محاضرات
ابستمولوجية العلوم الرياضية

د. محمد الطاغوس

المحاضرة الأولى

مدخل عام

من المعلوم لدى دارسي الفلسفة أن هناك صلة وثيقة بين العلم والفلسفة، ففي الفكر القديم حينما كانت العلوم أجزاء من الفلسفة، كانت الصلة بين المبحثين صلة اهتمام من الفلسفة لتحليل وتبرير مبادئ العلوم. في الفكر الحديث أيضاً وبعد أن استقلت العلوم عن الفلسفة ظلت تلك الصلة قائمة وتعمقت بعدما نشأ في العلوم نفسها حركات نقد ذاتي لبنائها العلمي من داخله، أي محاولات لاختبار الأفكار والمبادئ التي يقوم عليها هذا البناء، فقدمت بذلك العلوم مشكلاتها التي تواجهها والموضوعات التي تثيرها إلى الفلسفة التي قامت بوظيفتها الدائمة في نقد المعرفة المتكونة في الأنساق العلمية للوقوف على حقيقة الأسس التي يقوم عليها وطبيعتها وقيمتها. فظهر للوجود مبحث جديد أخذ اسم "فلسفة العلوم" أو الابستمولوجية التي هي ملتقى الباحثين في المعسكرين العلمي والفلسفي ومجال التعاون المثمر بينهما.

وإذا كانت الأبحاث الابيستمولوجية، التي تعنى بالمعرفة عامة والمعرفة العلمية على وجه الخصوص، قد اكتسبت أهمية بالغة الحساسية في الوقت الحاضر بسبب الإسهامات العميقة التي قدمتها للعلم، فقد أصبحت من جهة أخرى الميدان الرئيس داخل الأبحاث الفلسفية المعاصرة. بل يمكن القول إن البحث الابستمولوجي في اهتمامه بالعلاقة المركبة بين العلم والفلسفة يسر لنا فهماً أعمق وأيسر للفلسفة المعاصرة، وبين بوضوح أن استيعاباً جاد لهذه الفلسفة وتمثلاً ملتزماً لتعاليمها المميزة ولمدارسها الكبرى لا يكون إلا من خلال استعادة

المشكلات الرئيسة والأسئلة الملحة والحاجات الفكرية الحيوية التي فرضها العلم والتي نمت الفلسفة عبر الإجابة عنها وتطورت بتقديم الحلول لها.

ويكفي هنا أن نقدم مثالاً بسيطاً لنوضح به تعذر فهم الخطاب الفلسفي الحديث والمعاصر خارج إطار علاقته التضايفية مع الخطاب العلمي المعاصر له: فإذا حاولنا مراجعة أبرز المقولات وأهم التصورات التي سيطرت على الخطاب الفلسفي في تفسير العالم مثلاً قبل المرحلة الحديثة سنجد أنها تضم المفردات التالية: الماهية، الجوهر، العرض، المُثل، الفيض، الغاية، الوجود بالقوة، الوجود بالفعل، الصورة، الهيولي.... إلخ. إذا انتقلنا الآن إلى الفلسفة الحديثة سنجد تراجعاً متزايداً لهذه الأفكار لصالح نوع مغاير جديد أخذ يحتل موقع الصدارة في الخطاب الفلسفي الحديثة مثل: المكان، الزمان، الجسم، الذرة، الحركة، الصفات الأولية والثانوية، القوانين الطبيعية منها والوضعية، الاستقراء، الاستنتاج...إلخ.

السؤال هنا هو كيف نفسر هذا التبدل الجذري الذي طرأ على المقولات والتصورات والأفكار في الخطاب الفلسفي؟ بكل بساطة يمكننا الإجابة على هذا السؤال بالطريقة التالية: إن المعاينة السريعة لما هو جديد يبين لنا أنها مستمدة ومشتقة كلها من العلم الحديث وخطابه ونظريات ومشكلاته. باختصار لقد فرضت الكوزمولوجيا العلمية الجديدة تدريجياً على الفلاسفة (والفلسفة) خطابها وتصوراتها ومقولاتها كما أملت عليها طبيعة المشكلات والمسائل والأسئلة التي ينبغي عليهم تناولها ومعالجتها وحددت ربما أيضاً نوع الأجوبة المقبولة. والواقع أن المحاضرات التي خصصناها لهذا المبحث ستتناول مثالاً واضحاً لبُعدي هذه العلاقة بين العلم والفلسفة من خلال مناقشتنا لعلاقة الفلسفة بأحد أهم علوم العصر وهو علم الرياضيات.

لكن قبل البدء في ذلك لابد لنا من تمييز الدراسات الابيستمولوجية في التفكير الفلسفي بخصوص العلاقة بين العلم والفلسفة. فقد قلنا إن الأبحاث الابستمولوجية تتناول قضايا المعرفة والمعرفة العلمية، وهنا لا بد من التفريق بينها وبين فلسفة المعرفة التي تميزت بها الفلسفة الحديثة بالمقارنة مع الفلسفة القديمة التي كانت في معظمها فلسفة في الوجود؛ فلا بد من التفريق بين فلسفة المعرفة كما دشنها ديكارت وحدد موضوعها وشيد صرحها كانط،

وبين الدراسات الابستمولوجية المعاصرة التي نشطت عقب الثورة العلمية الحديثة التي شهدها العقد الأول من القرن العشرين. إنه فرق كبير يعكس البون الشاسع بين الفيزياء والرياضيات الكلاسيكية التي دشنها كلاً من غاليليو وديكارت ولايبنتز ونيوتن من جهة، وبين الفيزياء والرياضيات الحديثة التي أرشى دعائمها كلاً من ماكس بلانك وأينشتين (فيزياء)، وجورج كانتور وديفيد هلبرت (رياضيات) من جهة آخرى. إن الدراسات الإبستمولوجية تنتمي إلى الفكر المعاصر على نحو يفصلها عن نظرية المعرفة بمعناها الكلاسيكي وعن تداخل العلاقة بين العلم والفلسفة كما شهدناه في كثير من المذاهب الفلسفية.

لتوضيح هذه القضايا والبرهنة على التقارير التي أعلنتها حول علاقة الفلسفة بالعلم سنتناول في البحث موضوع الفكر الرياضي وتطوره من اليونان إلى الوقت الحاضر، مركزين على القضايا التي تتناولها فلسفة الرياضيات، رابطين بين هذه القضايا وتطور الفكر العقلاني بحيث يفضي بنا هذا الرصد إلى الوقوف على المعالم الرئيسة للعقلانية المعاصرة والمفهوم الجديد الذي تشتقه عن الحقيقة. ثم سنقف عند بعض القضايا المنفردة التي تلقي الضوء على كيفية معالجها بعض القضايا الرياضية داخل إطار التفكير الابستمولوجي مثل قضية البرهان الرياضي، قضية المعاني الرياضية، ووظيفة الرياضيات وأثرها في العلوم.

تاريخ الرياضيات موضوعها وفروعها

حقيقة أنه لا علم أكثر عراقة في تاريخه من الرياضيات، فقد أخذ هذا المبحث صفة العلم اليقيني منذ أقدم مفكريه "فيثاغورث". وإذا قلنا إننا سنتناول هذا التاريخ بعين الاعتبار فإننا مع ذلك غير معنيين هنا بالتأريخ للرياضيات ككشوف وإنجازات. وإن كنا سنعرض بين الحين والأخر لهذا الكشف أو ذاك الإنجاز بحسب ما تتطلبه مادة البحث التي ترصد تطور الفكر الرياضي (أي فكر الرياضيين وفيما يفكرون) فإن ما نرجوه من وراء ذلك ليس الفكر الرياضي بذاته، بل نموذج المعقولية الذي يرسم معالمه بوضوح. فليس تتبعنا لتطور الفكر الرياضي إلا تتبعاً لتطور المعقولية والفكر العقلاني من أفلاطون إلى العصور الراهنة. إنه

تتبع لنشوء وتطور هذه المسائل وتحليلها تحليلاً يبرز قيمتها الابيستمولوجية ودلالتها الفلسفية. في هذا التتبع لتطور الفكر الرياضي سنحاول تناول مرحلتين أساسيتين:

المرحلة الأولى وتتمثل فيما سنسميه عادة بالرياضيات الكلاسيكية التي احتوت نظريتين كبيرتين حول موضوع ومنهج الرياضيات: الأولى جاءت في الفكر اليوناني تحت اسم الرياضيات التأملية والعقلانية الفلسفية التي دعمتها، أما الثانية فقد تأخرت حتى الفكر الحديث وصاغت الرياضيات الانشائية وعقلانيتها الجديدة.

