فإذا كان لدينا دائرة نصف قطرها $r=5\,cm$ فإن طول القوس الذي يقابل زاوية مركزية تساوي $135°$ يساوي:

$$\frac{2\pi r}{360} * n = \frac{2 * 3.14 * 5}{360} = 11.775\,cm$$

لقد أثبتت التجربة أن طول القوس الذي قياسه واحد راديان ، أي $57^{0}17'14''$ يساوي طول نصف قطر الدائرة. وعلى هذا الأساس، يكون طول قطر الدائرة يساوي طول قوس الدائرة الذي قياسه 2 راديان أو ($114^{0}34'28''$).

قاعدة: طول قوس الدائرة الذي يقابل زاوية مركزية قياسها h راديان يساوي $h*r$

فإذا كان لدينا دائرة نصف قطرها $r=7cm$ ، فإن طول القوس الذي قياسه 5 راديان

يساوي : $7*5 = 35$ cm.

8. الرباعي الدائري: نقول عن رباعي أنه دائري إذا مرت دائرة برؤوسه.

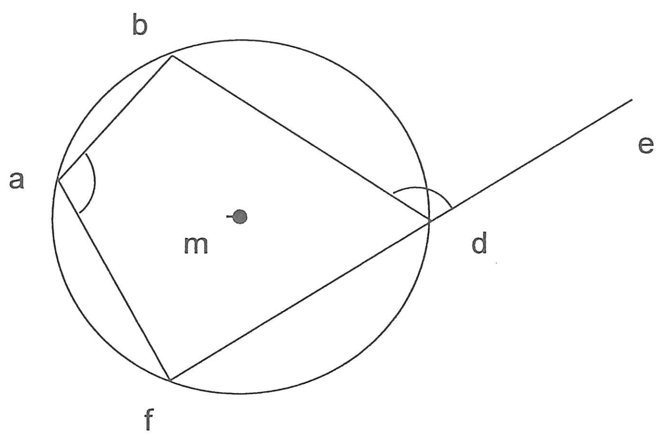
الشكل $abdf$ هو رباعي دائري مركزه هو مركز الدائرة.

خواص الرباعي الدائري:

1". كل زاويتين متقابلتين متكاملتين مجموعهما 180^{0}

2". كل زاوية خارجية مثل الزاوية $b\hat{d}e$ تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها

أي أن: $b\hat{d}e = b\hat{a}f$



تمارين البحث الخامس

حول الدائرة

1. قدّر قياسات الزوايا التالية بالثانية:

$12^0 25'$ ، 25^0 ، $4^0 47' 36''$ ، $42^0 13''$.

2. قدّر بالدرجات والدقائق والثواني القياسات التالية:

1". $760''$

2". $1315''$

3". $13325''$

3. أكمل العمليات التالية:

1". $3^0 13' 15'' + 4^0 11' 36'' =$

2". $48^0 27' 47'' - 17^0 20' 15'' =$

3". $23^0 13' 15'' - 4^0 37' 27'' =$

4". $13^0 13' 11'' * 7 =$

5". $27^0 13' 36'' \div 6 =$

4. طول قوس $|\overset{\frown}{ab}|$ من دائرة C(m,r) يساوي 21 cm ، وقياسه 120^0، والمطلوب:

حساب طول محيط الدائرة وطول نصف قطرها.

5. ليكن لدينا الدائرة C(m,r) ، طول محيطها يزيد عن طول ضلع المربع المرسوم داخلها بمقدار 10 cm ، والمطلوب:

1". حساب طول نصف قطرها.

2". حساب محيط الدائرة ومساحتها.

6. C(m,7) دائرة، والمطلوب حساب قياس الأقواس $\overset{\frown}{ab}$، $\overset{\frown}{db}$ التي طولها على الترتيب 9 cm ، 14 cm مقدرا" بالدرجات ثم بالراديان.

7. استنتج طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع الذي تمر الدائرة C(m,4) برؤوسه.

