

طريقة توزيع العزوم

Moment Distribution Method

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

1

المبدأ العام للطريقة

General Principle

- تُعد طريقة توزيع العزوم طريقة للتقريب المتتالي يتم تنفيذها للوصول إلى الدقة المطلوبة في تحليل المنشأ.
- يتم الفرض في البداية أن كافة عقد المنشأ ثابتة (موثوقة) ثم بتحريرها وإعادتها موثوقة مرة تلو الأخرى يُعاد توزيع وتوازن العزوم الداخلية في العقد إلى أن تصل إلى دوراناتها النهائية تقريباً.

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

2

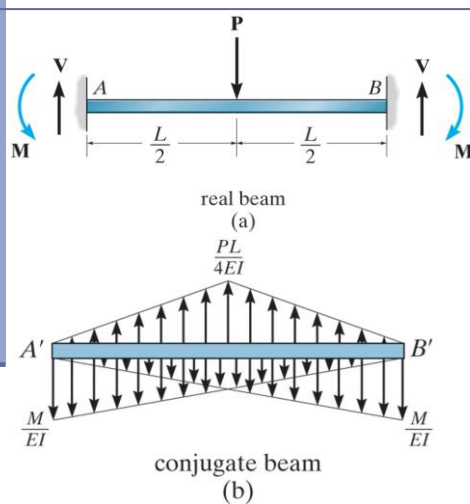
- اصطلاح الإشارة: تُعد العزوم المطبقة على العناصر موجبة إذا كانت باتجاه عقارب الساعة وتعد سالبة إذا كانت عكس ذلك.
- عزوم الوثاقاة (Fixed-End Moments (FEMs): يُسمى العزم الناجم في طرف موثوق من عنصر إنشائي محمل بحمل ما بعزم الوثاقاة

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

3



- لندرس الجائز الموثوق من طرفيه المبين في الشكل (a). وليكن الجائز المرافق له مبيناً في الشكل (b).

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

4

بكتابة معادلة التوازن على المحور الشاقولي للجائز المرافق ينتج:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) L \right] - 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \right] = 0$$

$$M = \frac{PL}{8}$$

يدعى هذا العزم بعزم الوثاقة (FEM) ويعطى إشارة سالبة عند الطرف A كونه عكس عقارب الساعة ويعطى إشارة موجبة عند الطرف B لأنه مع عقارب الساعة.

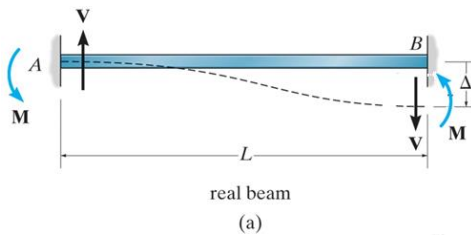
November 7, 2020

Structural Analysis

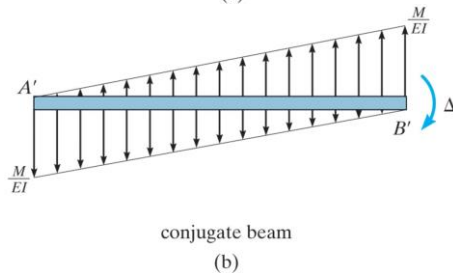
Prof. M. Samara

5

عزم الوثاقة الناجم عن انتقال نسبي Δ بين طرفي جائز موثوق



■ إذا انتقل الطرف B من الجائز المبين في الشكل a بمقدار Δ بالنسبة للطرف A فسينشأ في طرفي الجائز عزم وقص كما في الشكل.



■ يبين الشكل b الجائز المرافق
■ بما أن طرف الجائز B انتقل بمقدار Δ فسيخضع طرف الجائز المرافق إلى عزم مقداره Δ

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

6

بكتابة معادلة توازن عزوم الجائز المرافق عند B' نجد:

$$\downarrow + \Sigma M_{B'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{2}{3} L \right) \right] - \left[\frac{1}{2} \frac{M}{EI} (L) \left(\frac{1}{3} L \right) \right] - \Delta = 0$$

$$M_{AB} = M_{BA} = M = \frac{-6EI}{L^2} \Delta$$

يبين الجدول التالي عزوم الوثيقة لبعض حالات التحميل الشهيرة

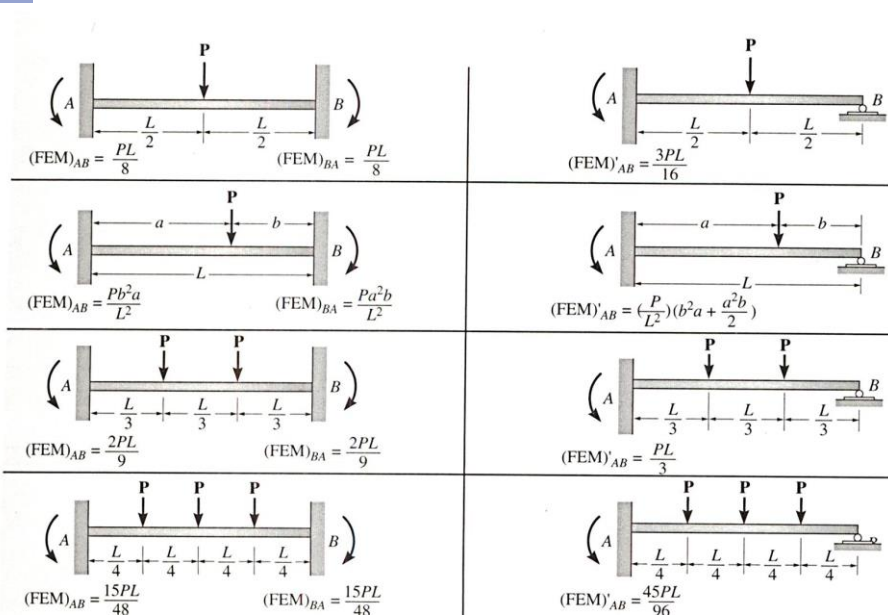
$$M_{AB} = (FEM)_{AB} \quad M_{BA} = (FEM)_{BA}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

7



November 7, 2020

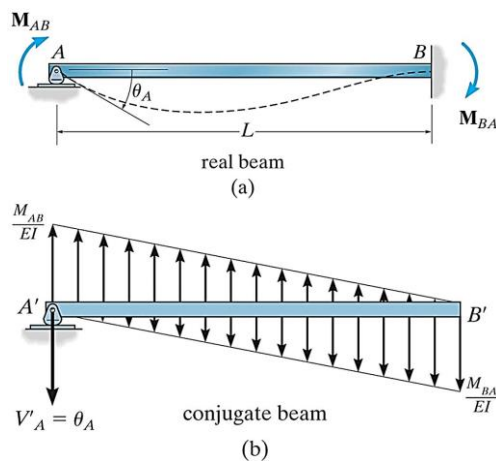
Structural Analysis

Prof. M. Samara

8

<p>$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{12}$ $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$</p>	<p>$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{8}$</p>
<p>$(FEM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$ $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$</p>	<p>$(FEM)'_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$</p>
<p>$(FEM)_{AB} = \frac{wL^2}{20}$ $(FEM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$</p>	<p>$(FEM)'_{AB} = \frac{wL^2}{15}$</p>
<p>$(FEM)_{AB} = \frac{5wL^2}{96}$ $(FEM)_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$</p>	<p>$(FEM)'_{AB} = \frac{5wL^2}{64}$</p>
<p>November 7, 2020 Structural Analysis $(FEM)_{AB} = \frac{PL\Delta}{L^2}$ $(FEM)_{BA} = \frac{PL\Delta}{L^2}$</p>	<p>Prof. M. Samara 9 $(FEM)'_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$</p>

زاوية الدوران في A Angular Displacement at A, θ_A



- لتحديد العزم M_{AB} اللازم لإحداث زاوية الدوران θ_A في الجانز المبين في الشكل a نستخدم طريقة الجانز المرافق وعليه يبين الشكل b الجانز المرافق للجانز في الشكل a
- بما أن زاوية الدوران θ_A مع عقارب الساعة فإن جهة القص عند A' ستكون للأسفل

بكتابة معادلة توازن عزوم الجائز المرافق عند A' و B' نجد:

$$\downarrow + \Sigma M_{A'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} = 0$$

$$\downarrow + \Sigma M_{B'} = 0; \quad \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{BA}}{EI} \right) L \right] \frac{L}{3} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{M_{AB}}{EI} \right) L \right] \frac{2L}{3} + \theta_A L = 0$$

الحل المشترك لهاتين المعادلتين يُعطي

$$M_{AB} = \frac{4EI}{L} \theta_A$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} \theta_A$$

November 7, 2020

Structural Analysis

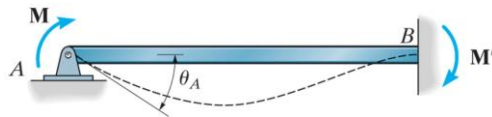
Prof. M. Samara

11

معامل صلابة عنصر Member Stiffness Factor:

يسبب تطبيق عزم M عند الطرف A العنصر المبين في الشكل دوراناً قدره θ_A

$$M = (4EI / L) \theta_A$$



يدعى $4EI / L$ بمعامل الصلابة عند A ويعرف بأنه العزم M اللازم لإحداث واحدة الدوران عند A

$$K = \frac{4EI}{L}$$

Far End Fixed

November 7, 2020

Structural Analysis

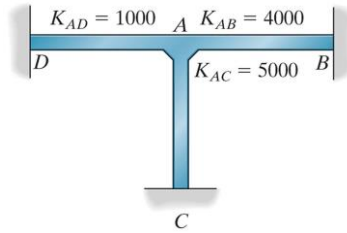
Prof. M. Samara

12

معامل صلابة عقدة:

إذا اتصلت مجموعة من العناصر بعقدة اتصالاً صلباً وكانت أطرافها البعيدة موثوقة فإن الصلابة الكلية للعقدة تساوي مجموع صلابات هذه العناصر

$$K_T = \sum K$$



يُحسب معامل الصلابة الكلي للعقدة A في الإطار المبين جانباً كما يلي:

$$K_T = \sum K = 4000 + 5000 + 1000 = 10000.$$

K_T يمثل مقدار العزم اللازم لتدوير العقدة A واحد راديان

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

13

معامل التوزيع (DF): Distribution Factor

إذا طُبِقَ عزم مقداره M على عقدة صلبة فسيقوم كل عنصر متصل بها جزءاً من هذا العزم وذلك كي تبقى العقدة متوازنة، تدعى نسبة هذا الجزء إلى العزم الكلي M بمعامل التوزيع