المرحلة الثانية وتشمل المرحلة الانتقالية بما حملته من تطورات وأزمات داخل التفكير والبنيان الرياضيين وصولاً إلى تحقيق نقلة نوعية عبر طرح "أزمة أسس الرياضيات" التي خلقت نظريات ابستمولوجية جديدة حول طبيعة ومنهج الفكر الرياضي أسست للرياضيات المعاصرة وفلسفتها الجديدة.

المحاضرة الثانية

المرحلة الأولى
الرياضيات الكلاسيكية

عندما نريد تمييز علم عن أخر نقوم عادة بذلك استناداً لموضوعه ومنهجه المتناسب مع هذا الموضوع. لكن عندما نريد تميزت الرياضيات الكلاسيكية عن الرياضيات الحديثة، فإننا نجد أن ما يميز بينهما هو أن الأولى تميز بين الموضوع والمنهج في حين تدمج الثانية بينهما.

في الرياضيات الكلاسيكية موضوع الرياضيات هي علم الكم والمقدار. المقدار: كل ما هو قابل للزيادة والنقصان

تبحث الرياضيات فقط في المقادير القابلة للقياس أي المقادير الكمية وهي نوعان:

1-) المقادير الكمية المشخصة: كالمكان الذي هو موضوع علم الهندسة والحركة موضوع علم الميكانيكا وتسمى هذه المقادير بالكم المتصل.

2-) المقادير الكمية المجردة: كالعدد الذي هو موضوع علم الحساب، وتسمى هذه المقادير بالكم المنفصل

في التطور الفلسفي الكلاسيكي يأخذ هذان النوعان شكل معطيات أولية تمثلها "الكائنات الرياضية", أي أفكار تشكل المحتوى الخاص للعقل، هذا المحتوى الخاص يأخذ تارة شكل أفكار كلية كالمثل الأفلاطونية ويأخذ تارة أخرى شكل الأفكار الفطرية التي عبر عنها ديكارت. ونظراً لطبيعة هذا الموضوع كان المنهج الرياضي الكلاسيكي والفكر الفلسفي عموماً يعولان على الحدس والاستنتاج: حدس الحقائق البديهية والأفكار الفطرية، واستنتاج حقائق جديدة من تلك. وذلك بدعوة أن الحدس يمد الرياضيات بالخصوبة أما الاستنتاج فيمنحها التماسك المنطقي. ومن هنا يمكن لنا الحديث داخل المرحلة الكلاسيكية عن نظريتين

أساسيتين: الأولى تعود إلى التفكير اليوناني الذي صاغ الفكر الرياضي ضمن إطار تأملي فلسفي وحدسي فأنتج الرياضيات التأملية وعقلانيتها. أما النظرية الثانية فتأخرت حتى بداية العصور الحديثة وخاصة مع ظهور علم الجبر الذي فرض تحولاً جوهرياً في فهم طبيعة ومنهج الرياضيات لتصبح الرياضيات وشكل المعقولية الذي تمثله إنشائية من فعل الذات العاقلة بعد أن كانت تأملية مفروضة على هذه الذات.

أولاً:) الرياضيات التأملية وعقلانيتها عند اليونان

تروي لنا كتب التاريخ أن حضارات الشرق القديم، خاصة منها الحضارة المصرية والحضارة البابلية، عرفت أشكال مختلفة من التفكير الرياضي كعلم الحساب والهندسة وعلم المساحة، فتاريخ هيرودوت مثلاً يقول لنا إن ميلاد الهندسة كان في مصر القديمة نتيجة لفيضانات النيل. فقد كانت الأراضي آنذاك تعود بكليتها إلى فرعون الذي كان يؤجرها مقابل عائد على محاصيلها، إلا أن فيضانات النيل غيرت مقاس الحصص المتساوية بالأصل، مما استوجب وجود مهندس لقياس تناقص حجم القطعة وحساب التناقص النسبي للعائد. بالإضافة إلى ذلك عرف المصريون العمليات الأربعة في الحساب وقاموا ببعض العمليات المعقدة نوعاً ما.

كذلك تدلنا بعض الأبحاث الجديدة أن الرياضيات كانت متقدمة عند البابليين، فقد استخدموا الحساب والهندسة في دراسة الكواكب والنجوم وحساب الزمن وفي تنظيم الملاحة والفلاحة شؤون الري. إلا أن هذه الأشكال بقيت محصورة في الإطار التطبيقي العملي الناشئ أصلاً عن ضغط الحاجات الاقتصادية والاجتماعية والحياتية عموماً، مما أجل ظهور الرياضيات كعلم نظري بحت إلى أيام اليونان الذين نقلوا الممارسة الرياضية من عالم المحسوس إلى عالم المعقول، من التطبيق العملي إلى التفكير الميتافيزيقي الذي يبحث بما هو ثابت وأبدي لا ما هو متغير ومؤقت.

لكن لم تكن هذه النقلة النوعية في الفكر اليوناني بخصوص الرياضيات مباشرةً ودفعةً واحدةً، وذلك لأنها لم تحدث بالمعنى الدقيق إلا في القرن الثالث قبل الميلاد على يد أفلاطون. فعلى الرغم من اهتمام اليونان بالرياضيات وإبداعهم نظرياتها ونظمهم لأولى قواعدها وقوانينها إلا

إنهم بقوا حتى زمن أفلاطون لا يميزون بينها وبين مهارات أخرى (كالنجارة والحدادة) عندما يريدون تعداد العلوم في عصرهم. وقد وثقت محاورات أفلاطون هذه الواقعة على لسان ثياتيتوس عندما أراد الإجابة على سؤال سقراط عن "ماهية العلم" بالتالي: "يبدو لي أن العلوم هي ما يمكننا تعلمه عند ثيودور، الهندسة والعلوم الأخرى التي عددتها للتو ومهنة الحذّاء أيضاً ليست شيء أخر غير العلم بالإضافة إلى تقنيات الحِرَف الأخرى مجتمعة" بحسب هذا النص العلم هو ما يمكن تعلمه سواء عند الرياضي أو عند الحِرفي، أما العلوم الأخرى التي أتى على تعدادها سقراط كما أشار ثياتيتوس فهي الحساب، علم الفلك، الموسيقى أي رياضيات ذلك العصر. وما يمكن ملاحظته من هذا النص هو أن الفرق الجوهري بين عمل المهندس وعمل الحذّاء لم يكن واضحاً على نحو كافي في القرن الثالث قبل الميلاد، فالرياضيات تعلّم مثل حرفة الحذّاء، وهي قبل كل شيء مهارة عملية، مهارة مساح وحاسب. في الواقع إن صياغة مفهوم الرياضيات كعلم بالمعنى الذي نفهمه اليوم كان بجزء كبير منه ما سيفعله أفلاطون لاحقاً، لأن ظهور هذا المفهوم ارتبط بصورة وثيقة بتفكيره الفلسفي.

تبدأ القصة في محاورة مينون[1] وهي المحاورة التي عرض فيها أفلاطون نظريته في المعرفة. ما يميز هذه المحاورة هو أنها على خلاف المحاورات السابقات (حيث كان الطب هو النموذج الذي استخدمه أفلاطون لمناقشة المعرفة الأخلاقية والسياسية)، أعتمد أفلاطون فيها للمرة الأولى التفكير الرياضي السائد في عصره نموذجاً للمعرفة وأداة للبرهنة على نظريته في المعرفة التي صاغها بقالب أسطورة (تقول إن المعرفة تذكر)، وذلك من خلال تناوله مشكلة مضاعفة المربع، التي أراد بها أن يبرهن لـ مينون كيف استطاع الشاب الصغير تذكر حل مشكلة رياضية مستخرجاً علمه من ذاته بالرغم من جهله بالهندسة.