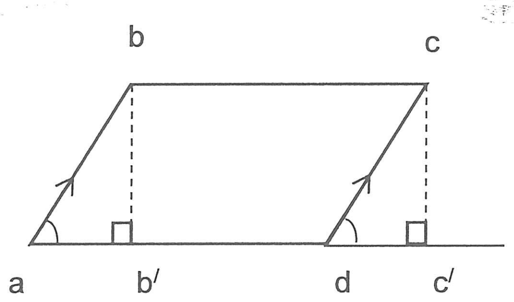
البحث السادس

المساحة والمحيط

تستخدم المساحة لقياس **سطوح الأشكال الهندسية المضلعة أو الدوائر**، حيث يستخدم في قياس مساحة السطوح واحدة المساحة وهي: مساحة مربع طول ضلعه يساوي واحدة الأطوال كالمتر أو السنتيمتر أو غيرها من أجزاء أو مضاعفات المتر.

أما المحيط فيستخدم لقياس **أطوال أضلاع الأشكال الهندسية المضلعة أو أطوال الدوائر**، حيث يستخدم في قياس المحيط واحدة الطول كالمتر أو أحد أجزائه أو مضاعفاته.

1. **مساحة ومحيط المربع**: مساحة المربع تساوي مربع طول ضلعه. فإذا كان لدينا مربعا" طول ضلعه $|ab| = 5cm$، فإن مساحته تساوي $5^2 = 25$ cm^2.
   أما محيطه فيساوي طول ضلعه ضرب أربعة، أي في مثالنا يساوي 20 cm.
2. **مساحة ومحيط المستطيل**: مساحة المستطيل تساوي حاصل جداء الطول بالعرض.
   أما محيطه فيساوي [(الطول + العرض) × 2].
3. **مساحة ومحيط متوازي الأضلاع**: مساحة متوازي الأضلاع تساوي:
   طول القاعد ×الارتفاع المتعلق بها أو بامتدادها
   إذا كان لدينا متوازي الأضلاع abcd كما في الشكل التالي:



فإذا رسمنا الارتفاعين [bb/] و [cc/] في متوازي الأضلاع فإننا نحصل على مثلثين قائمين $\overset{\Delta}{bb'a}$ ، $\overset{\Delta}{cc'a}$ متطابقين لتساوي الوتر وزاوية حادة من الأول مع نظيراتها من الثاني، وبالتالي، ولدى المقارنة نجد أن مساحة متوازي الأضلاع تساوي مساحة المستطيل bb/c/c الذي طوله يساوي طول قاعدة متوازي الأضلاع وعرضه هو ارتفاع متوازي الأضلاع.

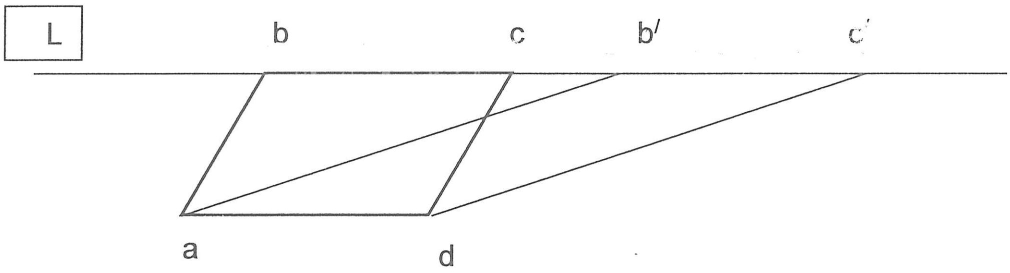
على هذا الأساس، تكون لدينا القاعدة التالية:

مساحة متوازي الأضلاع = مساحة المستطيل المتحد معه بالقاعدة والارتفاع.

أما محيط متوازي الأضلاع فهو مجموع أطوال أضلاعه أي: [(القاعدة +الضلع المائلة) × 2].

نتيجة: كنتيجة لما سبق، فإن انتقال ضلع متوازي الأضلاع على حامله، L مثلا"، لا يغير من مساحته .

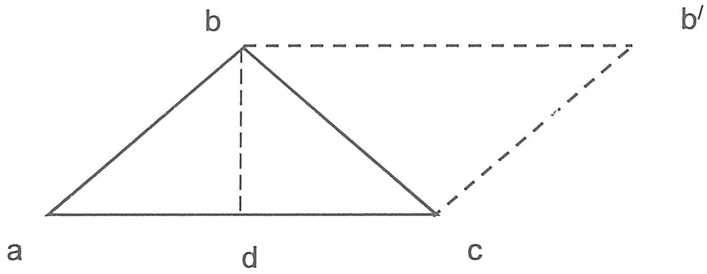
وهذا منطقي لأن القاعدة والارتفاع لم يتغيرا.



