الجبر الخطي

Dr. Ali AL Shemali

الطرائق التكرارية لحل المعادلات الخطية
Iterative Methods for Solving Linear Equations

مقدمة

عند حل نظام من المعادلات الخطية **AX=b**، يمكن استخدام:

1) الطرائق المباشرة (Direct Methods): في هذه الطرائق نحصل على الحل بدقة تامة بعد عدد محدد من الخطوات، لكم تنفيذها العملي على الحاسوب قد يكون مكلفاً من حيث الزمن والذاكرة خاصة عندما يكون النظام كبيراً جداً. أمثلة عن هذه الطرائق: طريقة غاوس وطريقة غاوس-جوردان.

2) الطرائق التكرارية (Iterative Method): تعتمد على اختيار قيمة ابتدائية للتقريب الأول للحل، ثم تحسين هذا التقريب تدريجياً باستخدام علاقات تكرارية حتى نصل إلى حل قريب جداً من الحقيقي ضمن دقة معينة، أي أننا لا نحصل على الحل مباشرة، بل نقترب منه خطوة بعد خطوة.

فائدة الطرائق التكرارية:

- مناسبة جداً للأنظمة كبيرة الحجم التي يكون فيها تطبيق الطرائق المباشرة صعباً أو مكلفاً.
- تسمح بالتحكم في دقة الحل المطلوبة حسب الحاجة.
- تستخدم كثيراً في التطبيقات العددية والهندسية مثل تحليل العناصر المحدودة ومحاكاة التدفق والحرارة، حيث الأنظمة تكون ضخمة جداً.

مبدأ الفكرة: نبدأ من تخمين ابتدائي $X^{(0)}$، ثم نولد متتاليات من التقريبات.......، $X^{(3)}$ ، $X^{(2)}$ ، $X^{(1)}$ ، نستمر حتى تصبح التغيرات بين التقريبات صغيرة جداً، عندها نقول أن الحل تقارب إلى الحقيقي.

كل طريقة تكرارية تختلف في كيفية تحديث القيم الجديدة بناءً على القيم القديمة.

سوف ندرس في هذا المقرر طريقتين أساسيتين هما:

- طريقة جاكوبي (Jacobi Method)
- طريقة غاوس- سيدل (Gauss-Seidel Method)

شروط استخدام الطرائق التكرارية

1) أن يكون عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل، أي مصفوفة الأمثال مربعة.
2) أن يكون للنظام حل وحيد، أي أن محدد مصفوفة الأمثال غير معدوم، أي A^{-1} موجود.
3) أن تكون مصفوفة الأمثال سائدة قطرياً، هذا الشرط ليس ضروري ولكن كاف لضمان تقارب الطريقة التكرارية، أي قد تتقارب الطريقة حتى لو لم يتحقق الشرط ولكن لا يوجد ضمان نظري لذلك.

يُقال عن المصفوفة $A=[a_{ij}]$ أنها سائدة قطرياً عندما يكون كل عنصر قطري فيها هو بالقيمة المطلقة أكبر من مجموع القيم المطلقة لعناصر سطره، أي $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

ملاحظة: في المسائل المدروسة نفترض تحقق الشرطين الأول والثاني، ويُكتفى بالتحقق من كون مصفوفة الأمثال سائدة قطرياً.

خطوات طريقة جاكوبي لحل المعادلات الخطية

1) التحقق من شروط الاستخدام (في مسائلنا يكفي التحقق من الشرط الثالث)
2) كتابة المعادلات بشكل مناسب

بفرض لدينا النظام الخطي الآتي:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

نقوم بحل المعادلة الأولى بالنسبة لـ x_1 ونحل المعادلة الثانية بالنسبة لـ x_2 ونحل المعادلة الثالثة بالنسبة لـ x_3، فنحصل على المعادلات التالية:

$$x_1=\frac{1}{a_{11}}\left[b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3\right]$$

$$x_2=\frac{1}{a_{22}}\left[b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3\right]$$

$$x_3=\frac{1}{a_{33}}\left[b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2\right]$$

3) تحديد التقريب الابتدائي $\mathbf{X}^{(0)}$ كبداية لعملية التكرار.

ملاحظة: قد يُعطى التقريب الابتدائي في نص السؤال، وإذا لم يُذكر، يُعتبر المتجه الصفري.

4) تطبيق صيغة جاكوبي

الحل الجديد عند التكرار k+1 يعتمد فقط على الحل السابق k لجميع المجاهيل الأخرى، أي:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}\right]$$

5) نكرر الخطوة السابقة حتى يتحقق أحد شروط التوقف:

- الوصول إلى العدد المحدد من التكرارات.
- الوصول إلى الدقة المطلوبة: نتوقف عندما يصبح الفرق بين الحل الجديد والقديم صغيراً بما يكفي وفق الحد ε المحدد مسبقاً، أي $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \varepsilon$

مثال-1:

أوجد الحل $x_1^{(4)}$ و $x_2^{(4)}$ لجملة المعادلات الخطية
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= -7 \\ 7x_1 - x_2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$
وذلك وفق طريقة جاكوبي، مع توضيح خطوات الحل وتقريب الناتج إلى ثلاث منازل عشرية بعد كل عملية حسابية.

مثال-2:

أوجد الحل $X^{(3)}$ لجملة المعادلات الخطية
$$\left.\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}\right\}$$
وذلك وفق طريقة جاكوبي، مع تقريب الناتج إلى ثلاث منازل عشرية بعد كل عملية حسابية. علماً أن
$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.467 \\ 1.033 \end{bmatrix}$$

تمرين-1:

أوجد الحل $x_1^{(2)}$ و $x_2^{(2)}$ و $x_3^{(2)}$ لجملة المعادلات الخطية
$$\left.\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 &= 7 \\ -2x_1 - x_2 + 10x_3 &= 9 \end{aligned}\right\}$$
وذلك وفق طريقة جاكوبي، مع تقريب الناتج إلى ثلاث منازل عشرية بعد كل عملية حسابية.

خطوات طريقة غاوس- سيدل لحل المعادلات الخطية

خطوات طريقة غاوس- سيدل مماثلة تماماً لخطوات طريقة جاكوبي، والاختلاف الوحيد هو في الخطوة 4 عند تطبيق الصيغة التكرارية، حيث يعتمد الحل الجديد عند التكرار k+1 لكل متغير على أحدث القيم المتاحة من التكرار نفسه، أي:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}\right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}\right]$$

<u>أعد حل المثالين 1و2 والتمرين 1 باستخدام طريقة غاوس – سيدل.</u>

مثال-3:

أوجد الحل التقريبي للنظام الخطي $\left.\begin{array}{l}\mathbf{4x_1 + x_2 = 6} \\ \mathbf{2x_1 + 4x_2 = 10}\end{array}\right\}$ باستخدام طريقتي جاكوبي وغاوس – سيدل،

حتى تتحقق الدقة المطلوبة ε=0.1 ، مع تقريب الناتج إلى ثلاث منازل عشرية بعد كل عملية حسابية.