إذا كانت صلابة العنصر i هي K_i فسيساهم هذا العنصر في مقاومة العزم بـ $M_i = K_i \theta$ ولكن توازن العقدة يتطلب:

$$M = M_1 + \dots + M_n = K_1 \theta + \dots + K_n \theta = \theta \sum K_i$$

وعليه يحدد معامل التوزيع للعنصر i كما يلي:

$$DF_i = \frac{M_i}{M} = \frac{K_i \theta}{\theta \sum K_i} \quad \text{OR} \quad DF = \frac{K}{\sum K}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

14

$$DF_{AB} = 4000/10\,000 = 0.4$$

$$DF_{AC} = 5000/10\,000 = 0.5$$

$$DF_{AD} = 1000/10\,000 = 0.1$$

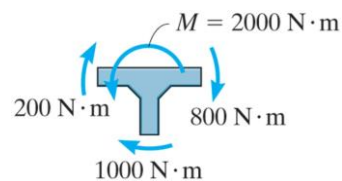
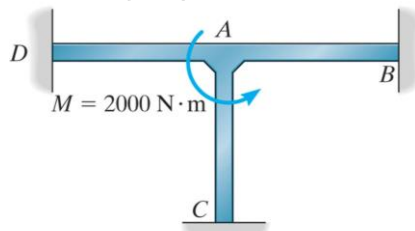
$$M_{AB} = 0.4(2000) = 800 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{AC} = 0.5(2000) = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$M_{AD} = 0.1(2000) = 200 \text{ N}\cdot\text{m}$$

يحدد معامل التوزيع للعناصر AB, AC, AD في العقدة A من المثال السابق كما يلي:

إذا طُبق عزم قدره $M = 2000 \text{ N}\cdot\text{m}$ فستكون مقاوم كل عنصر لهذا العزم:



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

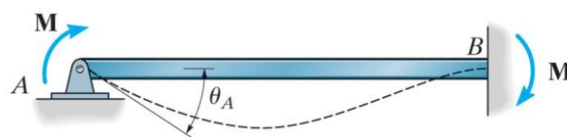
15

معامل النقل **Carry-Over Factor**:

إذا دققنا في الجائز المبين في الشكل نجد:

$$M_{AB} = (4EI/L) \theta_A \text{ and } M_{BA} = (2EI/L) \theta_A$$

$$M_{BA} = M_{AB}/2$$



معامل النقل هو النسبة من العزم M المطبق على عند المسند الثابت التي تنتقل إلى المسند الموثوق أي: $1/2$

November 7, 2020

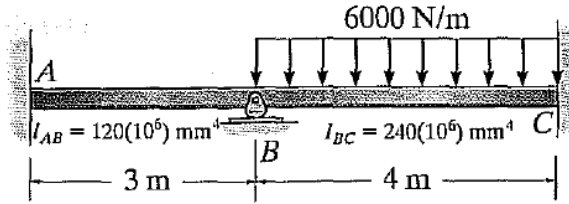
Structural Analysis

Prof. M. Samara

16

توزيع العزوم للجوائز Moment Distribution for Beams

لندرس الجانز المبين في الشكل علماً أن معامل مرونة مادته E



باستخدام $K = 4EI/L$ نحدد معاملي الصلابة على جانبي العقدة B كما يلي:

$$K_{BA} = \frac{4E(120)(10^6)}{3} = 4E(40)(10^6) \text{ mm}^4/\text{m} \quad K_{BC} = \frac{4E(240)(10^6)}{4} = 4E(60)(10^6) \text{ mm}^4/\text{m}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

17

باستخدام $DF = K/\sum K$ نحدد معاملي التوزيع على جانبي العقدة B كما يلي:

$$DF_{BA} = \frac{4E(40)}{4E(40) + 4E(60)} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{4E(60)}{4E(40) + 4E(60)} = 0.6$$

بما أن صلابة الوثاقة لا نهائية فيحدد معاملي التوزيع عند العقدتين A و C كما يلي:

$$DF_{AB} = \frac{4E(40)}{\infty + 4E(40)} = 0$$

$$DF_{CB} = \frac{4E(60)}{\infty + 4E(60)} = 0$$

November 7, 2020

Structural Analysis

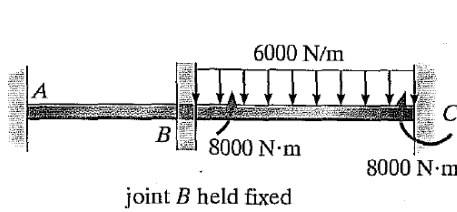
Prof. M. Samara

18

بما أن المجاز BC محمل بحمل موزع بانتظام فيحدد عزمي الوثاقة FEMs كما يلي:

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{6000(4)^2}{12} = -8000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{6000(4)^2}{12} = 8000 \text{ N} \cdot \text{m}$$



نبدأ بفرض أن العقدة B موثوقة وبالتالي فإن عزم الوثاقة عند B هو الذي سيحافظ على المجاز BC على هذا الشكل الموثوق كما في الشكل

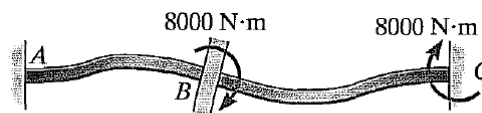
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

19

بما أن العزمين على جانبي العقدة B يجب أن يكونا متساويين ومتعاكسين بالجهة لذا نطبق على العقدة عزم مساوي ومعاكس للعزم $8000 \text{ N} \cdot \text{m}$ ونسمح للعقد بالدوران بحرية



correction moment applied to joint B

November 7, 2020

Structural Analysis

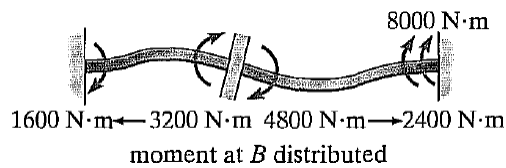
Prof. M. Samara

20

كنتيجة لذلك يتم توزيع هذا العزم على العنصرين BA و BC وفقاً لمعاملي توزيعهما DFs

حصة العنصر BA من العزم $0.4(8000) = 3200 \text{ N}\cdot\text{m}$

حصة العنصر BC من العزم $0.6(8000) = 4800 \text{ Nm}$



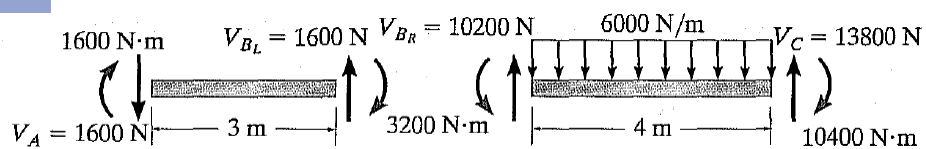
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

21

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4	0.6	0
FEM			-8000	8000
Dist,CO	1600 ←	3200	4800 →	2400
ΣM	1600	3200	-3200	10 400



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

22

E X A M P L E 12-1

Determine the internal moments at each support of the beam shown in Fig. 12-7a. EI is constant.

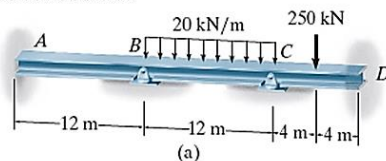


Fig. 12-7

Solution

The distribution factors at each joint must be computed first.* The stiffness factors for the members are

$$K_{AB} = \frac{4EI}{12} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{12} \quad K_{CD} = \frac{4EI}{8}$$

Therefore,

$$DF_{AB} = DF_{DC} = 0 \quad DF_{BA} = DF_{BC} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/12} = 0.5$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.4 \quad DF_{CD} = \frac{4EI/8}{4EI/12 + 4EI/8} = 0.6$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

23

E X A M P L E 12-1 - (Continued)

The fixed-end moments are

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-20(12)^2}{12} = -240 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{20(12)^2}{12} = 240 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CD} = -\frac{PL}{8} = \frac{-250(8)}{8} = -250 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (FEM)_{DC} = \frac{PL}{8} = \frac{250(8)}{8} = 250 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Starting with the FEMs, line 4, Fig. 12-7b, the moments at joints B and C are distributed *simultaneously*, line 5. These moments are then carried over *simultaneously* to the respective ends of each span, line 6. The resulting moments are again simultaneously distributed and carried over, lines 7 and 8. The process is continued until the resulting moments are diminished an appropriate amount, line 13. The resulting moments are found by summation, line 14.

Placing the moments on each beam span and applying the equations of equilibrium yields the end shears shown in Fig. 12-7c and the bending-moment diagram for the entire beam, Fig. 12-7d.