والواقع أن ما يعنينا في هذا الطرح هو هذا الأسلوب الجديد الذي أعتمده أفلاطون في البرهان على نظريته، لأن مراجعة هذا النموذج تبين لنا أن أفلاطون طور أسلوباً جديداً في التفنيد يقترب كثيراً مما يعرف في الرياضيات بـ "برهان الخلف أو برهان نقض الفرض". وإذا كنا غير معنيين هنا بالبرهان الذي يقدمه أفلاطون لأطروحة "المعرفة تذكر" فهو مع ذلك

---

[1]ـ مينون هي أقدم النصوص التي وصلت إلينا والمخصصة للرياضيات في اللغة الإغريقية. وقد كتبت قبل مينون عدة مؤلفات عن الرياضيات، ولاسيما مؤلفات ديموقريدس وإبوقراط مؤلف كتاب المبادئ الأولى. لكن إياً من هذه النصوص لم يحفظ لنا.

يكشف لنا قضيتين هامتين في بحثنا: أولاهما أنها تفصح عن المفهوم الذي كونه أفلاطون عن العلم، فللمرة الأولى في تاريخ الفكر يمكننا أن نقول مع أفلاطون أن "لا علم بدون استدلال وبدون برهان", أما القضية الثانية فهي أن الرياضيات كمعرفة لاأمبيريقية مؤسسة على الاستدلالات هي نموذج هذا العلم.

لكن ما الذي يجعل من الرياضيات نموذجاً للعلم عند أفلاطون؟

الحقيقة أن الثابت في كل المحاورات هو معارضة أفلاطون بين المعرفة الحقيقية التي موضوعها نوع ومجال الفكر، والرأي البسيط الذي موضوعه المحسوس. فهو يرى أن كل ما هو مرئي ومحسوس متعدد وغير مستقر ولا يمكن أن يكون موضوع معرفة حقيقية، أما ما يعرفه العقل بذاته دون واسطة الإحساس فهو وحده موضوع معرفة حقيقية، وبالتالي لم يكن اعتبار أفلاطون الرياضيات نموذج المعرفة الحقيقية إلا لعدم احتوائها على شيء أمبيريقي. والواقع أن هذا ما حاول أفلاطون شرحه في قوله: إن "الرياضيين يستخدمون الأشكال المرئية ويقومون باستدلالاتهم على هذه الأشكال، لكن ليس إليها يفكرون بل إلى ما هي شبيهه: مثلاً يقيمون استدلالاتهم على المربع بذاته وليس على ذلك الذي يخط ويرسم."

إن الرياضيات بهذا المعنى هي التي تقود بشكل طبيعي إلي العقل بمساعدة بعض الإحساسات التي ترافق العقل وصولاً للحقيقة الموجودة في" عالم المثل", معها يتخلص الفيلسوف من الصيرورة لأن عليه الاهتمام بالجوهر. إنها تجبر النفس على التعلم بواسطة العقل وحده. على هذا النحو يخلص أفلاطون في جمهوريته لنتيجة التالية: "ليست مهمة العلم الرياضي خدمة التجار في عمليات البيع والشراء، كما يعتقد الجهّال، بل تيسير طريق النفس في انتقالها من دائرة الأشياء الفانية على تأمل الحقيقة الثابتة والخالدة."

لقد أصبحت مهمة الرياضيات إذن جذب النفس نحو الثابت والمطلق والكامل بقطع النظر عن محاكياتها الحسية. فموضوع الرياضيات **ماهيات ذهنية تتمتع بوجود موضوعي مستقل وكامل**. فالعدد والمربع والمثلث والدائرة وكل الكائنات الرياضية الأخرى هي كائنات كاملة في ذاتها أما صورها الحسية فيعتريها النقص دائماً.

بهذا المعنى يمكننا القول إن أفلاطون هو من فرض المنظور الجديد الذي يرى في الرياضيات علماً نظرياً بحتاً وينقل الممارسة الرياضية من عالم المحسوس إلى عالم المعقول، من التطبيق العملي إلى التفكير الميتافيزيقي الذي يبحث بما هو ثابت وأبدي لا ما هو متغير ومؤقت.

لكن داخل هذا المنظور الجديد الذي جعل من الرياضيات علماً نظرياً خالصاً كانت الاهتمام الأول في هذا العلم منصب على كمال وبساطة وتناسق وجمال الكائنات الرياضية بكونها صفات ذاتية لها، الأمر الذي دفع الفكر اليوناني باتجاه الأبحاث التأملية المحضة التي تهتم بجمال الاكتشافات وتناسق العلاقات لدرجة أضفوا فيها على الأعداد والأشكال طابعاً سحرياً وحصروا دراساتهم في الموضوعات التي يمكن إضفاء هذه الصفة عليها وأبعدوا من اهتماماتهم الموضوعات الرياضية الأخرى التي يكتنف تصورها بعض التشويش والنقص. مما خلق عائقاً أمام الفكر الرياضي اليوناني منعه من استكمال عملية التطوير اللازمة.

ويكفي أن نذكر هنا الدور الذي لعبه مثل هذا الاتجاه في إعاقة إدراك الرياضيين اليونان أهمية اكتشافهم لنوع جديد من الأعداد هي الأعداد الصم؛ إي الأعداد التي لا تقبل القياس وهي الأعداد التي عرفت منذ ذلك الوقت بالأعداد اللاعقلية (التي لايتصورها العقل تمام التصور) وتسمى اليوم بالأعداد الجذرية.

أما قصة هذه الأعداد فتعود إلى فيثاغورث الذي أراد أن يطبق نظريته المعروفة باسمه على أشكال مختلفة من المثلثات القائمة الزاوية (تقول النظرية: إن مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين) ولكنه فوجئ بأن وتر المثلث القائم الزاوية يكون في بعض الحالات غير قابل للقياس بوحدات صحيحة. فلو كان لدينا مثلث قائم الزاوية وضلعاه المجاوران يساويان على التوالي 3, 4 فإن مربع وتره يساوي : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25\sqrt{} = 5$ وهو عدد صحيح "معقول" يمكن تصوره بتمامه, ولكن إذا كان ضلعا المثلث المذكور يساويان على التتالي 5, 7 فإن مربع الوتر يساوي $5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74\sqrt{}$ وهو عدد غير صحيح بل يقع بين 8 و 9 على اعتبار أن $8^2 = 64$, $9^2 = 81$ إذن إن مربع الوتر في هذا المثلث لا يقبل القياس بوحدات صحيحة لأنه يساوي 8 مع كسور لا نهاية لعدد

أرقامها بعد الفاصلة, ولذلك لا يمكن أن يتصوره العقل بتمامه. هذه الواقعة دفعت الفيثاغورثيين ليس فقط لعدم اعترافهم بغير الأعداد الصحيحة وعدم العناية بغيرها، بل دفعت بالفكر اليوناني لإهمال دراسة الحساب لصالح الاقتصار على الدراسات الهندسية، أعراضهم عن الأبحاث المعقدة التي تطرحها التجربة وظلوا مسجونين في عالمهم الذهني متأملين الأفكار والمفاهيم البسيطة التي يدركها العقل بسهولة الحدس.

وإذا كان من الممكن -كما يرى البعض- استثناء أعمال كلاً من أرسطو واقليدس بوصفها أرست الطابع المنطقي في تشييد صروحهم الرياضية النظرية وإرسائهم البرهان الرياضي على قواعد منطقية صارمة، إلا أننا لا نستطيع إغفال الطابع الحدسي المفرط الذي ساد التصورات الرياضية والأفكار الفلسفية للعقلانية اليونانية وأعاق تطورهما، حتى داخل الصروح المنطقية عند اقليدس:

منطق العلاقات المكانية عند اقليدس وارخميدس حيث توضع التعريفات الأولية وتصاغ المسلمات والبديهيات استناداً للحدس المكاني، كما لا يمكن قبول الكثير من براهينه إلا بشهادة الأشكال والصور الهندسة المرتبطة بالحدس المكاني.

خلاصة القول بقي الفكر الرياضي اليوناني يتعامل مع موضوعات الرياضيات ككائنات مستقلة كاملة ومعروفة لا نحتاج إلا إلى تذكرها تارة، وتأمل خصائصها وتوكيدها وتسجيلها تارة أخرى. وبالمقابل بقي الفكر العقلاني اليوناني يتناول هذه الكائنات بوصفها المعطيات أولية التي تشكل المحتوى الخاص للعقل الذي تارة يتناولها بالحدس (حدس الأعداد والأشكال) وتارة ينظمها مع غيرها من المعطيات والحقائق الأخرى عبر الاستدلال والاستنتاج المنطقي. على هذا النحو أنتج اليونان الرياضيات التأملية وكما صاغ عقلانيتها الفلسفية (المؤسسة على هذا النموذج الرياضي) التي تخصصت في بحثها عن محتوى عقلي ثابت وأزلي.

