Ć Ý Ā p̂ ȼ ẁ Æ ù ÿ ü ĉ ½ w ú £

المسألة الأولى : بفرض جملة المعادلات الخطية $A \cdot X = b$ التي فيها :

مصفوفة الأمثال : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}$ و $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت . و المطلوب :

① ناقش بحسب قيم k مجموعة حلول الجملة $A \cdot X = b$ ، حيث X مصفوفة المجاهيل

② من أجل $k = 1$ اوجد مجموعة حلول الجملة $A \cdot X = b$.

الحل :

① نشكل المصفوفة الموسعة :

$$H = (A|b) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 2-k & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

❶ عندما : $k \in \mathbb{R} \,/\, \{1,2\}$ يكون :

- $\left.\begin{matrix} r(A) = 4 \\ r(H) = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow r(A) = r(H) = 4 = n \rightarrow$ للجملة حل وحيد

❷ عندما : $k = 1$ يكون :

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \underset{R_4 \rightarrow R_4 + R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$
- $\left.\begin{matrix} r(A) = 3 \\ r(H) = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r(A) = r(H) = 3 < (n = 4) \rightarrow$

للجملة عدد غير منته من الحلول ، و عدد المجاهل الاختيارية هو : $(n = 4) - (r = 3) = 1$

❸ عندما : $k = 2$ يكون :

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix} r(A) = 3 \\ r(H) = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow r(A) \neq r(H) \rightarrow$ الجملة مستحيلة الحل

② من أجل : $k = 1$

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} \to x + y + z + t = 4 \\ \to \quad y \quad\quad = 0 \\ \to \quad\quad\quad t = 2 \end{array}$

- $(t = 2)\&(y = 0) \to x + 0 + z + 2 = 4 \to (x = 2 - z) \to X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - z \\ 0 \\ z \\ 2 \end{bmatrix}$

المسألة الثانية :

حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة غوص :

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & + & t & = & 1 \end{array}$$

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1 \end{array}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} R_4 \to R_4 + R_2$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & \vdots & -1 \end{bmatrix} R_4 \to R_4 + R_3$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Longrightarrow x + y + z + 2t = 1 \\ \Longrightarrow y - t = 0 \\ \Longrightarrow z - t = 0 \\ \Longrightarrow -5t = -1 \end{array}$

- $-5t = -1 \Longrightarrow \boxed{t = \frac{1}{5}}$

- $z - t = 0 \Longrightarrow z = t \Longrightarrow \boxed{z = \frac{1}{5}}$

- $y - t = 0 \Rightarrow y = t \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{5}}$

- $x + y + z + 2t = 1 \Rightarrow x = 1 - (y + z + 2t) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{5}}$

- $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$

المسألة الثالثة :

ناقش بحسب قيم α حلول جملة المعادلات الخطية التالية :

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha^2 \quad ① \\ x & + & \alpha y & + & z & = & \alpha \quad ② \\ \alpha x & + & y & + & z & = & 1 \quad ③ \end{array}$$

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \vdots & \alpha^2 \\ 1 & \alpha & 1 & \vdots & \alpha \\ \alpha & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - \alpha R_1 \end{matrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \vdots & \alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & \vdots & \alpha - \alpha^2 \\ 0 & 1 - \alpha & 1 - \alpha^2 & \vdots & 1 - \alpha^3 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + R_2$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \vdots & \alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & \vdots & \alpha - \alpha^2 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha - \alpha^2 & \vdots & \alpha - \alpha^2 + 1 - \alpha^3 \end{bmatrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & \vdots & \alpha^2 \\ 0 & \alpha - 1 & 1 - \alpha & \vdots & \alpha(1 - \alpha) \\ 0 & 0 & (1 - \alpha)(\alpha + 2) & \vdots & (1 - \alpha)(\alpha + 1)^2 \end{bmatrix}$

❶ عندما : $\alpha \in \mathbb{R} / \{-2, +1\}$ يكون :

- $\left.\begin{matrix} r(A) = 3 \\ r(H) = 3 \end{matrix}\right\} \to r(A) = r(H) = 3 = n \to$ للجملة حل وحيد

❷ عندما : $\alpha = 1$ يكون :

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \to \left.\begin{matrix} r(A) = 1 \\ r(H) = 1 \end{matrix}\right\} \to r(A) = r(H) = 1 < (n = 3) \to$

للجملة عدد غير منته من الحلول ، و عدد المجاهل الاختيارية هو : $(n = 3) - (r = 1) = 2$

❸ عندما : $\alpha = -2$ يكون :

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 4 \\ 0 & -3 & 3 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \to \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(H) = 3 \end{cases} \to r(A) \neq r(H) \to$ الجملة مستحيلة الحل

المسألة الرابعة :

لتكن جملة المعادلات الخطية التالية : $\begin{matrix} x & + & y & + & & = & 0 & ① \\ x & - & y & - & 4z & = & -2 & ② \\ x & + & 3y & + & \alpha^2 z & = & \alpha & ③ \end{matrix}$ و المطلوب :

1) ناقش بحسب قيم α حلول جملة المعادلات الخطية $A \cdot X = b$

2) حل جملة المعادلات الخطية $A \cdot X = 0$ و ذلك من أجل $\alpha = 2$

الحل :

1) المناقشة بحسب قيم α حلول جملة المعادلات الخطية $A \cdot X = b$

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & -4 & \vdots & -2 \\ 1 & 3 & \alpha^2 & \vdots & \alpha \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 2 & \alpha^2 & \vdots & \alpha \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + R_2$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 4 & \vdots & \alpha - 2 \end{bmatrix}$

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & (\alpha - 2)(\alpha + 2) & \vdots & \alpha - 2 \end{bmatrix}$

❶ عندما : $\alpha \in \mathbb{R} / \{-2, +2\}$ يكون :

- $\left.\begin{matrix} r(A) = 3 \\ r(H) = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r(A) = r(H) = 3 = n \rightarrow$ للجملة حل وحيد

❷ عندما : $\alpha = 2$ يكون :

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} r(A) = 1 \\ r(H) = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r(A) = r(H) = 2 < (n = 3) \rightarrow$

للجملة عدد غير منته من الحلول ، و عدد المجاهل الاختيارية هو $(n = 3) - (r = 2) = 1$:

❸ عندما : $\alpha = -2$ يكون :

- $H \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix} r(A) = 2 \\ r(H) = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r(A) \neq r(H) \rightarrow$ الجملة مستحيلة الحل

2) حل الجملة $A \cdot X = 0$ من أجل $\alpha = 2$

عندما : $\alpha = 2$ و $A \cdot X = 0$:

- $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \quad x + y = 0 \\ \Rightarrow -2y - 4z = 0 \\ \Rightarrow \end{matrix}$

بفرض : $z = t$ نجد : $y = 2t$ و $x = -2t$ و بتالي مصفوفة المجاهيل هي : $X = \begin{bmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$