November 7, 2020

Structural Analysis

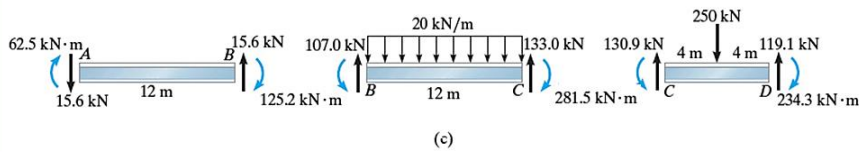
Prof. M. Samara

24

EXAMPLE 12-1 - (Continued)

Joint	A	B		C		D	1
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC	2
DF	0	0.5	0.5	0.4	0.6	0	3
FEM			-240	240	-250	250	4
Dist.		120	120	4	6		5
CO	60		2	60		3	6
Dist.		-1	-1	-24	-36		7
CO	-0.5		-12	-0.5		-18	8
Dist.		6	6	0.2	0.3		9
CO	3		0.1	3		0.2	10
Dist.		-0.05	-0.05	-1.2	-1.8		11
CO	-0.02		-0.6	-0.02		-0.9	12
Dist.		0.3	0.3	0.01	0.01		13
ΣM	62.5	125.2	-125.2	281.5	-281.5	234.3	14

(b)



(c)

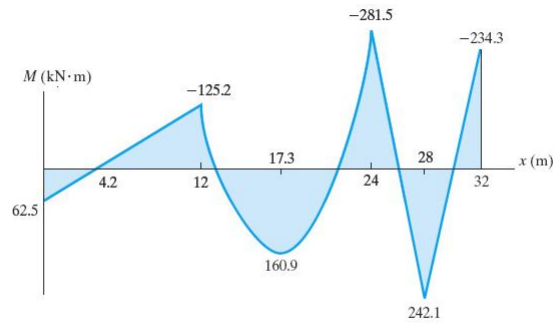
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

25

EXAMPLE 12-1 - (Continued)



(d)

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

26

تعديلات معامل الصلابة Stiffness-Factor Modifications

أحياناً يكون ممكناً تعديل معامل الصلابة لمجاز محدد من جائز مما يبسط عملية توزيع العزوم. لذا سندرس حالتين شهيرتين يوجدان في الواقع بكثرة

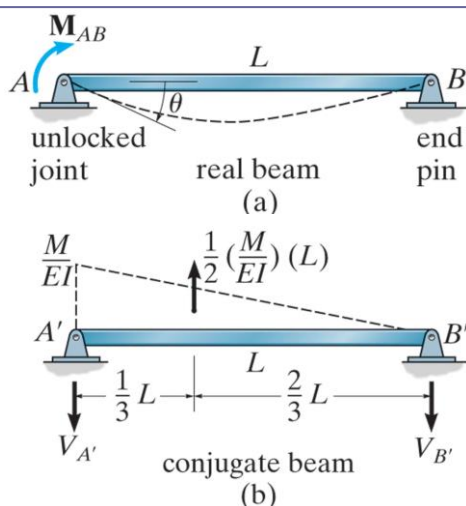
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

27

العنصر ذو الاستناد المفصلي عند طرفه البعيد Member Pin Supported at Far End



يستند العديد من الجوائز غير المقررة عند طرفها البعيد على مسند ثابت أو متدحرج كما في الطرف B من الشكل a . هنا عند تطبيق عزم M عند A سيحصل دوران قدره θ . لحساب هذا الجائز المرافق عند A' المبين في الشكل b

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

28

$$\downarrow + \Sigma M_B = 0; \quad V'_A(L) - \frac{1}{2} \left(\frac{M}{EI} \right) L \left(\frac{2}{3} L \right) = 0$$

$$V'_A = \theta = \frac{ML}{3EI}$$

or

$$M = \frac{3EI}{L} \theta$$

لهذا أصبح معامل الصلابة كما يلي:

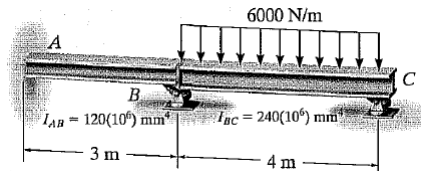
$$K = \frac{3EI}{L}$$

Far End Pinned
or Roller Supported

- يجب استخدام معامل صلابة قدره $K = 3EI / L$ عندما يكون مسند الطرف البعيد ثابتاً أو متدحرجاً
- بما أن الطرف البعيد B لا يتحمل عزماً لذا فإن معامل النقل باتجاهه يساوي الصفر
- بما أن الطرف البعيد B يستند على مسند ثابت أو متدحرج لذا فإن عزم الوثاق يُحسب باستخدام العمود الأيمن من جدول عزوم الوثاق السابق

EXAMPLE 12-4

Determine the internal moments at the supports of the beam shown in Fig. 12-14a. The moment of inertia of the two spans is shown in the figure.



$$K_{AB} = \frac{4EI}{L} = \frac{4E(120)(10^6)}{15} = 160(10^6)E$$

$$K_{BC} = \frac{3EI}{L} = \frac{3E(240)(10^6)}{20} = 180(10^6)E$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

31

EXAMPLE 12-4 (Continued)

Thus,

$$DF_{AB} = \frac{80E}{\infty + 80E} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{80E}{80E + 90E} = 0.4706$$

$$DF_{BC} = \frac{90E}{80E + 90E} = 0.5294$$

$$DF_{CB} = \frac{90E}{90E} = 1$$

Further simplification of the distribution method for this problem is possible by realizing that a *single* fixed-end moment for the end span *BC* can be used. Using the right-hand column of the table on the inside back cover for a uniformly loaded span having one side fixed, the other pinned, we have

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{8} = -\frac{6000(4)^2}{8} = -12\,000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

32

E X A M P L E 12-4 - (Continued)

The foregoing data are entered into the table in Fig. 12-14b and the moment distribution is carried out. By comparison with Fig. 12-6b, this method considerably simplifies the distribution.

Using the results, the beam's end shears and moment diagrams are shown in Fig. 12-14c.

Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4706	0.5294	1
FEM Dist.		5647.2	-12 000 6352.8	
CO	2823.6			
ΣM	2823.6	5647.2	-5647.2	0

(b)

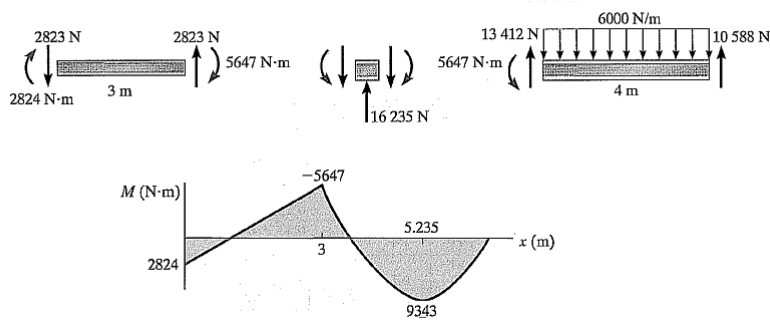
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

33

E X A M P L E 12-4 - (Continued)



(c)

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

34

الجائز المتناظر هندسياً وتحميلاً Symmetric Beam and Loading

عندما يكون الجائز متناظراً هندسياً وتحميلاً يكون مخطط عزم الانعطاف متناظر أيضاً وكنتيجة لذلك يمكن تعديل معامل صلابة المجاز الوسطي فيصبح توزيع العزوم ضرورياً فقط على أحد جانبي محور التناظر

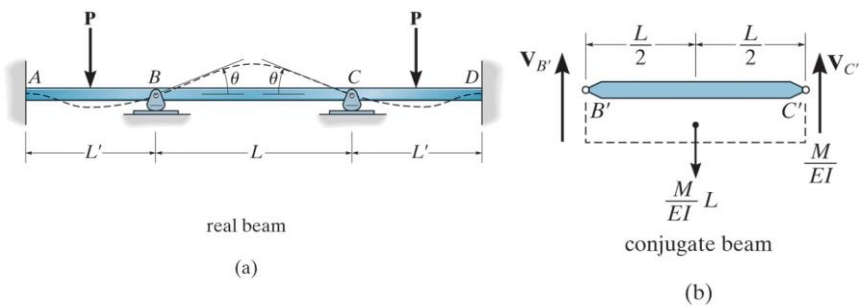
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

35

نتيجة التناظر سيكون العزمين عند كل من B و C متساويين وقدره M وسيكون الجائز المرافق للمجاز BC كما في الشكل b



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

36

$$\downarrow + \Sigma M_C = 0; \quad -V_B(L) + \frac{M}{EI}(L)\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$V_B = \theta = \frac{ML}{2EI}$$

or

$$M = \frac{2EI}{L}\theta$$

وعليه فإن معامل الصلابه للمجاز الأوسط يصبح:

$$K = \frac{2EI}{L}$$

Symmetric Beam and Loading

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

37

EXAMPLE 12-3

Determine the internal moments at the supports for the beam shown in Fig. 12-13a. EI is constant.

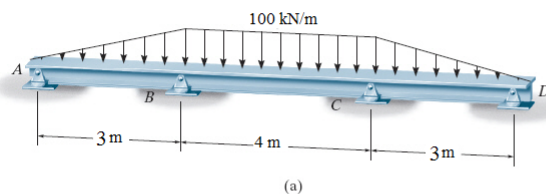


Fig. 12-13

Solution

By inspection, the beam and loading are symmetrical. Thus, we will apply $K = 2EI/L$ to compute the stiffness factor of the center span BC and therefore use only the left half of the beam for the analysis. The analysis can be shortened even further by using $K = 3EI/L$ for computing the stiffness factor of segment AB since the far end A is pinned. Furthermore, the distribution of moment at A can be skipped by using the FEM for a triangular loading on a span with one end fixed and the other pinned. Thus,

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

38

EXAMPLE 12-3 (Continued)

$$K_{AB} = \frac{3EI}{3} \quad (\text{using Eq. 12-4})$$

$$K_{BC} = \frac{2EI}{4} \quad (\text{using Eq. 12-5})$$

$$DF_{AB} = \frac{3EI/3}{3EI/3} = 1$$

$$DF_{BA} = \frac{3EI/3}{3EI/3 + 2EI/4} = 0.667$$

$$DF_{BC} = \frac{2EI/4}{3EI/3 + 2EI/4} = 0.333$$

$$(\text{FEM})_{BA} = \frac{wL^2}{15} = \frac{100(3)^2}{15} = 60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\text{FEM})_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = -\frac{100(4)^2}{12} = -133.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

These data are listed in the table in Fig. 12-13b. Computing the stiffness factors as shown above considerably reduces the analysis, since only joint *B* must be balanced and carry-overs to joints *A* and *C* are not necessary. Obviously, joint *C* is subjected to the same internal moment.