4. **مساحة ومحيط المثلث:** يتم حساب مساحة المثلث وفقا" للقاعدة التالية:

$$\frac{\text{القاعدة * الارتفاع المتعلق بها}}{2}$$

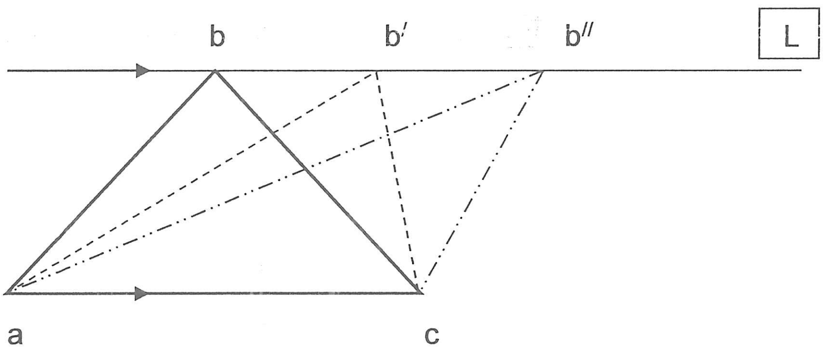
فإذا كان لدينا المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ ، ورسمنا من b القطعة المستقيمة [bb/] توازي القاعدة [ac] وتساويها بالطول، ورسمنا من c القطعة المستقيمة [cb/] توازي [ab] وتساويها بالطول كما هو الحال في الشكل التالي:



فإننا نحصل على متوازي أضلاع abb/c فيه المثلثان $\overset{\Delta}{abc}$ ، $\overset{\Delta}{b'cb}$ متطابقان (لتساوي أطوال أضلاع المثلث الأول مع مقابلاتها من الثاني)، ومنه نستنتج أن مساحة المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ تساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع abb/c ، أي أن مساحة المثلث $\overset{\Delta}{abc} = |bd| \times |ac| \times \frac{1}{2}$.

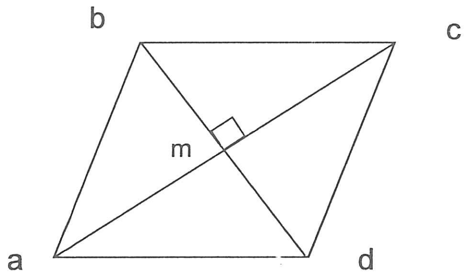
نتيجة: إن انتقال رأس المثلث على المستقيم الموازي لقاعدته، وليكن L ، لا يغير من مساحته.

وذلك كما هو الحال في الشكل التالي، حيث لم تتغير القاعدة ولا الارتفاع:



حالة خاصة: في المثلث قائم الزاوية ، إذا كانت قاعدته إحدى الأضلاع القائمة، فإن مساحته تساوي نصف جداء طولي الضلعين القائمتين.

مساحة ومحيط المعين: المعين هو متوازي أضلاع تساوت أطوال أضلاعه. وتتعامد قطراه، وذلك كما هو الحال في الشكل التالي:



من الشكل نلاحظ أن مساحة المعين تساوي مجموع مساحتي المثلثين $\overset{\Delta}{abc}$ ، $\overset{\Delta}{adc}$ المتساويا الساقين، أي أن:

مساحة abcd = مساحة $\overset{\Delta}{abc}$ + مساحة $\overset{\Delta}{adc}$ ، وبالتعويض:

$$= |bm|\times|ac|\times\frac{1}{2} + |dm|\times|ac|\times\frac{1}{2}$$

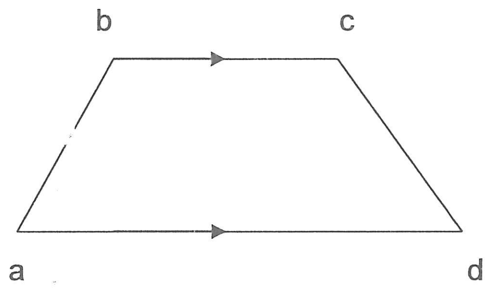
$$= |ac|\times\frac{1}{2}\big[|bm|+|dm|\big] \Leftarrow$$

مساحة abcd $= |bd|\times|ac|\times\frac{1}{2}$

قاعدة: مساحة المعين تساوي نصف جداء طولي قطريه.

