 (L_1 + L_2) + M_3 L_2 = -6\frac{A_1 x_1}{L_1} - 6\frac{A_2 x_2}{L_2}$$

مثال 1

حدد العزوم عند مساند الجائز المستمر المبين في الشكل وكذلك ردود أفعال المساند علماً إن EI ثابتة



الجائز غير مقرر من الدرجة الثانية لذلك لابد من تطبيق معادلة العزوم الثلاث مرتين: مرة عند المسند B ومرة أخرى عند المسند C

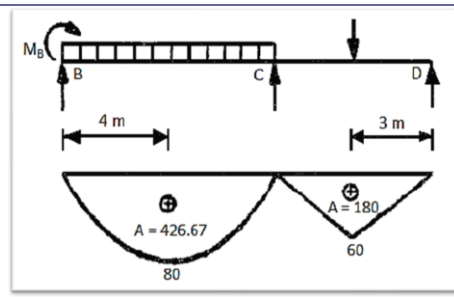


بتطبيق معادلة العزوم الثلاث عند المسند B ينتج:

$$M_A(4) + 2M_B(4+8) + M_C(8) = -6\frac{(60)(2)}{4} - 6\frac{(426.67)(4)}{8}$$

Since $M_A = 0$, this simplifies to

$$24M_B + 8M_C = -1460$$



بتطبيق معادلة العزوم الثلاث عند المسند C ينتج:

$$M_B(8) + 2M_C(8+6) + M_D(6) = -6\frac{(426.67)(4)}{8} - 6\frac{(180)(3)}{8}$$

Or $$8M_B + 28M_C = -1820$$

بحل المعادلتين ينتج:

$$M_B = -42.25 \text{ kN.m, and } M_C = -52.70 \text{ kN.m}$$

$$R_A = 20 + \frac{M_B}{4} \qquad R_A = 20 + \frac{(-42.25)}{4} = 9.44 \text{ kN}$$

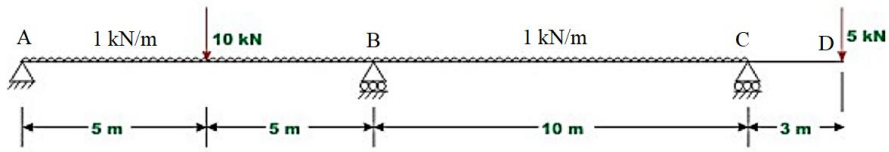
$$R_B = 20 + 10(4) + \frac{-M_B}{4} + \frac{M_C - M_B}{8} = 69.25 \text{ kN}$$

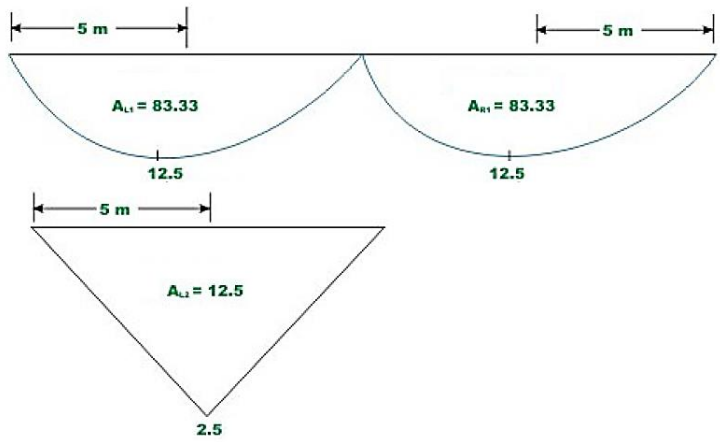
$$R_C = 60 + \frac{M_B - M_C}{8} - \frac{M_C}{6} = 70.09 \text{ kN}$$