Joint	A	B	
Member	AB	BA	BC
DF	1	0.667	0.333
FEM		60	-133.3
Dist.		48.9	24.4
ΣM	0	108.9	-108.9

(b)

November 7, 2020

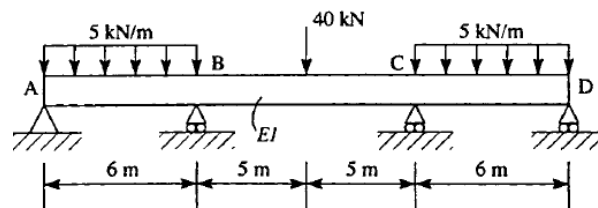
Structural Analysis

Prof. M. Samara

39

Example

- Calculate the reactions at the supports in the beam ABCD shown in Fig. The flexural rigidity of the beam is constant throughout



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

40

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = -\frac{5 \times 6^2}{12} = -15 \text{ kN m}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = -\frac{40 \times 10}{8} = -50 \text{ kN m}$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{3EI/6}{3EI/6 + 2EI/10} = 0.71$$

$$DF_{BC} = 1 - 0.71 = 0.29$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

41

	A	B	
DFs	1	0.71	0.29
FEMs	-15.0	+15.0	-50.0
Balance A	+15.0		
Carry over		+7.5	
Balance B		+19.52	+7.98
Final moments	0	+42.2	-42.2

November 7, 2020

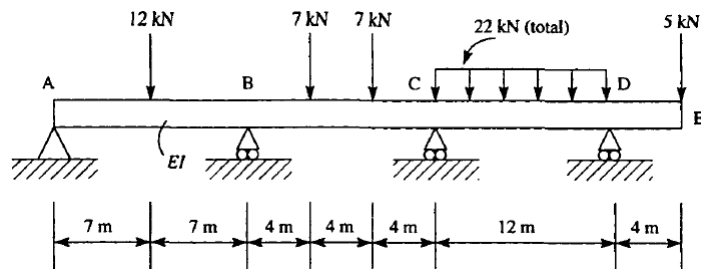
Structural Analysis

Prof. M. Samara

42

Example

- Calculate the support reactions in the beam shown in Fig. The flexural rigidity, EI , of the beam is constant throughout.



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

43

$$M_{AB}^F = -M_{BA}^F = -\frac{12 \times 14}{8} = -21 \text{ kN m}$$

$$M_{BC}^F = -M_{CB}^F = -\frac{7 \times 4 \times 8^2}{12^2} - \frac{7 \times 8 \times 4^2}{12^2} = -18.67 \text{ kN m}$$

$$M_{CD}^F = -M_{DC}^F = -\frac{22 \times 12}{12} = -22 \text{ kN m}$$

$$M_{DE}^F = -5 \times 4 = -20 \text{ kN m}$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{3EI/14}{3EI/14 + 4EI/12} = 0.39$$

$$DF_{BC} = 1 - 0.39 = 0.61$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K_{CD}} = \frac{4EI/12}{4EI/12 + 3EI/12} = 0.57$$

$$DF_{CD} = 1 - 0.57 = 0.43$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

44

	A	B		C		D		E
DFs	1	0.39	0.61	0.57	0.43	1.0	0	-
FEMs	-21.0	+21.0	-18.67	+18.67	-22.0	+22.0	-20.0	0
Balance A and D	+21.0					-2.0		
Carry over		+10.5				-1.0		
Balance		-5.0	-7.83	+2.47	+1.86			
Carry over			+1.24	-3.92				
Balance		-0.48	-0.76	+2.23	+1.69			
Carry over			+1.12	-0.38				
Balance		-0.44	-0.68	+0.22	+0.16			
Carry over			+0.11	-0.34				
Balance		-0.04	-0.07	+0.19	+0.15			
Final moments	0	+25.54	-25.54	+19.14	-19.14	+20.0	-20.0	0

$R_A = 4.18 \text{ kN}, \quad R_B = 15.35 \text{ kN}, \quad R_C = 17.4 \text{ kN}, \quad R_D = 16.07 \text{ kN}$

November 7, 2020

Structural Analysis

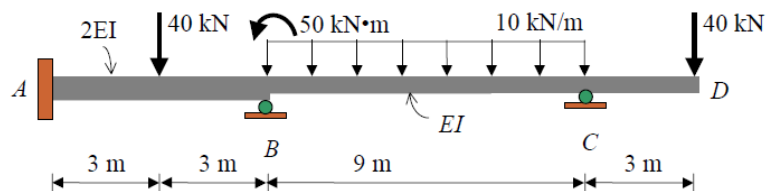
Prof. M. Samara

45

Example

From the beam shown use the moment distribution method to:

- (a) Determine all the reactions at supports, and also
- (b) Draw its **quantitative shear and bending moment diagrams**, and **qualitative deflected shape**.

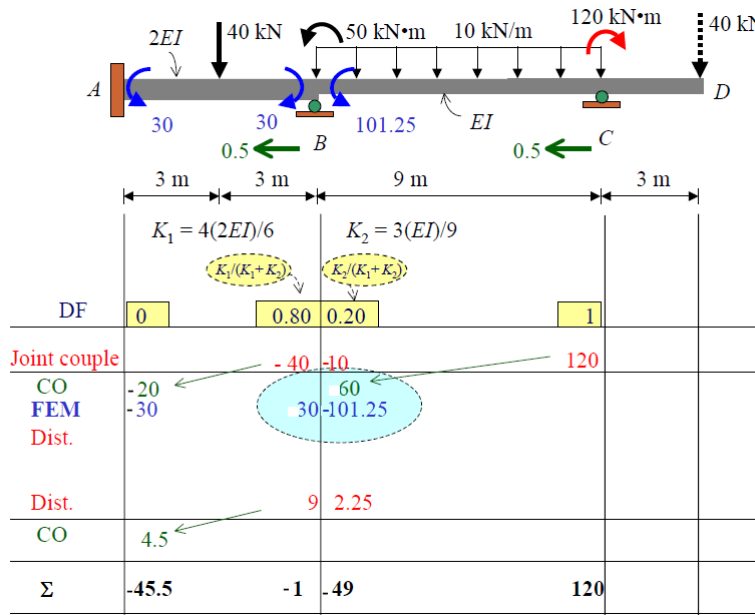


November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

46

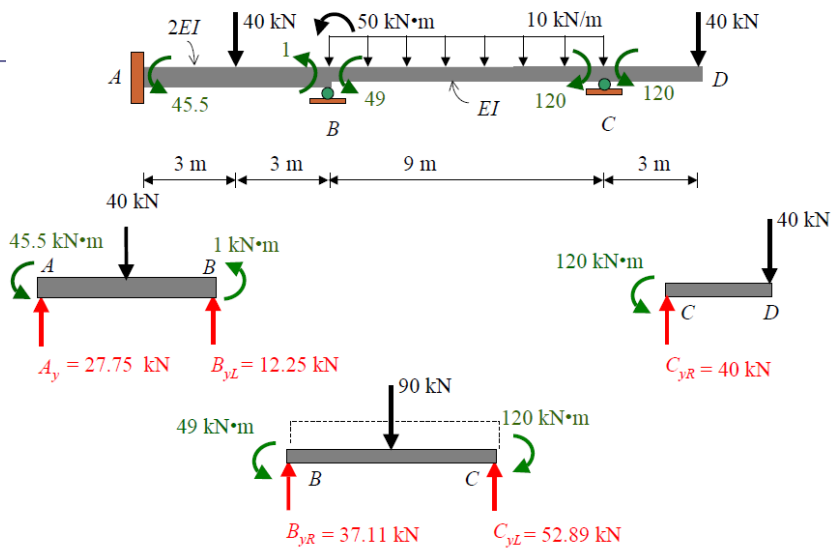


November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

47

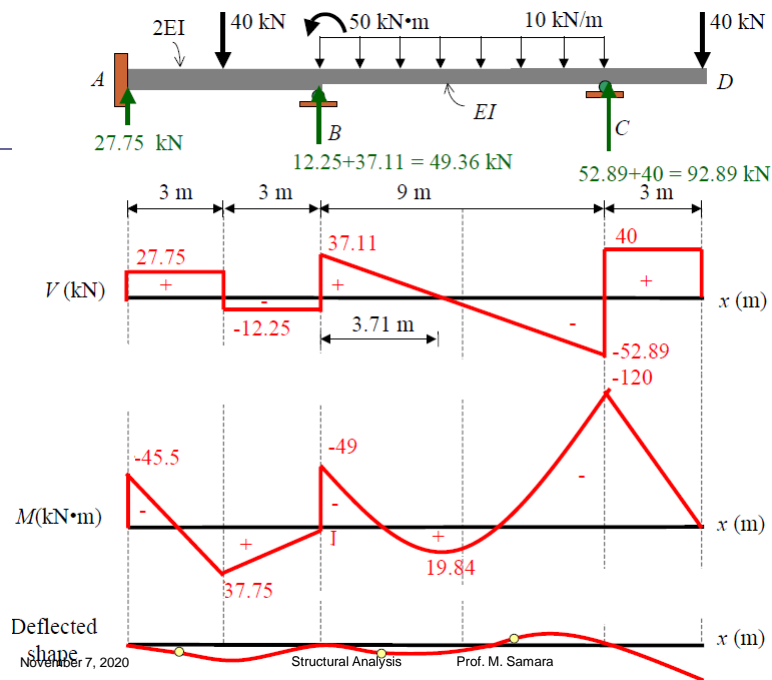


November 7, 2020

Structural Analysis

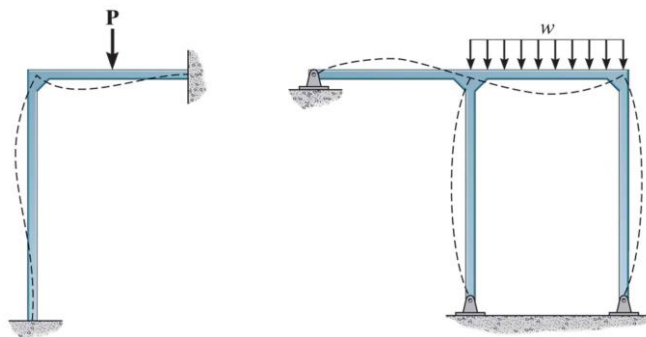
Prof. M. Samara

48

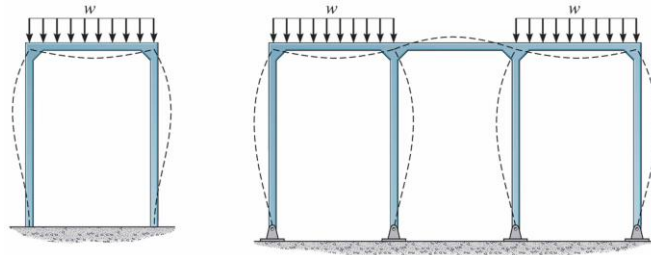


توزيع العزوم: حالة الإطارات الممنوعة من الانزياح الجانبي
Moment Distribution for Frames: No Side sway

لا ينزاح الإطار جانباً إذا كان ممنوعاً من الحركة إلى اليمين وإلى اليسار كما في الشكلين التاليين:



أيضاً لا يحدث انزياح جانبي في الإطارات غير الممنوعة من الانزياح إذا كان الإطار متناظر هندسياً وتحمياً



تُطبق طريقة توزيع العزوم على الإطارات التي لا تخضع إلى انزياح جانبي بنفس الخطوات التي طُبقت فيها على الجوائز

November 7, 2020

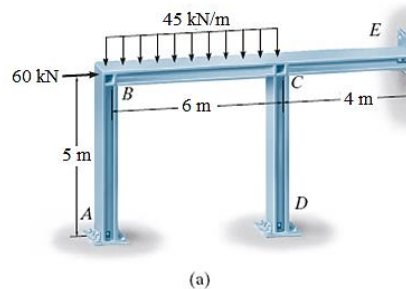
Structural Analysis

Prof. M. Samara

51

EXAMPLE 12-5

Determine the internal moments at the joints of the frame shown in Fig. 12-15a. There is a pin at E and D and a fixed support at A . EI is constant.