بما أن أطوال أضلاع المعين متساوية فإن محيطه يساوي طول ضلعه × 4.

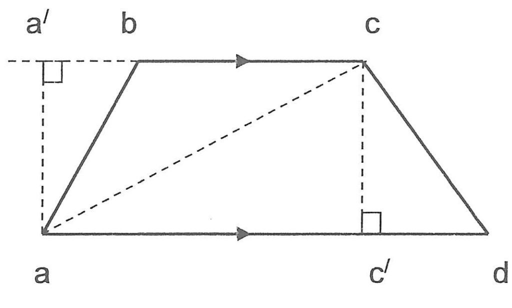
6. **مساحة ومحيط شبه المنحرف:** شبه المنحرف هو رباعي فيه ضلعين متقابلتين متوازيتين، كما هو الحال في الشكل التالي:



$$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}}{2} \times \text{الارتفاع}$$

ولتوضيح ذلك، ليكن لدينا شبه المنحرف abcd ، فيه [bc] // [ad]. نرسم القطر [ac]

فنحصل على مثلثين $\overset{\Delta}{abc}$ ، $\overset{\Delta}{adc}$ كما هو الحال في الشكل التالي:



وتكون مساحة شبه المنحرف abcd = مساحة المثلث $\overset{\Delta}{abc}$ + مساحة المثلث $\overset{\Delta}{adc}$

نرسم ارتفاعي المثلثين ونعوض فنجد:

مساحة شبه المنحرف $\text{abcd} = \frac{1}{2}\times|bc|\times|aa'| + \frac{1}{2}\times|ad|\times|cc'|$

وبما أن $|cc'| = |aa'|$ فإن:

مساحة شبه المنحرف $\text{abcd} = \frac{1}{2}\times\left[|bc|+|ad|\right]\times|cc'|$.

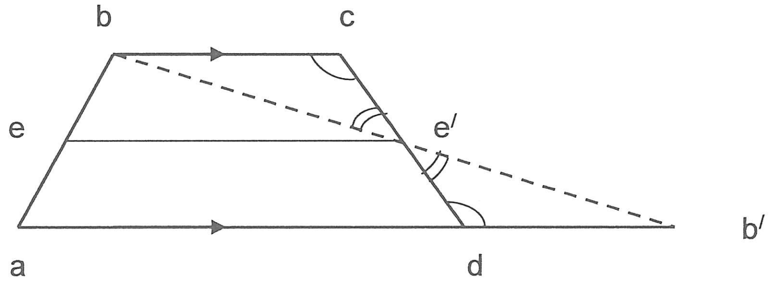
يمكن حساب مساحة شبه المنحرف باستخدام قاعدته الوسطى.

القاعدة الوسطى في شبه المنحرف : هي عبارة عن القطعة المستقيم التي تصل بين منتصفي ضلعيه المائلتين، وهي تساوي نصف مجموع قاعدتيه الصغرى والكبرى.

إذا كان لدينا شبه المنحرف abcd ، و [ee′] قاعدته الوسطى، فإن:

$|ee'| = \frac{1}{2}\times\left[|ad|+|bc|\right]$ ولإثبات ذلك نتبع الخطوات التالية:

1". نصل be′ فيقطع امتداد [ad في نقطة ولتكن b′ ، فنحصل على مثلثين متشابهين هما: $\overset{\Delta}{ebe'}$ ، $\overset{\Delta}{abb'}$ (نظرية تالس) ، كما هو الحال في الشكل التالي:



2". من المثلثين المتشابهين $\overset{\Delta}{ebe'}$ ، $\overset{\Delta}{abb'}$ نجد:

$$\frac{|eb|}{|ab|} = \frac{|be'|}{|bb'|} = \frac{|ee'|}{|ab'|} = \frac{1}{2} \Longrightarrow |ee'| = \frac{1}{2}\times|ab'| \quad (1)$$

3". من المثلثين المتطابقين $\overset{\Delta}{de'b'}$ ، $\overset{\Delta}{ce'b}$ (لتساوي ضلع والزاويتين المجاورتين من الأول مع مقابلاتها من الثاني) فإن: $|db'| = |bc|$ وبالتالي فإن $|bc| + |ad| = |ab'|$

نعوض في العلاقة رقم (1) فنجد: $|ee'| = \frac{1}{2} \times [|ad| + |bc|]$

على هذا الأساس، يمكن استنتاج العلاقة التالية:

مساحة شبه المنحرف = قاعدته الوسطى × الارتفاع.