المحاضرة الثالثة

الرياضيات ومعطيات تاريخ العلوم الحديثة:

ثانياً:) الرياضيات الإنشائية وعقلانيتها

إذا كانت المرحلة الأولى في صياغة مفهوم علم الرياضيات كانت قد حدثت في العصر اليوناني وارتبطت بتصوراتهم الميتافيزيقية وساهمت في بناء أولى أفكارهم الفلسفية، فإن المرحلة الثانية التي تطور هذا المفهوم عن العلم، وتتجاوز في الوقت نفسه التصور اليوناني الذي طبعه، تأخرت حتى أواخر العصور الوسطى وبدايات العصور الحديثة. ويمكن القول على نحو أدق إن هذا التحول بدأ بالتحديد مع ظهور علم جديد من علوم الرياضيات هو الجبر. إذا كان الكلام عن علم الجبر يبدأ مع محاولة الرياضي الإسكندري ديوفانت إيجاد كمية مجهولة نسبة إلى كميات أخرى معلومة، فإن تكوين هذا العلم بالمعنى الصحيح يعود مباشرة إلى التصورات التي كونها العلماء العرب عن الرياضيات. فكلمة «algorithme» لوغاريتم ما هي إلا التحريف الأوروبي لاسم الرياضي الكبير "الخوارزمي" الذي أبتكر داخل الحضارة العربية علم الجبر.

وإذا أردنا أن نعطي فكرة عامة عن هذا العلم بالمقارنة البسيطة مع علم الحساب. نقول إن الجبر عبارة عن علم أكثر تجريد من علم الحساب لأن علم الحساب يعبر عن الكميات المنفصلة بالأعداد، ويبين لنا خصائصها من حيث هي مفاهيم عددية صادقة على كل معدود فهو إذن تجريد من الدرجة الأولى فالقضية: $[(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 (5 \times 3) + 3^2]$ صادقة

على كل معدود أياً كانت مادته، أما الجبر فيتناول دراسة العلاقات المجردة العامة وتغيراتها من غير أن يعنى بقيمتها العددية، فهو إذن تجريد التجريد لأن نسبة الرموز الجبرية إلى الأعداد كنسبة الأعداد إلى الأشياء. فالقضية [(ب + جـ) ^{2} = ب ^{2} + 2 ب جـ + جـ^2] قضية صادقة على كل عدد مهما كانت قيمته. وقد سمي الجبر جبراً لأنه يمكننا من نقل الكمية السالبة من أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الأخر وقلبه إلى كمية موجبة.

لكن علم الجبر لم يصبح علماً حقيقياً بهذا الشكل وقائماً على استخدام الرموز إلا في القرن السادس عشر الميلادي على يد كل من فييت وديكارت، لأن العرب ابتكروا الجبر ولكنهم عبروا عنه بواسطة الكلام لا باستخدام الرموز.

يقول الخوارزمي صاحب كتاب **"مفاتيح العلوم"** وهو كاتب أديب غير عالم الرياضيات:

" سمي الجبر بهذا الاسم لما يقع فيه من جبر النقصانات والاستثناءات..... مثال ذلك أن يقع في المسألة مال إلا ثلاثة أجذاره يعدل جذراً، فجبره أن نقول مال يعدل أربعة أجذار، وذلك ستة عشر لأنك تممت المال وزدت عليه ما كان مستثنى منه فصار مالاً تاماً، ثم احتجت أن تزيد مثل ذلك المستثنى على معادله فصار المعادل أربعة أجذار." المال في هذا الاصطلاح هو مربع العدد، فالعدد 25 مال للجذر 5. يمكن صياغة المسألة السابقة بالطريقة التالية: س^2 – 3 س = س (مال إلا ثلاثة أجذاره يعدل جذراً) أي س^2 = 4 س وبالتالي: س = 4 ومالها أي مربعها 16.

لقد كان العرب يتكلمون الجبر ولذلك صعب عليهم تطويره وتنميته، وبقي الأوربيين يتناولون علم الجبر على هذا الشكل حتى جاء الرياضي فرانسوا فييت (1540-1603) الذي استعمل الحروف الهجائية كرموز للكميات الحسابية، وأدخل بعض العلامات التي تجري على تلك الحروف.

مع ذلك لم يقم فييت إلا بالخطوة الأولى دون مواصلة الطريق لتقديم الجبر كعلم تجريدي محض، خصوصاً أن العمليات الجبرية بقيت في ذهن فييت مقترنة بالأشكال الهندسية وحدسها كما كانت عند اليونان. وكان لا بد من تخليصه منها بعد أن خلصه فييت من الكلام العادي وما يقوم مقامها من أعداد حسابية. والواقع أن هذا ما قام به فعلاً ديكارت بعد حوالي

نصف قرن من خلال التعبير عن الأشكال الهندسية بواسطة معادلات جبرية، أي دمج الهندسة بالجبر وإنتاج الهندسة التحليلية والتي أسست "التحليل" أهم فروع الجبر الحديث.

هذا المبحث الجديد يقوم في الواقع على فكرة التي صاغها ديكارت في الجزء الثاني من **كتاب الهندسة**: " كل النقاط التي نستطيع تسميتها هندسية، أي تلك التي يمكن **قياسها بدقة ويقين،** لديها بالضرورة بعض العلاقة مع كل النقاط في الخط المستقيم القابل لأن يصاغ ببعض المعادلات. "

في الهندسة التقليدية مثلاً لمحاولة حل المسألة المتعلقة بإيجاد مساحة شكل ما ولكن شكلاً رباعي، كان لا بد من رسم الشكل الرباعي أ ب جـ د الذي يضم الأشكال الرباعية 1 + 2 + 2 + 3: والوصول إلى القول إن المساحة تساوي هذا الجمع.

أ ب

1	2
2	3

جـ د

أما في الهندسة التحليلية فلا ننظر في أشكال مربعة بل بمجرد مستقيمات نرمز إليها بهذا الشكل:

أ س ص ب

$س^2$	س ×ص
ص × س	$ص^2$

س

ص

جـ د

وعليه تحل المسألة بواسطة المعادلة التالية: (س + ص)^2 = س^2 + 2 س ص + ص^2.

بهذه الطريقة استبعد ديكارت جميع الأشكال الهندسية بإرجاعها كلها بدوال "التحليل" إلى خط مستقيم يحدد أبعاده وشكله بواسطة إحداثيات، مبيناً بذلك كيف يمكن حل مشكل متعلقة بالمقادير والأشكال الهندسية بواسطة العمليات الجبرية بطريقة عقلية يقينية ومنتظمة. ويمكننا أن نلاحظ هنا أن هذه المستقيمات التي استبقاها ديكارت تذكرنا بالامتداد الذي جعل منه ديكارت جوهر العالم المادي أو الخارجي في فلسفته.

هذا الأمر دفع ديكارت لاعتماد الجبر منهجاً عاماً للعلم وإحداث قطيعة عميقة مع التصور اليوناني للرياضيات. فمع الجبر لم نعد نتعامل مع أشكال أو كائنات رياضية موجودة مسبقاً وتمتلك كل صفات الكمال كما كانت عند اليونان، بل مع رموز نتناولها وكأنها غير معروفة أو أنها كميات مجهولة فعلاً نستخرجها بمعادلتها بكميات معلومة بواسطة الجهد العقلي المحض.

هذا المعنى الجديد الذي أضافه الجبر على الرياضيات غير من طبيعة موضوع ومنهج كلياً.

في هذا المنهج الجديد تتميز الحقيقة الرياضية ذاتياً بالأسلوب الذي به تكون معطاة "بالحدس" أي التجربة المباشرة التي تخرج بها من الاستخدام المحض للفكر، وتتميز الحقيقة الرياضية موضوعياً بالبساطة والتجرد عن موضوعاتها؛ أي كطبائع بسيطة أو كجواهر بسيطة مدركة بالفكر وحده. أما العمليات العقلية التي تقود إلى مثل هذه الحقائق فهي الحدس والاستنتاج: فالكل يستطيع أن يرى بالحدس أن المثلث ببساطة محدود بثلاث أضلاع. وهذا لا يستخرج باستدلال يعتمد معطيات الحس، بل استناداً لطبائع بسيطة مدركة مباشرة بالعقل، والحدس هنا لا يناقض الاستدلال بل يقوده، لأن الاستنتاج هو هذه الحركة المستمرة دون انقطاع لفكر لديه حدس واضح عن كل حد فيها.