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

52

E X A M P L E 12-5 - (Continued)

Solution

By inspection, the pin at *E* will prevent the frame from sidesway. The stiffness factors of *CD* and *CE* can be computed using $K = 3EI/L$ since the far ends are pinned. Also, the 20-k load does not contribute a FEM since it is applied at joint *B*. Thus,

$$K_{AB} = \frac{4EI}{5} \quad K_{BC} = \frac{4EI}{6} \quad K_{CD} = \frac{3EI}{5} \quad K_{CE} = \frac{3EI}{4}$$

$$DF_{AB} = 0$$

$$DF_{BA} = \frac{4EI/5}{4EI/5 + 4EI/6} = 0.545$$

$$DF_{BC} = 1 - 0.545 = 0.455$$

$$DF_{CB} = \frac{4EI/6}{4EI/6 + 3EI/5 + 3EI/4} = 0.330$$

$$DF_{CD} = \frac{3EI/5}{4EI/6 + 3EI/5 + 3EI/4} = 0.298$$

$$DF_{CE} = 1 - 0.330 - 0.298 = 0.372$$

$$DF_{DC} = 1 \quad DF_{EC} = 1$$

$$(FEM)_{BC} = -\frac{wL^2}{12} = \frac{-45(6)^2}{12} = -135 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{wL^2}{12} = \frac{45(6)^2}{12} = 135 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

53

Joint	A	B			C		D	E
Member	AB	BA	BC	CB	CD	CE	DC	EC
DF	0	0.545	0.455	0.330	0.298	0.372	1	1
FEM			-135	135				
Dist.		73.6	61.4	-44.6	-40.2	-50.2		
CO	36.8		-22.3	30.7				
Dist.		12.2	10.1	-10.1	-9.1	-11.5		
CO	6.1		-5.1	5.1				
Dist.		2.8	2.3	-1.7	-1.5	-1.9		
CO	1.4		-0.8	1.2				
Dist.		0.4	0.4	-0.4	-0.4	-0.4		
CO	0.2		-0.2	0.2				
Dist.		0.1	0.1	-0.1	0.0	-0.1		
ΣM	44.5	89.1	-89.1	115	-51.2	-64.1		

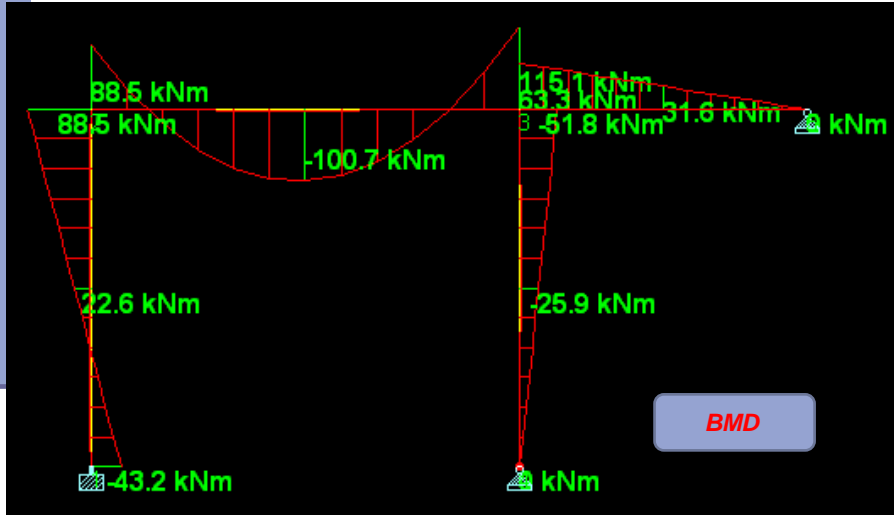
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

54

STAAD OUTPUT



November 7, 2020

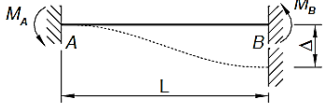
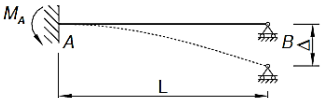
Structural Analysis

Prof. M. Samara

55

هبوط المساند Support Settlement

يُعد هبوط المساند من المواضيع المهمة في تصميم المنشآت مثل الجسور لأن حركة المساند تفرض على المنشأ عزوماً إضافية

M_A	Configuration	M_B
$-\frac{6EI\Delta}{L^2}$		$-\frac{6EI\Delta}{L^2}$
$-\frac{3EI\Delta}{L^2}$		-

November 7, 2020

Structural Analysis

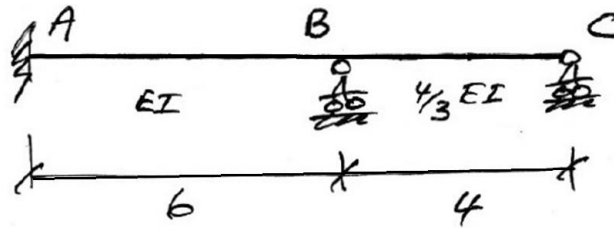
Prof. M. Samara

56

مثال

إذا هبط المسند B في الجانز المبين في الشكل أدناه بمقدار 12 mm احسب القوى الداخلية الناتجة علماً أن:

$$E = 200 \text{ kN/mm}^2 \text{ and } I = 200 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

57

4. Moment Distribution Table:

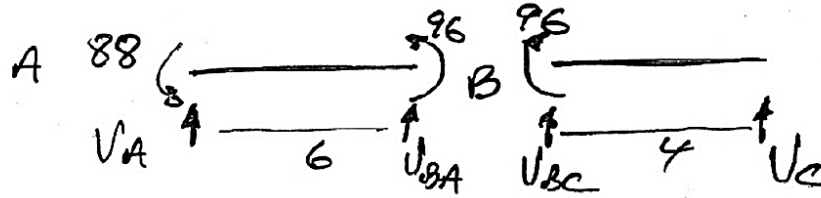
Joint	A	B		C
Member	AB	BA	BC	CB
DF	0	0.4	0.6	1
FEM	-80.0	-80.0	+120.0	
Dist.		-16.0	-24.0	
C.O.	-8.0			0
Final	-88.0	-96.0	+96.0	0

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

58



Span AB:

$$\begin{aligned} \sum M \text{ about } A = 0 & \quad \therefore 88 + 96 + 6V_{BA} = 0 & \quad \therefore V_{BA} = -30.7 \text{ kN i.e. } \downarrow \\ \sum F_y = 0 & \quad \therefore V_{BA} + V_A = 0 & \quad \therefore V_A = +30.7 \text{ kN } \uparrow \end{aligned}$$

Span BC:

$$\begin{aligned} \sum M \text{ about } B = 0 & \quad \therefore 96 - 4V_C = 0 & \quad \therefore V_C = 24.0 \text{ kN } \uparrow \\ \sum F_y = 0 & \quad \therefore V_{BC} + V_C = 0 & \quad \therefore V_{BC} = -24.0 \text{ kN i.e. } \downarrow \end{aligned}$$

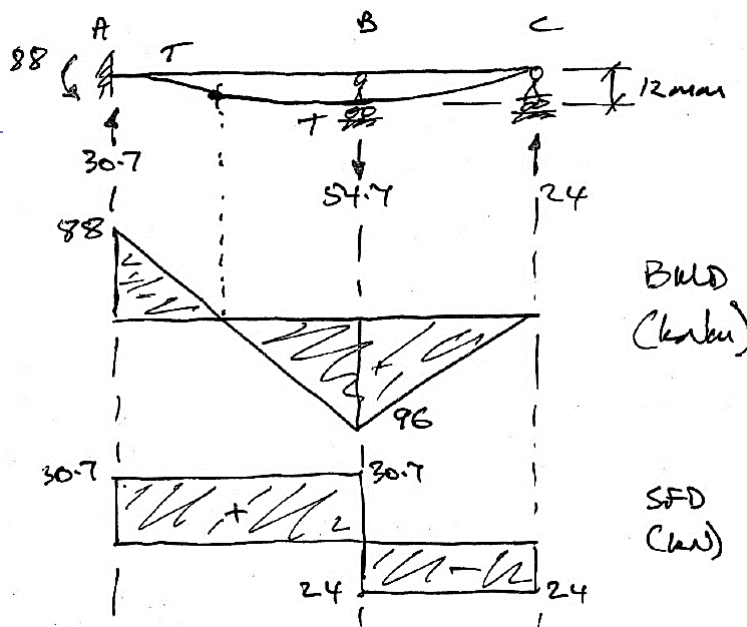
$$V_B = V_{BA} + V_{BC} = 30.7 + 24 = 54.7 \text{ kN } \downarrow$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

59



BMD
(kNm)

SFD
(kN)

November 7, 2020

Structural Analysis

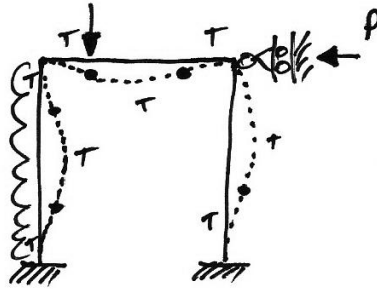
Prof. M. Samara

60

توزيع العزوم: حالة الإطارات ذات الانزياح الجانبي Moment Distribution for Frames: No Side sway