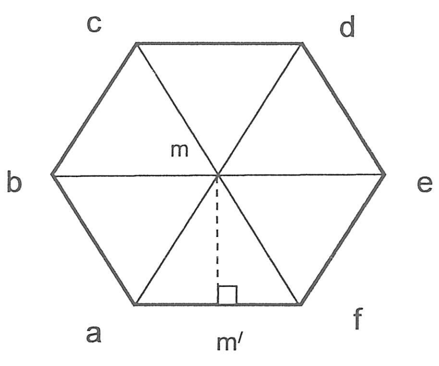
بقي أخيرا" أن نذكر بأن محيط شبه المنحرف يساوي مجموع أطوال أضلاعه.

7. **مساحة ومحيط المضلع المنتظم**: المضلع المنتظم هو مضلع محدب أطوال أضلاعه متساوية وقياس زواياه متساوية. ونقول مخمس ، مسدس، مسبع ...الخ ، وذلك بحسب عدد أضلاعه.

أما إذا كان المضلع غير منتظم فنقول: خماسي، سداسي، سباعي ...الخ.

إن ما **يميّز المضلع المنتظم** هو أن هنالك دائرة تمر برؤوسه، أما المضلع غير المنتظم فليس بالضرورة أن تمر دائرة برؤوسه.

إن المبدأ الأساسي في حساب مساحة المضلع المنتظم والذي عدد أضلاعه n يعتمد على تقسيم المضلع إلى مجموعة من المثلثات المتطابقة والتي تقع رؤوسها في مركز الدائرة المارة برؤوسه وقواعدها هي أضلاع المضلع المنتظم، كما هو الحال في الشكل التالي:



وبالتالي، فإن مساحة المضلع المنتظم تساوي مجموع مساحات المثلثات المتطابقة، أي أن:

مساحة المضلع المنتظم = n × مساحة المثلث $\overset{\Delta}{amf}$.

وبما أن أطوال أضلاع المضلع المنتظم متساوية فإن :

مساحة المضلع المنتظم = نصف محيطه × ارتفاع أحد المثلثات.

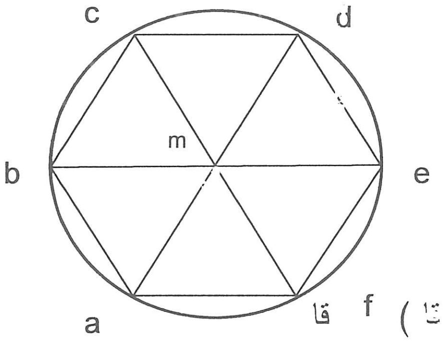
إن الارتفاع [mm/] نسميه العامد، وبالتالي فإن:

مساحة المضلع المنتظم = نصف محيطه × العامد.

محيط المضلع المنتظم = طول ضلعه × عدد أضلاعه n

نظرية: مجموع قياسات زوايا مضلع منتظم عدد أضلاعه n يساوي: (2n - 4) ×قا .

البرهان: من الملاحظ أن مجموع قياس زوايا المضلع تساوي مجموع قياس زوايا المثلثات المكونة للمضلع ماعدا زوايا رؤوس المثلثات المتجمعة حول مركز الدائرة m ، والتي مجموعها يساوي 4 قا . وبما أن مجموع زوايا كل مثلث يساوي



2 قا فإن مجموع زوايا مضلع له n ضلع = (n × 2 قا) قا

= (2 n −4) × قا وهو المطلوب.

مما ورد أعلاه، نستنتج أن مجموع قياس زوايا مخمس = (5 × 2 −4) × قا = 6 قا.

أي أن قياس كل زاوية = (6 × 90) ÷ 5 = 108^0 .

أما مجموع زوايا المسدس = 8 قا ، وقياس كل زاوية فيه = 120^0 .

حالة إنشائية: <u>رسم مسدس علم طول ضلعه:</u>

1". نرسم دائرة نصف قطرها r يساوي طول ضلع المضلع المنتظم.