$$R_D = 20 + \frac{M_C}{6} = 11.22 \text{ kN}$$

مثال 2

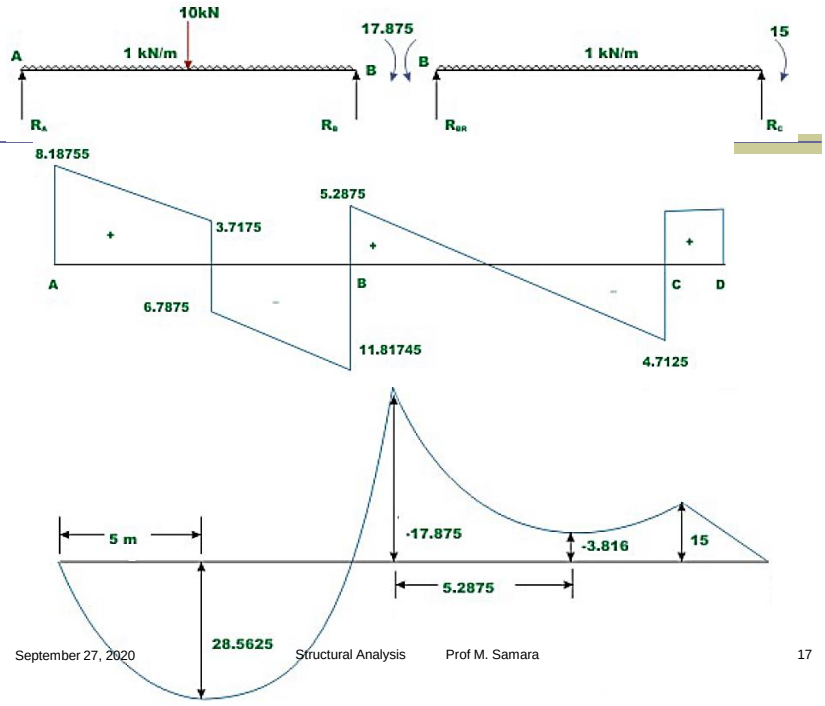
حدد العزوم عند مساند الجائز المستمر المبين في الشكل وكذلك ردود أفعال مسانده وارسم مخططي العزم والقص علماً أن EI ثابتة





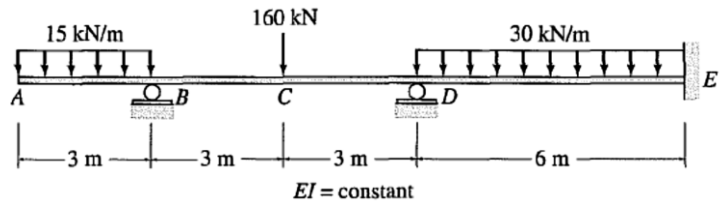
$$40M_B - 150 = -\frac{6\times 83.33\times 5}{10} - \frac{6\times 125\times 5}{10} - \frac{6\times 83.33\times 5}{10}$$

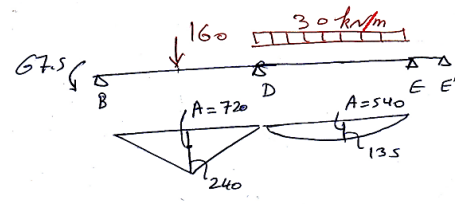
$$M_B = -18.125 \quad \text{kN.m}$$



مثال 3

حدد العزوم عند مساند الجائز المستمر المبين في الشكل وكذلك ردود أفعال مسانده وارسم مخطط العزم علماً أن EI ثابتة





at D $\quad M_B \times 6 + 2(6+6)M_D + 6 \times M_E = -\frac{6 \times 720 \times 3}{6} - \frac{6 \times 540 \times 3}{6}$

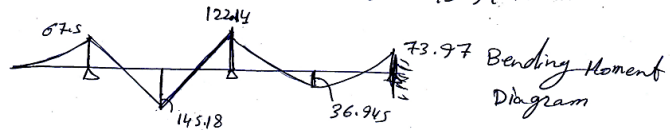
$M_B + 4M_D + M_E = -630$ and $M_B = -67.5$ $\Rightarrow$ $4M_D + M_E = -562.5$ ①

at E $\quad \frac{6 \times M_D}{EI} + 2M_E\left(\frac{6}{EI} + \frac{0}{\infty}\right) + \frac{M_{E'} \times 0}{\infty} = -\frac{6 \times 540 \times 3}{6EI}$

$M_D + 2M_E = -270$ — ②

Solving ① and ② $\Rightarrow$ $M_D = -122.14$ kNm

$M_E = -73.97$ kNm



Bending Moment Diagram