يوجد مصدرين للعزوم:

■ الأول ناتج عن الأحمال على العناصر كما في الإطار التالي:



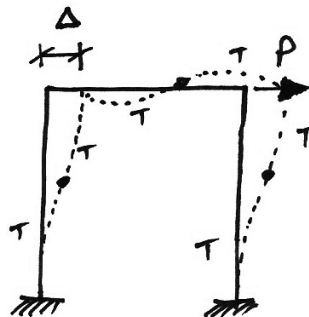
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

61

■ الثاني ناتج عن الانزياح الجانبي كما في الإطار التالي:



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

62

هذا يقود إلى أن حل الإطارات ذات الانزياح الجانبي يمكن أن ينفذ على مرحلتين ومن ثم يُستخدم مبدأ جمع الآثار لإيجاد الحل النهائي

■ المرحلة الأولى Stage I analysis:

1. يتم وضع مسند جانبي للإطار لمنع الانزياح الجانبي
2. يتم حل الإطار على هذه الحالة
3. يُحسب رد فعل المسند الجانبي P

■ المرحلة الثانية Stage II analysis:

1. يتم تطبيق القوة P بمفردها على الإطار ولكن بعد عكس اتجاهها
2. يتم حل الإطار لحساب العزوم الناجمة عن الانزياح
3. الحل النهائي هو مجموع حلي المرحلتين

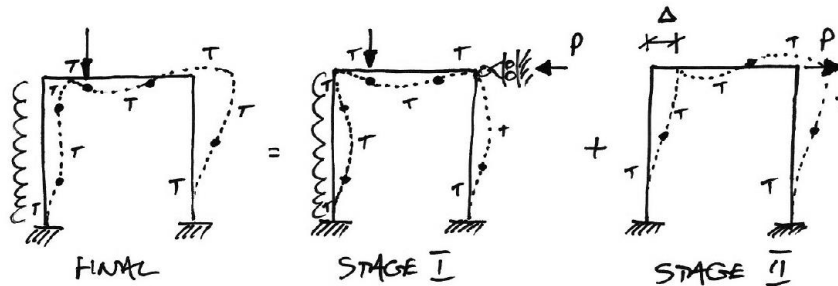
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

63

يمكن شرح الخطوات السابقة كما في الشكل أدناه



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

64

■ إذا تفحصنا تحليل المرحلة الثانية في المثال السابق نجد أن القوة P تُسبب انزاحاً غير معلوم قدره Δ ولكن العزوم الناتجة عن الانزياح الجانبي للعقد تعتمد على مقدار هذا الانزياح

■ لذلك بما أننا لا نعرف مقدار الانزياح Δ لن نتتمكن من حساب عزوم الوثاقة FEMs الناتجة عنه

$$FEM_{AB} = FEM_{BA} = -\frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$FEM_{BA} = -\frac{3EI\Delta}{L^2}$$

65

خطوات حل المرحلة الثانية:

1. نفرض مقداراً اعتباطياً للانزياح وليكن Δ^* ونحسب عزوم الوثاقة الناتجة عنه $FEMs^*$ وننفذ عملية توزيع العزوم فنحصل على العزوم الناتجة عن هذا الانزياح الاعتباطي M_{II}^*
2. من التحليل السابق نوجد القوة P^* التي سببت هذا الانزياح Δ^*
3. بما أن P^* ترتبط خطياً بالعزوم M_{II}^* وكذلك القوة P ترتبط خطياً بالعزوم M_{II} لذلك يمكن أن نكتب:

$$\frac{P}{P^*} = \frac{M_{II}}{M_{II}^*}$$

$$\alpha = \frac{P}{P^*} \quad \text{بفرض:}$$

وعليه يمكن كتابة العزوم الحقيقية والانزياح الحقيقي الناجم عن المرحلة الثانية كما يلي:

$$M_{II} = \alpha M_{II}^*$$

$$\Delta = \alpha \Delta^*$$

November 7, 2020

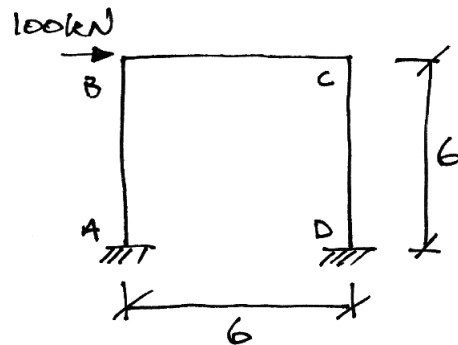
Structural Analysis

Prof. M. Samara

67

مثال

حل الاطار المبين في الشكل بطريقة توزيع العزوم وارسم مخطط عزم الانعطاف



November 7, 2020

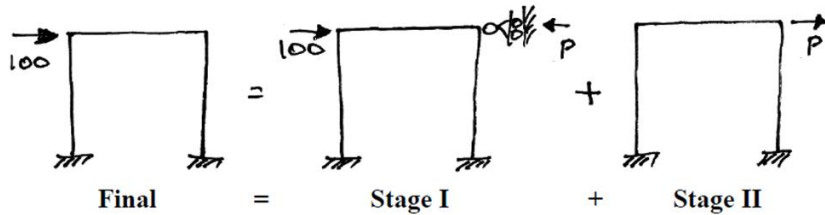
Structural Analysis

Prof. M. Samara

68

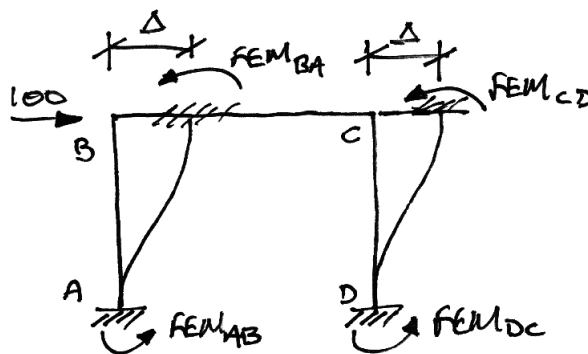
الحل:

بما أن للإطار انزياح جانبي لذا لا بد من تنفيذ الحل على مرحلتين



بما أن الإطار غير محمل بين العقد فإن المرحلة الأولى لن تنتج عزوماً وعليه فإن تحليل الإطار هو تحليل المرحلة الثانية

سنسمح للإطار أن ينزاح جانبياً مع بقاء العقد ممنوعة من الدوران



من الشكل السابق تُكتب عزوم الوثيقة كما يلي:

$$FEM_{BA} = FEM_{AB} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$

$$FEM_{DC} = FEM_{CD} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta$$

بما أن مقدار الانزياح الجانبي الذي تعرض له الإطار غير معلوم لذا فإن حساب عزوم الوثيقة الناجمة عنه غير ممكن. لذلك نفرض مقدراً اعتباطياً للانزياح وليكن Δ^* وليكن:

$$\Delta^* = \frac{600}{EI}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

71

ونحسب عزوم الوثيقة الناجمة عنه $FEMs^*$ كما يلي:

$$FEM_{BA} = FEM_{AB} = -\frac{6EI}{6^2} \left(\frac{600}{EI} \right) = -100 \text{ kNm}$$

$$FEM_{DC} = FEM_{CD} = -\frac{6EI}{6^2} \left(\frac{600}{EI} \right) = -100 \text{ kNm}$$

ننفذ عملية توزيع العزوم فنحصل على العزوم M_{II}^* الناجمة عن هذا الانزياح الاعتباطي Δ^* ومنه نوجد القوة P^* التي سببت هذا الانزياح

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

72

1. Stiffnesses:
- AB: $k_{AB} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{AB} = \frac{1}{6}$
 - BC: $k_{BC} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{BC} = \frac{1}{6}$
 - CD: $k_{CD} = \left(\frac{EI}{L}\right)_{CD} = \frac{1}{6}$

2. Distribution Factors:

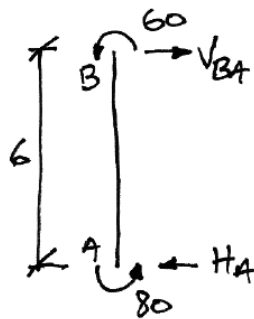
- Joint B: $\sum k = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
 - Joint C: is the same as Joint B.
- $$\left. \begin{aligned} DF_{BA} &= \frac{k_{BA}}{\sum k} = \frac{1/6}{2/6} = 0.5 \\ DF_{BC} &= \frac{k_{BC}}{\sum k} = \frac{1/6}{2/6} = 0.5 \end{aligned} \right\} \sum DFs = 1$$

3. Moment Distribution Table:

Joint	A		B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC	
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	
FEM	-100	-100			-100	-100	
Dist.		+50	+50	+50	+50		
C.O.	+25		+25	+25		+25	
Dist.		-12.5	-12.5	-12.5	-12.5		
C.O.	-6.3		-6.3	-6.3		-6.3	
Dist.		+3.2	+3.2	+3.2	+3.2		
C.O.	+1.6		+1.6	+1.6		+1.6	
Dist.		-0.8	-0.8	-0.8	-0.8		
M_H^*	-79.7	-60.1	+60.2	+60.2	-60.1	-79.7	

4. Calculate End Shears and Forces

Span AB:



$$\begin{aligned} \sum M \text{ about } A &= 0 \\ \therefore 80 + 60 - 6V_{BA} &= 0 \\ \therefore V_{BA} &= 23.3 \text{ kN } \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \therefore H_A &= +23.3 \text{ kN } \leftarrow \end{aligned}$$

Span BC: This is the same as AB.