بالإجمال لم يعد العلم والجهل عند ديكارت مرتبطان بطبيعة الموضوعات أو بما هو محدد وغير محدد فيها، بل أصبحا مرتبطين فقط بطبيعة الذات المفكرة في وحدتها الإنشائية التي غدت مركز المعرفة الجديد. فما في الموضوعات من صدق وصحة يعود إلى مشاركتها للبداهة أو للحدس العقلي. بمعنى أن حقيقتها تكمن في كونها موضوعة تحت نظر الذات المفكرة، وعلى هذه الذات أن تفرض النظام بين موضوعاتها. وبذلك يغدو العلم الرياضي المهمة الخاصة للفكر الإنساني بحيث لا يوجد قبله ولا يوجد خارجه، وتصبح الرياضيات والعقلانية المرتبطة بها إنشائية بعد أن كانت تأملية.

إن الهندسة التحليلية التي تعالج المنحنيات بالجبر فتحت أفاق واسعة أمام الرياضيات التي أصبح الجبر عمودها الفقري. ضمن هذا الإطار وعبر تصنيف المعادلات استناداً لعدد جذورها تم الإعداد للنظرية العامة للخطوط المنحنية التي ستستمر بالصعود بالدرجات حتى اللانهاية. لكن ديكارت الذي وضع معيار **قابلية القياس بدقة ويقين** في النقاط الهندسة التي طبق عليها نظريته، وضع حداً لتطبيقات نظريته عند القيم المتناهية، ورفض فكرة التساوي بالتقريبي (مثلاً π) لصالح فكرة التساوي التام التي تفرضها معايير الوضوح والتمييز. كما أن إبقائه المستقيم الذي يرد إليه جميع الأشكال الهندسية جعله أمام مشكلة رياضية وفلسفية قديمة وهي مشكلة اللانهاية التي بقيت تعيق تقدم الفكر الرياضي منذ اليونان إلى أن جاء الحل على يد عالمين كبيرين هما لايبنتز ونيوتن من خلال إبداعهما حساب التفاضل والتكامل. والحق أن التطبيقات في ميدان الميكانيكا هي التي عجلت بتقدم الجبر والتحليل في القرن الثامن عشر، للبحث في مسار جسم متحرك يقسم هذا المسار إلى مجموعات من المحطات الثابتة تفصلها مسافات لا حد لصغرها. وباستعمال حساب اللانهائيات الصغرى تمكن العلماء من التغلب على المشكلات التي تثيرها مسائل الحركة في علم الميكانيكا. وهكذا تفرعت أنواع الدوال إلى [(متصلة) و(منفصلة تستغني عن أي حدس هندسي)] وأصبح بالإمكان دراسة جميع الظواهر المتغيرة المتطورة بواسطة المعادلات التفاضلية: فالحصول على معادلة تفاضلية لظاهرة ما، معناه فهم ديناميكيتها والتحكم بها.

لقد فتح التحليل أفاقاً خصبة في الرياضيات النظرية، وتمكن الرياضيون من تجاوز مشكلة اللانهاية والاستغناء عن الحدس الهندسي حتى في المجال الضيق الذي استبقاه ديكارت. لقد تحولت الرياضيات كلها إلى عمليات جبرية لا تخضع إلا لقواعد المنطق الأمر الذي أدى إلى ظهور كائنات وفروع رياضية جديدة مشروعة منطقياً لكن ليس لها ما يقابلها في الواقع الأمر الذي خلق أزمة جديدة في بينة العلم الرياضي وأفرز محاولات جديدة لمعالجتها وتدشين مرحلة جديدة في الفكر الرياضي والفلسفي.

المحاضرة الرابعة

المرحلة الثانية
الرياضيات المعاصرة

طريقة ومبادئ البرهان الرياضي والتطورات المعاصرة:

منذ نشوئها وصولاً إلى القرن التاسع عشر بقيت الرياضيات النموذج الأعلى للمعقولية، لكن مع انتشار الجبر والتحليل، غدت الرياضيات علم يبدأ من العناصر البسيطة يصعد تدريجياً

نحو الصروح المعقدة بطريقة برهانية متماسكة. وكان من نتائج انتشار الطريقة الجبرية ظهرت **فروع وكائنات جديدة وغريبة** حولت النموذج الرياضي إلى جملة من التأليفات الجبرية الصورية المنطقية التي تتم حسب قواعد معينة، وتصف صروحاً لا صلة لها بالواقع. أي أصبحت الرياضيات أشبه بلعبة الشطرنج لا إنتاج فيه. الأمر الذي أدت إلى زعزعت وحدة هذا العلم وإنتاجيته، ودفعت الرياضيين إلى إعادة النظر في المبادئ التي شيدوا عليها صروحهم الرياضية وأفرزت فلسفات جديدة للرياضيات وللنموذج الذي تمثله في المعقولية.

قبل الدخول في تفاصيل هذه الفلسفات لا بد أولاً من الوقوف قليلاً عند التحولات التي حدثت داخل التفكير الرياضي وأدت لظهور كائنات وفروع رياضية غريبة داخل النموذج الرياضي المعاصر. وسوف نتناول هنا فقط قضيتين امتدادات مفهوم العدد وطبيعة البرهان الرياضي ومبادئه:

أما الكائنات الجديدة والغريبة التي ظهرت في الفكر الرياضي فتتمثل أولاً في **امتدادات مفهوم العدد**: في سلسلة غير من منتهية من الأعداد الصحيحة الموجبة {1, 2, 3, ... n} وعندما نقوم بجمع أي عددين نحصل دائماً على عدد من السلسلة نفسها, لكن في حالة الطرح فإننا نقف عند حالات لا يعود الطرح فيها ممكننا, هذا الأمر فرض إضافة مفهوم العدد السالب وزيادة سلسلة الأعداد. كذلك أدت استحالة عملية القسمة بدون باقي بين الأعداد الصحيحة في حالات معنية إلى التوسع في فكرة العدد عن طريق خلق الأعداد الكسرية وإضافة مجموعة الأعداد الجذرية (الأعداد الصحيحة والكسرية الموجبة والسالبة) هذه المجموعة تحتوي أعداداً لا يمكن أن توضع في صورة كسر, بل من الممكن حسابها باستخدام الجذر التربيعي ليكون الحساب تقريبياً على الدوام مثل $\sqrt{2}$ وهو جذر المعادلة: ($س^2 - 2 = 0 \therefore$) وقد أطلق عليها اسم الأعداد الصماء, وهي بدورها نوعين: أعداد جبرية تكون حالاً لمعادلة جبرية كـ $\sqrt{2}$, وأعداد غير جبرية لا تمثل حلاً لمعادلة جبرية مثل العدد (π), وتسمى أعداد (عالية أو ترانسندانتالية), وتؤلف مع الأعداد الجبرية مجموعة الأعداد الحقيقية. إلى جانب هذه المجموعة أضاف الرياضيون مجموعة الأعداد الخيالية كحل لبعض المعادلات التي ليس لها جذر حقيقي مثل المعادلة: ($س^2 + 1 = 0 \therefore$) التي تحل بالطريقة التالية: ($س^2 = -1$ إذن: $س =$

- $\sqrt{1}$). لنحصل بذلك على مجموعة أعم تشتمل على الأعداد الحقيقية والأعداد الخيالية وهي مجموعة الأعداد المركبة (والعدد المركب هو عدد يشمل على عددين حقيقيين وعدد خيالي). باختصار كان نتاج هذا كله تحولت العبارات الجبرية إلى عبارات مشروعة منطقياً وأصبح بالإمكان القيام بتألفيات جبرية تخيلية بغض النظر فيها عن الأشياء الحقيقية المصورة.

مع ظهور أهمية المشروعية المنطقية إلى سطح اهتمامات الرياضيين المنهمكين بالتأليفات الجبرية الصورية بدأ الاهتمام **بطبيعة البرهان الرياضي المحض ومقوماته ومبادئه**، وقامت بناءاً على ذلك حركة واسعة في أوساط الرياضيين تركزت حول مراجعة مبادئ البرهان الرياضي ونقده وفحص مدى صدقها ونوعية هذا الصدق. لفهم طبيعة ونتائج هذه الحركة الداخلية في الفكر الرياضي لا بد أولاً من التوقف عند التطورات التي أدت إلى هذه المراجعة الداخلية لطبيعة البرهان الرياضي ومبادئه وبالتالي أدت إلى ظهور فروع جديدة في الرياضيات.