2". نحدد نقطة ما على الدائرة ولتكن a ، ثم نفتح الفرجار بطول r ونثبت إبرته فيها ونرسم قوسا" يقطع الدائرة في نقطة ثانية ولتكن b .

3". نثبت إبرة الفرجار في b وبنفس الفتحة نرسم قوسا" ثالثا" وهكذا... .

مساحة مسدس علم طول ضلعه:

إن مساحة مسدس هي مساحة ست مثلثات متطابقة ومتساوية الأضلاع، فإذا كان طول ضلع المسدس يساوي X مثلا"، فإن مساحته = 6 × مساحة المثلث المتساوي الأضلاع.

$$= 6 \times (X * \frac{\sqrt{3}}{2} * X * \frac{1}{2}) \quad : \quad (X * \frac{\sqrt{3}}{2})$$ هو الارتفاع.

$$= 6 \times (X^2 * \frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$= (X^2 * \frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

8. **مساحة الدائرة ومحيطها:** يتم حساب مساحة الدائرة وفقا" للقانون التالي:

مساحة الدائرة = πr^2 حيث r نصف قطرها و π ثابت = 3.14

محيط الدائرة: $2\pi r$

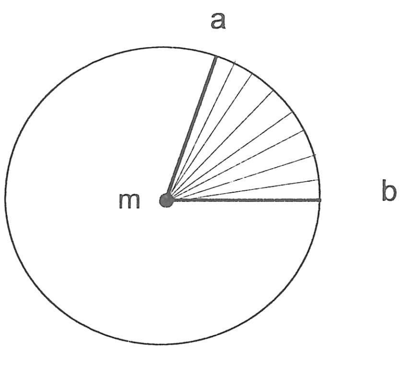
9. **مساحة القطاع الدائري:** إذا كان $\overset{\frown}{ab}$ قوسا" من دائرة، فإن الجزء من قرص الدائرة المحدد بالقوس $\overset{\frown}{ab}$ يسمى القطاع الدائري كما هو الحال في الشكل التالي:

إن مساحة القطاع الدائري الذي يقابل قوسا"

قياسه 1^0 يساوي $(\frac{\pi r^2}{360})$، وإذا كان

قياس القطاع الدائري n^0 فإن مساحته

تعطى بالقانون التالي:



مساحة القطاع الدائري = $(\frac{\pi r^2}{360}) \times n^0$

تمارين البحث السادس

المساحات

1. أوجد **مساحة مستطيل** طوله m 6، ومحيطه m 20.
2. إذا كانت النسبة بين بعدي مستطيل هي $\frac{5}{3}$ ومساحته $300\ cm^2$، **أوجد أطواله**.
3. إذا كان طول مستطيل (X+2) وعرضه (X+1) ومساحته $72\ cm^2$، أوجد **طوله وعرضه**.
4. قياس إحدى زوايا متوازي أضلاع 60^0 ، وطولا ضلعيه غير المتوازيتين 4 ، 6 cm ، والمطلوب **حساب مساحته**.
5. مثلث متساوي الأضلاع مساحته $12\sqrt{3}\ cm^2$ ، والمطلوب **حساب محيطه**.
6. ليكن لدينا abcd شبه منحرف قائم الزاوية في b ، طول ضلعه المائلة cm 10، وقاعدتيه 8 ، 14 cm ، والمطلوب **حساب مساحته**.
7. احسب **مساحة مسدس** طول عامده 9 cm.
8. ليكن لدينا الدائرة C(m, 15)، أوجد **مساحة القطاع الدائري** الذي قياس قوسه 150^0.
9. أوجد **مساحة الدائرة** المارة برؤوس مربع طول ضلعه يساوي 12 cm .
10. احسب **قياس إحدى زوايا مضلع** منتظم عدد أضلاعه يساوي 12، ثم **ارسمه في دائرة** نصف قطرها يساوي cm 8 .
11. شبه منحرف متساوي الساقين، أطوال قاعدتيه وضلعه المائلة تساوي على الترتيب: 4، 8، 4 cm والمطلوب **حساب مساحته**.
12. دائرتين نصف قطر كل منها = 6 cm، والبعد بين مركزيهما = 6 cm ، والمطلوب **حساب المساحة المشتركة بينهما**.