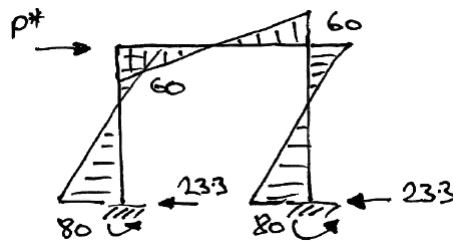
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

75

يبين الشكل أدناه مخطط العزم M_{II}^*



من كتابة معادلة توازن الإطار أفقياً تنتج القوة P^* التي سببت الانزياح Δ^*

$$P^* = 46.6 \text{ kN}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

76

لكن مقدار القوة التي يتعرض لها الإطار 100 kN وليس 46.6 kN لذلك فإن الحل الصحيح للمسألة الأصلية ينتج بضرب العزوم M_{II}^* بالمعامل التالي:

$$\alpha = \frac{P}{P^*} = \frac{100}{46.6} = 2.15$$

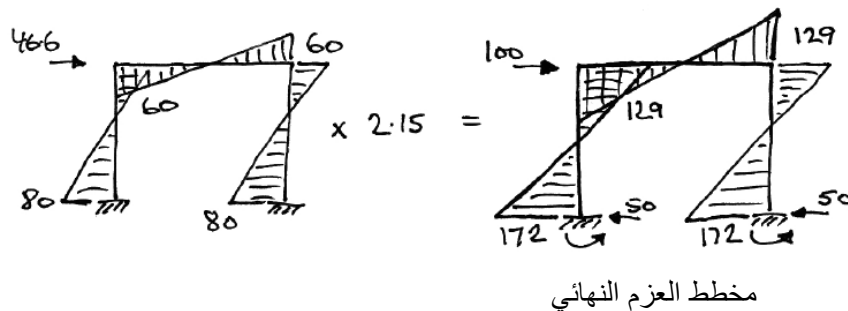
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

77

إذاً ينتج حل المسألة الأصلية كما في الشكل التالي:



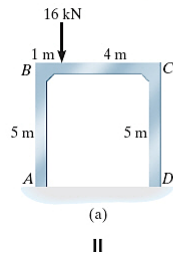
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

78

E X A M P L E 12-6



Determine the moments at each joint of the frame shown in Fig. 12-18a. EI is constant.

Solution

First we consider the frame held from sidesway as shown in Fig. 12-18b. We have

$$(FEM)_{BC} = -\frac{16(4)^2(1)}{(5)^2} = -10.24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(FEM)_{CB} = \frac{16(1)^2(4)}{(5)^2} = 2.56 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

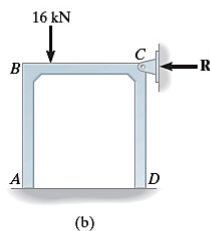
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

79

E X A M P L E 12-6 - (Continued)



The stiffness factor of each span is computed on the basis of $4EI/L$ or by using the relative-stiffness factor I/L . The DFs and the moment distribution are shown in the table, Fig. 12-18d. Using these results, the equations of equilibrium are applied to the free-body diagrams of the columns in order to determine A_x and D_x , Fig. 12-18e. From the free-body diagram of the entire frame (not shown) the joint restraint R in Fig. 12-18b has a magnitude of

$$\Sigma F_x = 0; \quad R = 1.73 \text{ kN} - 0.81 \text{ kN} = 0.92 \text{ kN}$$

Joint	A		B		C		D	
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC	0	0
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0
FEM			-10.24	2.56				
Dist.		5.12	5.12	-1.28	-1.28			
CO	2.56		-0.64	2.56			-0.64	
Dist.		0.32	0.32	-1.28	-1.28			
CO	0.16		-0.64	0.16			-0.64	
Dist.		0.32	0.32	-0.08	-0.08			
CO	0.16		-0.04	0.16			-0.04	
Dist.		0.02	0.02	-0.08	-0.08			
ΣM	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72	-1.32		

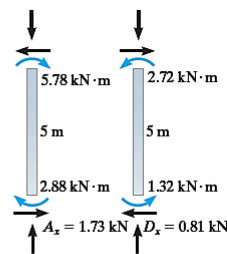


Fig. 12-18

(d)

(e)

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

80

E X A M P L E 12-6 (Continued)

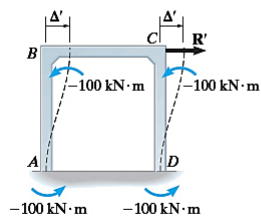
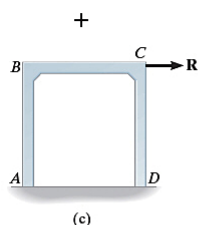


Fig. 12-18

An equal but opposite value of $R = 0.92 \text{ kN}$ must now be applied to the frame at C and the internal moments computed, Fig. 12-18c. To solve the problem of computing these moments, we will assume a force R' is applied at C , causing the frame to deflect Δ' as shown in Fig. 12-18f. Here the joints at B and C are temporarily restrained from rotating, and as a result the fixed-end moments at the ends of the columns are determined from the formula for deflection found on the inside back cover, that is,

$$M = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

Since both B and C happen to be displaced the same amount Δ' , and AB and DC have the same E , I , and L , the FEM in AB will be the same as that in DC . As shown in Fig. 12-18f, we will arbitrarily assume this fixed-end moment to be

$$(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = (FEM)_{DC} = -100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

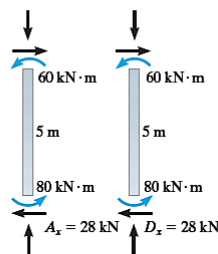
Prof. M. Samara

81

E X A M P L E 12-6 (Continued)

Joint	A	B		C		D
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0
FEM	-100	-100			-100	-100
Dist.		50	50	50	50	
CO	25		25	25		25
Dist.		-12.5	-12.5	-12.5	-12.5	
CO	-6.25		-6.25	-6.25		-6.25
Dist.		3.125	3.125	3.125	3.125	
CO	1.56		1.56	1.56		1.56
Dist.		-0.78	-0.78	-0.78	-0.78	
CO	-0.39		-0.39	-0.39		-0.39
Dist.		0.195	0.195	0.195	0.195	
ΣM	-80.00	-60.00	60.00	60.00	-60.00	-80.00

(g)



(h)

A negative sign is necessary since the moment must act counterclockwise on the column for deflection Δ' to the right. The value of R' associated with this $-100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ moment can now be determined. The moment distribution of the FEMs is shown in Fig. 12-18g. From equilibrium, the horizontal reactions at A and D are calculated, Fig. 12-18h. Thus, for the entire frame we require

$$\Sigma F_x = 0; \quad R' = 28 + 28 = 56.0 \text{ kN}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

82

E X A M P L E 12-6 - (Continued)

Hence, $R' = 56.0$ kN creates the moments tabulated in Fig. 12-18g. Corresponding moments caused by $R = 0.92$ kN can be determined by proportion. Therefore, the resultant moment in the frame, Fig. 12-18a, is equal to the *sum* of those calculated for the frame in Fig. 12-18b plus the proportionate amount of those for the frame in Fig. 12-18c. We have

$$M_{AB} = 2.88 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = 1.57 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{BA} = 5.78 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = 4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{BC} = -5.78 + \frac{0.92}{56.0}(60) = -4.79 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{CB} = 2.72 + \frac{0.92}{56.0}(60) = 3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{CD} = -2.72 + \frac{0.92}{56.0}(-60) = -3.71 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{DC} = -1.32 + \frac{0.92}{56.0}(-80) = -2.63 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

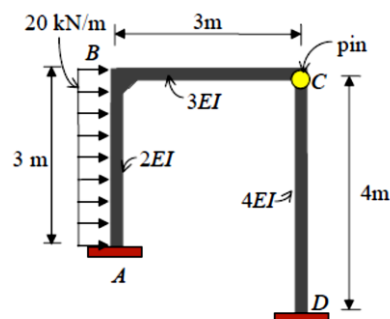
Prof. M. Samara

83

Example

For the frame shown use the **moment distribution** method to:

- Determine all the reactions at supports, and also
- Draw its shear and bending moment diagrams

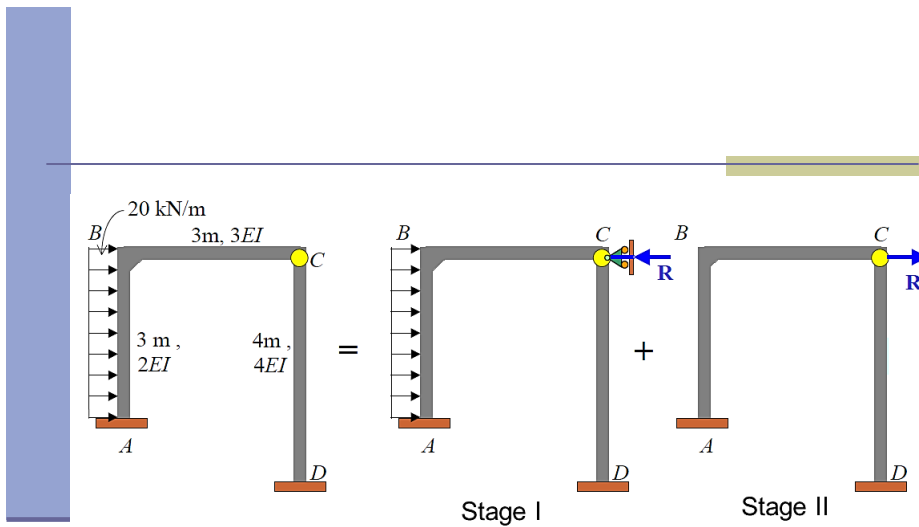


November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

84



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

85

• **Stage I Analysis (no sidesway)**

$K_{BA} = 4(2EI)/3 = 2.667EI$
 $K_{BC} = 3(3EI)/3 = 3EI$
 $K_{CD} = 3(4EI)/4 = 3EI$

	A	B	C	D
DF	0	0.471 0.529	1.00 1.00	0
FEM	-15.00	15.00		
Dist.		-7.065 -7.935		
CO	-3.533			
Σ	-18.53	7.94 -7.94		

$\pm \Sigma F_x = 0:$
 $R = 60 - 33.53 - 0$
 $R = +26.47 \text{ kN}$

November 7, 2020

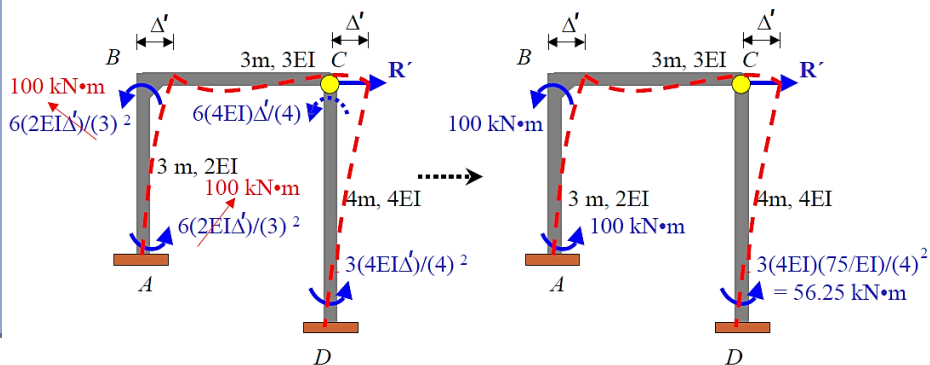
Structural Analysis

Prof. M. Samara

86

• **Stage II Analysis** (sideway)