عند الحديث عن البرهان الرياضي لا بد من العودة إلى اقليدس، لأن صياغته للهندسة الكلاسيكية كما جاءت في كتابه ***" المبادئ"*** بقيت لوقت طويل النموذج الذي لا يمكن تجاوزه للنظرية الاستنتاجية. وهذا في الواقع ما يؤكده جملة من الرياضيين والفلاسفة: ففي رأي لايبنتز مثلاً "إن الإغريق نجحوا في بلوغ كل الدقة الممكنة في الرياضيات، وقدموا بذلك للبشرية نماذج مهمة في فن البرهان" من جهة أخرى كتب برونشفيك:" إن اقليدس بالنسبة لكل الأجيال التي تعلمت من فكره كان أستاذ في المنطق أكثر منه أستاذ بالهندسة."

في صياغته للهندسة أقام اقليدس البرهان العقلي المحض أو الاستنتاج الرياضي على جملة من المبادئ وهي: البديهيات، التعريفات، المسلمات.

<u>أولاً البديهيات:</u>

وهي قضايا أولية يصدق بها العقل لوضوحها بذاتها ولأن إنكارها يوجب الوقوع في تناقض، أما صفاتها فهي:

1. البديهيات صادقة بذاتها.
2. لا يمكن البرهان عليها.

3. تصدق على كل العلوم

منها على سبيل المثال:

1. الأشياء المساوية لشيء واحد متساوية.
2. أنصف الأشياء المتساوية متساوية.
3. أضعاف الأشياء المتساوية متساوية.
4. الكل أكبر من الجزء.

ثانياً التعريفات:

وهي قضايا غير العرفة تشرح معاني الحدود الأولية وتحدد المعاني الرياضية وتوضحها وهي تختلف باختلاف العلوم. فللهندسة تعريفات خاصة كمفهوم النقطة والخط والاستقامة والتوازي والاتجاه. وللجبر مفاهيم خاصة وتعريفات خاصة كمفهوم العدد الموجب والعدد السالب والقيمة المطلقة إلخ

ثالثاً المسلمات: وهي قضايا غير واضحة بذاتها وغير صادقة بذاتها على خلاف البديهيات، لا يمكن البرهنة عليها بل يسلم بصحتها تسليم وهي بذلك تشبه البديهيات، خاصة كالتعريفات لكل علم من العلوم الرياضيات مسلماته.

المسلمات منها صريح ومنها مضمر: في الهندسة الاقليدسية مسلمات صريحة مثلاً:

1 ـ الخط المستقيم أقصر مسافة بين نقطتين.

2 ـ يمكن مد أي مستقيم إلى أي طول.

3ـ من نقطة خار مستقيم لا يمكن رسم سوى موازي واحد.

ومسلمات ضمنية مثل المكان ثلاثي الأبعاد وهي كافية لتحديد نقطة في فضاء اقليدسي، تجانس المكان أي أجزاء متجانسة في جميع الجهات.

للميكانيك مسلمات صريحة مثل: مبدأ العطالة، القصور الذاتي، الفعل ورد الفعل. أما مسلماته المضمرة فهي: تجانس الزمان وانحفاظ الكتلة.

حقيقة المسلمات:

اختلف المناطقة والرياضيون في حقيقة المسلمات أو الموضوعات فقال العقليون: إن المسلمات حقائق أولية شبيهة بالبديهيات أو هي كما قال كانط: حقائق عقلية ضرورية وقبلية، ولكن تاريخ الرياضيات يضعف هذا القول ويبين لنا:

1 ـ أن الموضوعات المسلمات ليست من الضروريات الملازمة للعقل البشري لأن العقل اهتدى إليها بالتدريج فمبدأ العطالة يرجع إلى كبلر ومبدأ استقلال الحركات إلى غاليليو ومبدأ تساوي الفعل ورد الفعل إلى نيوتن.

2 ـ أن العقل قد تخيل موضوعات أو مسلمات مخالفة لموضوعات ومسلمات اقليدس واستطاع أن يؤسس علماً هندسياً حمل اسم الهندسات اللاقليدسية، وقد اهتدى إلى هذا العلم عالمان في القرن التاسع عشر هما: لوباتشفسكي (1849- 1925) وريمان (1854- 1912) وذلك من خلال دراستهما ونقدهما للمسلمة الاقليديسية التي أثارت الشكوك والارتياب وهي مسلمة المتوازي التي برهن على أساسها اقليدس عدة قضايا في بناءه الهندسي ومنها القضية القائلة: إن مجموع زوايا المثلث يساوي دوماً 180 درجة. ويمكن تحديد الخلاف بين هذين النموذجين والنموذج الاقليدسي بالنقاط التالية:

المكان عند اقليدس سطح مستوي، عند لوباتشفسكي سطح منحني، عند ريمان سطح كروي.

مجموع زوايا المثلث عند اقليدس يساوي 2 قا، عند لوباتشفسكي تساوي أصغر من 2 قا، عند ريمان أعظم من 2 قا.

عدد الموازيات التي يمكن رسمها من نقطة خارج مستقيم هو عند اقليدس = 1, عند لوباتشفسكي = ∞, عند ريمان = ∴ .

ينتج من ذلك أن المسلمات ليست من الضروريات العقلية وإلا لما أمكن العقل أن يتصور ضدها.

لكن هل يعني أن الموضوعات حقائق اختبارية محضة كما زعم أنصار هذا المذهب؟ الواقع أن هذا القول أيضاً غير دقيق لأن هذا يخالف طبيعة المعاني الرياضية وصفتها الامثلية الخيالية. يقول بوانكاريه أن الرياضيين لا يختبرون المستقيمات والدوائر بل الأشياء المادية، ومبدأ العطالة غير قابل للقياس، ثم إن انطباق الهندسة الاقليدسية على الواقع لم يعطها صدق

أكثر من الهندسيات الأخرى. لذلك نجد بعض الرياضيين يذهب للقول إن الموضوعات ليست صادقة بذاتها، وإنما هي اصطلاحات موافقة ولا يمكن أن يكون هناك هندسة أصح من هندسة بل يكون هناك هندسة أوفق من هندسة، وهندسة اقليدس أوفق من غيرها لأنها أبسط.

قصارى القول إن الموضوعات المسلم بها شرط من شرائط معقولية الحقائق الرياضية لأنها تساعد على دراسة العلاقات الرياضية في حالات البسيطة وهي مقتبسة من عالم التجربة والخبرة.

بكل الأحوال أن ما تقدم يدعونا إلى مراجعة المفاهيم التي يقوم عليها البرهان الرياضي:

أولاً مع قيام الهندسيات اللاقليدسية أصبح التمييز بين البديهيات والمسلمات في البرهان الرياضي أمراً ثانوياً، بحيث أصبحت تؤخذ جميعها كفروض أو أوليات افتراضية توضع خارج إطار الصدق والكذب. لأن التمييز بين البديهية والمسلمة كان يقوم على درجة البداهة العقلية من حيث أن البديهيات قضايا تحليلية تفرض نفسها على العقل، في حين المسلمات لا تتصف بمثل هذه الدرجة، ولكن مع تطور العلوم الرياضية أظهر أن معيار البداهة لم يعد صالح للتمييز فالبداهة ليست واحدة عند الجميع وهي تختلف باختلاف ميادين البحث، فلو أخذنا مثالاً إحدى بديهيات اقليدس (الكل أكبر من الجزء) من منظور نظرية المجموعات لجورج كانتور لوجدنا أنها لم تعد بديهية إلا في مجال المجموعات المتناهية. وبالتالي لم يعد من الممكن الاحتفاظ بالتمييز السابق ولم يعد هناك اعتبار للبديهية على المسلمة بل هما في الفكر الرياضي الحديث مجرد فرض يتم قبوله على أساس اختيار واعٍ لا على أساس طبيعته الخاصة. المهم في قضية من القضايا التي تؤخذ كأساس للبرهان هو الدور أو الوظيفة التي تلعبها في هذا البناء لامقدار ما تتمتع به من وضوح وبداهة. من الواضح أن الموقف الجديد إزاء المبادئ الرياضية يشكل تحولاً جذرياً في الأفاق الرياضية فإذا أصبح دور أو وظيفة قضية ما هو المهم في بناء منظومة ما دون النظر إلى الطبيعة الداخلية لهذه القضية فمن الممكن تنوع المنظومات الرياضية بتنوع اختيار المبادئ.