• **Fixed end moment**



Assign a value of $(FEM)_{AB} = (FEM)_{BA} = -100 \text{ kN}\cdot\text{m} \Rightarrow \frac{-6(2EI)\Delta'}{3^2} = -100 \Rightarrow \Delta'_{AB} = 75/EI$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

87

	A	B	C	D		
DF	0	0.471	0.529	1.00	1.00	0
FEM	-100	-100				-56.25
Dist.		47.1	52.9			0
CO	28.55					
Σ	-76.45	-52.9	52.9			-56.25

$\pm \Sigma F_x = 0:$
 $-43.12 - 14.06 + R' = 0$
 $R' = 57.18 \text{ kN}$

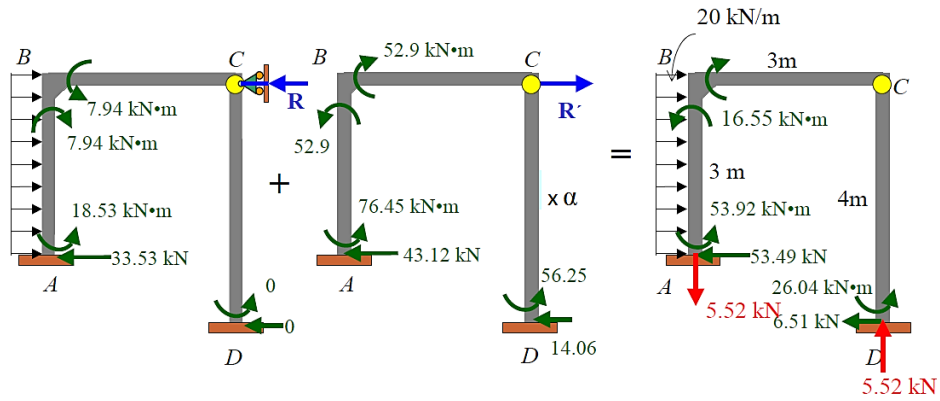
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

88

$$R = 26.37 \text{ and } R' = 57.18 \Rightarrow \alpha = \frac{26.47}{57.18}$$

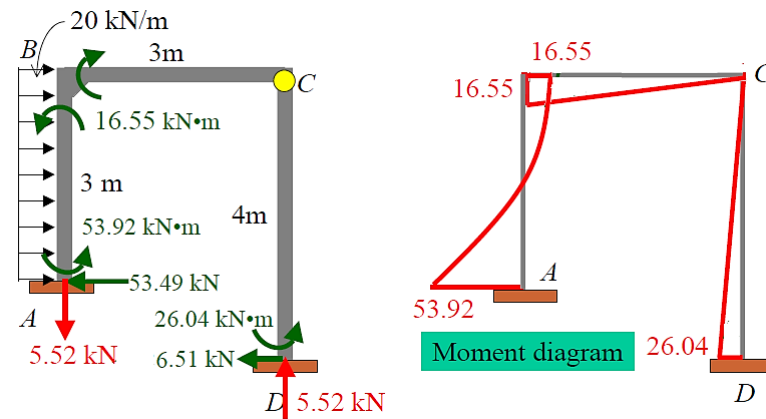


November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

89



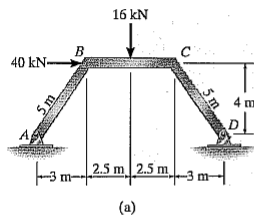
November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

90

E X A M P L E 12-8



Determine the moments at each joint of the frame shown in Fig. 12-20a. EI is constant.

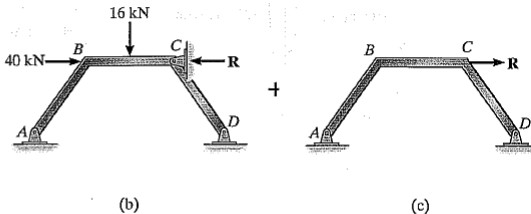


Fig. 12-20

Solution

First sideways is prevented by the restraining force R , Fig. 12-20b. The FEMs for member BC are

$$(FEM)_{BC} = -\frac{16(5)}{8} = -10 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (FEM)_{CB} = \frac{16(5)}{8} = 10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

91

E X A M P L E 12-8 (Continued)

Since spans AB and DC are pinned at their ends, the stiffness factor is computed using $3EI/L$. The moment distribution is shown in Fig. 12-20d.

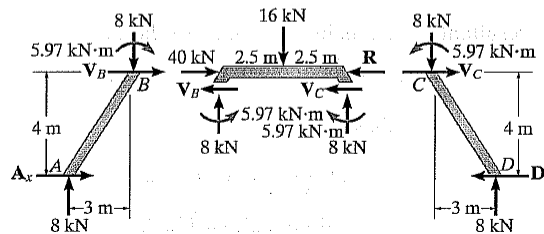
Using these results, the *horizontal reactions* at A and D must be determined. This is done using an equilibrium analysis of *each member*, Fig. 12-20e. Summing moments about points B and C on each leg, we have

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0; \quad & -5.97 + A_x(4) - 8(3) = 0 \quad A_x = 7.49 \text{ kN} \\ \sum M_C = 0; \quad & 5.97 - D_x(4) + 8(3) = 0 \quad D_x = 7.49 \text{ kN} \end{aligned}$$

Thus, for the entire frame,

$$\sum F_x = 0; \quad R = 74.9 - 7.49 + 40 = 40 \text{ kN}$$

Joint	A	B	C	D		
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM			-10	10		
Dist.		4.29	5.71	-5.71	-4.29	
CO			-2.86	2.86		
Dist.		1.23	1.63	-1.63	-1.23	
CO			-0.82	0.82		
Dist.		0.35	0.47	-0.47	-0.35	
CO			-0.24	0.24		
Dist.		0.10	0.13	-0.13	-0.10	
ΣM	0	5.97	-5.97	5.97	-5.97	0



November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

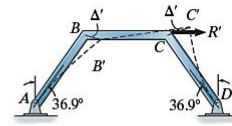
92

EXAMPLE 12-8 (Continued)

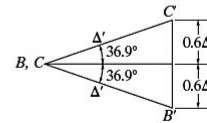
The opposite force \mathbf{R} is now applied to the frame as shown in Fig. 12-20c. In order to determine the internal moments developed by \mathbf{R} we will first consider the force \mathbf{R}' acting as shown in Fig. 12-20f. Here the dashed lines do not represent the distortion of the frame members; instead, they are constructed as straight lines extended to the final positions B' and C' of points B and C , respectively. Due to the symmetry of the frame, the displacement $BB' = CC' = \Delta'$. Furthermore, these displacements cause BC to rotate. The vertical distance between B' and C' is $1.2\Delta'$, as shown on the displacement diagram, Fig. 12-20g. Since each span undergoes end-point displacements that cause the spans to rotate, fixed-end moments are induced in the spans. These are: $(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -3EI\Delta'/(5)^2$, $(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 6EI(1.2\Delta')/(5)^2$.

Notice that for BA and CD the moments are *negative* since clockwise rotation of the span causes a *counterclockwise* FEM.

If we arbitrarily assign a value of $(FEM)_{BA} = (FEM)_{CD} = -100 \text{ k}\cdot\text{N}$, then equating Δ' in the above formulas yields $(FEM)_{BC} = (FEM)_{CB} = 240 \text{ k}\cdot\text{N}$. These moments are applied to the frame and distributed, Fig. 12-20h. Using these results, the equilibrium analysis is shown in Fig. 12-20i. For each leg, we have



(f)



(g)

November 7, 2020

Structural Analysis

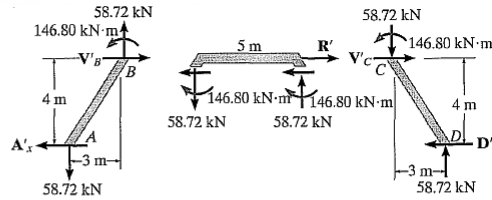
Prof. M. Samara

93

EXAMPLE 12-8 (Continued)

Joint	A	B	C	D		
Member	AB	BA	BC	CB	CD	DC
DF	1	0.429	0.571	0.571	0.429	1
FEM		-100	240	240	-100	
Dist.		-60.06	-79.94	-79.94	-60.06	
CO			-30.97	-30.97		
Dist.			17.15	17.15		
CO			11.41	11.41		
Dist.			-4.89	-4.89		
CO			-3.26	-3.26		
Dist.			1.40	1.40		
CO			0.93	0.93		
Dist.			-0.40	-0.40		
ΣM	0	-146.80	146.80	146.80	-146.80	0

(h)



(i)

$$\uparrow + \Sigma M_B = 0; \quad -A'_x(4) + 58.72(3) + 146.80 = 0 \quad A'_x = 80.74 \text{ kN}$$

$$\uparrow + \Sigma M_C = 0; \quad -D'_x(4) + 58.72(3) + 146.80 = 0 \quad D'_x = 80.74 \text{ kN}$$

Thus, for the entire frame,

$$\Sigma F_x = 0; \quad R' = 80.74 + 80.74 = 161.48 \text{ kN}$$

The resultant moments in the frame are therefore

$$M_{BA} = 5.97 + \left(\frac{40}{161.48}\right)(-146.80) = -30.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{BC} = -5.97 + \left(\frac{40}{161.48}\right)(146.80) = 30.4 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{CB} = 5.97 + \left(\frac{40}{161.48}\right)(146.80) = 42.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

$$M_{CD} = -5.97 + \left(\frac{40}{161.48}\right)(-146.80) = -42.3 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{Ans.}$$

November 7, 2020

Structural Analysis

Prof. M. Samara

94