هذا التصور الجديد لطبيعة المبادئ انعكس أيضاً على تصورنا للبرهان الرياضي وللحقيقة الرياضية:

1) ـ بالنسبة للبرهان الرياضي:

كان ينظر للبرهان قديماً على أنه برهان يؤدي إلى نتائج ضرورة ومطلقة بحيث نقول: بما أن هذه المبادئ صادقة صدق مطلق فالقضايا الناتجة عنها صادقة صدق مطلق (القياس الضروري عند أرسطو). أما الآن فقد أصبح الأمر أكثر نسبية فهو يشير فقط أنه إذا وضعنا هذه المبادئ أساساً للاستنتاج فهاهي النتائج الصورية التي تترتب عليها. إن الضرورة هنا لم تعد تخص القضايا بل الروابط المنطقية التي تجمع بينها في النسق الاستنباطي. على هذا النحو أصبحت المنهج الرياضي اليوم يعرف بأنه نظام فرضيـي _استنتاجي.

2) ـ بالنسبة للحقيقة الرياضية:

إن التصور الجديد لمبادئ البرهان الرياضي ولطبيعة هذا البرهان أدى إلى تصور جديد للحقيقة الرياضية عموماً والحقيقة الهندسية خصوصاً. فقد كان ينظر عادة إلى نظرية ما من نظريات الهندسة على أنها بناء فكري مجرد وتعبر في الوقت نفسه عن الواقع الموضوعي؛ أي أن الحقيقة الهندسية تعبر عن حقيقة واقعية وحقيقة فكرية معاً. أما اليوم فإن الهندسة تهمل الجانب الذي يتعلق بالواقع وتتركه للهندسة التطبيقية ولا تهتم إلا الجانب التعلق بالعقل. مما أدى إلى ظهور خلاف بين الرياضيين حول معيار الصدق والحقيقة الرياضية: هل هو صدق وحقيقة فكرية يضمنها الاتساق المنطقي فقط مع عدم انطباقها على الواقع المعاش كما في الهندسة اللاقليدسية أم هو صدق وحقيقة واقعية يضمنها انطباقها على الواقع على الرغم من احتوائها على بعض النقص في الاتساق واعتمادها على البداهة والحدس المكاني؟

ثانياً إن ظهور الهندسيات اللاقليدسية مثل تحدياً مباشراً لتصور الرياضي للمكان بوصفه كماً متصلاً. ظل حدس الاتصال أساساً لعلم التحليل حتى بعد أن تحولت الهندسة ذاتها إلى الجبر، وبقي مألوفاً حتى نهايات القرن التاسع عشر أن كل الدالات الرياضية متصلة (الدالة من وضع لايبنتز وهي المنحنى الهندسي الذي يعبر عن علاقات متصلة متتابعة بين كميتين متغيرتين هما إحداثيات) وبقي أيضاً التحليل مرتبط بالهندسة والاتصال المكاني إلى أن اكتشف كوشي

الدالات المنفصلة والاعداد التخيلية في الدوال مما عمق الشك بالحدس المكاني وبرزت الدعوة لقراءة المتصل بالمنفصل.

وقد عزز هذه الدعوة ظهور أنواع جديدة من العدد كالعدد المنطوق أو المعقول +1/+2, العدد الأصم أو اللامعقول √2, العدد التخيلي - √1. وأدى ذلك بالرياضيين إلى طرح مشكلة العدد الصحيح وتعريفه كبديل لفكرة الاتصال الهندسي وصولاً إلى البحث عن وحدة علم العدد برد هذه الأنواع إلى العدد الصحيح، وظهر لهم من ذلك إمكانية رد الرياضيات كلها لمفهوم العدد من أجل تحقيق وحدتها التي تشتت مع هذه الاكتشافات الجديدة. وظهرت بذلك مشكلة تحسيب الرياضيات والبحث عن اليقين الرياضي في اليقين الموجود في علم الحساب (رد المتصل إلى المنفصل)، وفي هذا تحول جذري في التفكير الرياضي وطبيعة الرياضيات، التي كانت تؤسس كما هو معلوم على أساسين اثنين: مفهوم العدد (المنفصل)، ومفهوم الخط (المتصل)، ولكن عندما تحول الخط إلى أعداد، بتقدم التحليل، أصبح العدد هو الأساس الوحيد لكل فروع الرياضيات.

وكما يحدث دائماً، فإن الاهتمام بميدان ما من الميادين يؤدي دائماً إلى توسيعه وأحياناً إلى الكشف عن صعوبات جديدة فيه. وهذا ما حدث بالفعل، فقد أدى الاهتمام بالأعداد إلى توسيع ميدانها عبر جهود الرياضي جورج كانتور في إنشاء نظرية المجموعات التي كانت حجر الزاوية لحركة التحسيب، لكن ما لبث أن بدأت تظهر الصعوبات داخل هذه النظرية لتأخذ صيغة متناقضات (كمتناقضة مجموعة جميع المجموعات كانتور، ومتناقضة رسل).

وهكذا غدت النظرية التي تطلع لها الرياضيون من أجل تأسيس الرياضيات وتحقيق وحدتها وانسجام فروعها تعاني نقائض خطيرة. مما أدى إلى احتدام النقاش بين الرياضيين والفلاسفة حول (أزمة الأسس)، فظهرت ثلاث وجهات نظر، أسست لفلسفات جديدة للرياضيات: النظرية اللوجستيقية (الانكليزي رسل)، النظرية الاكسيوماتيكية (الألماني هلبرت)، والنظرية الحدسية (الهولندي بروور).

المحاضرة الخامسة

أراء معاصرة في تأسيس علم الرياضيات

أولاً: النظرية اللوجيستيقية: (Le logicisme)

بدأت هذه النزعة مع أطروحة المنطقي الألماني فريجه في محاولته قراءة علم الحساب في كتابه (التصورات) بواسطة عدد محدد من القضايا والقواعد المنطقية، هذه المحاولة أخذت صيغتها الأكثر اكتمال مع برتراند رسل في كتاب (*مبادئ الرياضيات 1903*) ثم في كتابه (برنكيبيا *ماتيماتيكا 1910-1913*) بالتعاون مع هوايتد. تقوم هذه النزعة على فكرة المطابقة بين الرياضيات والمنطق وإعادة تأسيس الرياضيات استناداً للغة وقواعد المنطق، إلا أن فكرة الربط بين الرياضيات والمنطق ليست جديدة تماماً، فقد طرحت سابقاً عبر أعمال لايبنتز من خلال محاولته بناء *"الرياضيات الكلية"* هذه المحاولة ألزمت لايبنتز بمطلبين أساسيين:

1 ـ تقدم ألفبائية عن التصورات بحيث يعبر عن كل تصور برمز.

2ـ إعداد موسوعة من التعريفات المنطقية للتصورات في كل العلوم

إلا أن مشروع لايبنتز عانى من مشكلات عدة أهمها:

1ـ لم تكن الرياضيات قد تتطور على نحو كافي لتتيح المجال لمثل هذه المحاولة.

2ـ احترام لايبنتز لتعاليم أرسطو في المنطق منعته من تجاوز هذا الأخير رغم عثوره على بعض الأخطاء في هذا المنطق.

المحاولة الثانية في الربط بين المنطق والرياضيات كانت مع جورج بول إلا أن محاولة هذا الأخير كانت عبارة عن قراءة للمنطق الأرسطي استناداً إلى العمليات الجبرية أي تطبيق الرياضيات على المنطق واستخدام الرموز الجبرية لتعبير عن العلاقات الفكرية. بهذا الشكل قدم جورج بول أولى صياغات "جبر المنطق".

أما النزعة المنطقية التي حملت اسم لوجستيقا فكانت على نقيض أطروحة جورج بول من حيث أرادت اختزال الرياضيات إلى جملة من القضايا والقواعد المنطقية. وقد برهن رسل

على هذه النزعة بواسطة عمليتين متكاملتين: تحليل الرياضيات تحليلاً منطقياً بردها إلى أصولها المنطقية، ثم تحليل المبادئ المنطقية نفسها إلى الفروض الأولية التي نستطيع منها استنباط جميع قواعد المنطق، وجميع قواعد الرياضيات معاً. في كتابه ***(أصول الرياضيات*** *1903)* يشرح رسل معنى نزعته المنطقية هذه بالطريقة التالية: "إن الرياضيات البحتة هي فئة القضايا التي صورتها (ق ⊃ ك) حيث ق, ك قضيتان تشملان على متغير واحد أو جملة متغيرات هي بذاتها في القضيتين, علماً بأن كلا من ق, ك لا تشتمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية. إن ما يجمع بين المنطق والرياضيات في نظر رسل هو الصورية الكاملة لذلك كان اهتمام رسل في بناء نسق صوري من خلال تطويره المنطق الأرسطي ليكون قادر على التعبير على كل القضايا الرياضية وهذا ما فعله في الفصل الأول من كتابه (*أصول الرياضيات*) بخصوص حساب القضايا وحساب الفئات وحساب العلاقات. بعد ذلك عمد رسل أولاُ إلى تعريف الأعداد الطبيعية تعريفاً منطقياً؛ أي ردها إلى ألفاظ دالة على مفاهيم منطقية مستنداً إلى حساب الفئات ومعرفاً العدد كفئة مثلاً العدد (1) هو فئة جميع الفئات التي تحتوي عنصر لا أكثر، ويصاغ منطقياً بالطريقة التالية:

(E س). (س∈ ف). (ص) [(ص ∈ ف) ⊏ (ص = س)]، ثم انتقل ثانياً إلى بيان أن الرياضيات كلها ترد إلى فكرة العدد الطبيعي المقروء منطقياً، وقد أعطى الصيغة المكتملة لهذا المشروع في كتابه (*برنكيبا ماتيماتيكا*).

في الواقع إن استخدام رسل لحساب الفئات أو المجموعات وضعه مباشرة أمام متناقضة المجموعات (بالخصوص متناقضة مجموعة كل المجموعات) التي حاول حلها عبر تطويره نظرية في الأنماط المنطقية ونظرية في الأوصاف، لكن الصعوبات التي أفرزتها مثل هذه النظريات أدت في نظر الكثيرين إلى إعلان فشل النظرية المنطقية عند رسل. وسوف نكتفي هنا بالإشارة إلى القيمة الإبستمولوجية لهذه النظرية:

1- إن هذه النظرية فشلت كما يرى الكثيرون في بلوغ الهدف الأساسي لها وهو اختزال الرياضيات إلى المنطق وذلك لعدة اعتبارات:

a) إن محاولة رسل في رد الرياضيات إلى نظرية المجموعات لم تطبق إلا على الرياضيات الكلاسيكية ولم تتسحب على باقي الرياضيات.
b) في صياغته للمنطق الجديد استند رسل على جملة من المفاهيم مثل الفئة أو المجموعة وهي مفاهيم رياضية بالأصل مما جعل مشروع اختزال الرياضيات للمنطق مشروع متناقض.
c) عندما تطور رسل نظريته في الأنماط المنطقية كحل لمتناقضات نظرية المجموعات (التي أسس عليها نظريته المنطقية) استند فيها على بعض الموضوعات التي لا تدخل في إطار المنطق الأمر الذي دفع الكثيرين لرفض هذه النظرية وبالتالي إعلان فشل رسل بتقديم حل لهذه المتناقضة.

2- بالرغم من العيوب التي عانت منها نظرية رسل إلا أنها أثرت بلا شك في فلسفة الرياضيات المعاصرة وفي الدراسات المنطقية عموماً. ولا بد لنا، من أجل إعطاء النظرية اللوجستيقية عند رسل دلالاتها الحقيقية، من الفصل بين بنيتها والمهمة التي شكلت من أجلها وهي اختزال الرياضيات إلى المنطق. لأن قيمة هذه البنية كما تبدو للعيان مستقلة عن هذه المهمة. هذه القيمة تبدو أولاً في دفع الصورية في دراسة المنطق والرياضيات إلى مرحلة متقدمة وتقديم الصيغة الأساسية الأولى للغة وقواعد المنطق الرياضي، انطلاقاً من اعتماد القضايا الأولية بدلاً من التصورات، ثم في إدخال مفاهيم أساسية كالدوال القضائية وحساب العلاقات التي ندين بها لرسل. وإن كانت لم تنجح في بلوغ هدفها الرئيس في رد الرياضيات إلى المنطق فقد قدمت مع ذلك مقترح فلسفة جديدة للرياضيات تستغني عن الأعداد بوصفها كائنات ميتافيزيقية، وبردها إلى حدود منطقية خالصة.

المحاضرة السادسة

ثالثاً: النظرية الحدسية (*L'intuitionisme*)

هذه النظرية ظهرت كرد فعل على النزعتين السابقتين أو بالإجمال كرد فعل على النزعة التي تربط عضوياً بين الرياضيات والمنطق، ومبدأ هذه النزعة يقوم على القول بعدم إمكانية مثل هذا الربط، لاعتقادهم بوجود شيء في الرياضيات يتجاوز مجرد الصياغة المنطقية وقواعدها، ولا يمكن التعبير عن هذا الشيء بواسطة قضايا وقواعد المنطق. يصر أنصار هذه الأطروحة على تسمية هذا الشيء بـ "الحدس" بوصفه الملكة التي توجه عمل الرياضي.

يميز المؤرخون لهذه النزعة بين مرحلتين أساسيتين: المرحلة الأول ظهرت عبر أعمال الرياضيين الفرنسيين بوريل، لوبيغ، وباير، بالإضافة إلى كتابات الرياضي الكبير هنري بوانكاريه التي تصدى للنزعة المنطقية عبر سلسلة من المقالات تحمل عنوان "*الرياضيات والمنطق*" ما بين عام (1904 و1912). أما أطروحته التي دافع عنها فهي أن في الرياضيات مادة تقابل الصورة المنطقية، هذه المادة تظهر في التجربة التي تسبق أي عمل منطقي، إنها التجربة الحدسية التي يقوم كل إبداع على أساسها، أما وظيفة المنطق فهي مجرد شرح وعرض هذه التجربة والبرهنة عليها.

أما المرحلة الثانية فقد عبرت عنها أعمال الرياضي الهولندي بروور وتلميذه هيتنغ، الذين سموا بالحدسيين الجدد. ويمكن عرض أراء هذه النزعة من خلال موقفهم إزاء موضوعين اثنين: 1-) طبيعة الموضوعات الرياضية, 2-) مبدأ الثالث المرفوع.

بصدد الموضوع الأول: يعتقد هؤلاء بأن موضوعات الرياضيات ذات طبيعة مثالية، بحيث يرتبط وجودها بوجود ذات الرياضي التي تنتجها، فالموضوعات الرياضية في نظرهم عبارة عن إنشاءات أو بناءات ذهنية محضة يقوم الفكر بتركيبها في التجربة الرياضية وهي ليست لها وجود خارج أو سابق على الذات التي تؤلفها.

يشترك الحدسيون الجدد مع بوانكاريه في هذا الاعتقاد، فقد سبق للرياضي الفرنسي أن عبر عن هذا الموقف عندما حاول توضيح أسباب المتناقضات التي أفرزتها نظرية كانتور في المجموعات، موضحاً أن هذه المتناقضات تعود للرياضيات التي حاول المناطقة أنصار كانتور صياغتها استناداً للمنطق فقط. فهؤلاء هم المسؤولون عن هذه المتناقضات لاعتقادهم أن موضوعات الرياضيات عبارة عن جواهر خالصة موجودة وجود مستقل وسابق على الفكر الذي يكتشفها. لأنه لما كانت هذه الموضوعات موجودة بأعداد لانهائية كان عليهم الاعتقاد بوجود فكرة اللانهائي الفعلي الذي فرض وجود المتناقضات في صورة *"تعريفات لاحملية"*. فمثلاً في تعريف *"مجموعة كل المجموعات"* يقول بوانكاريه أن معنى كلمة *"كل"* سيكون واضح بجلاء عندما نتحدث عدد متناهي من المجموعات، ولكن عندما يكون الحديث عن عدد لا نهائي فلا بد من افتراض لانهائي فعلي أي افتراض وجود هذه المجموعات كلها وجوداً سابقاً على تعريفها ليكون لما نقوله معنى.

بالمقابل فإن كل هذه المشكلة تحل في رأي بوانكاريه عندما لا نعتقد إلا بوجود الموضوعات التي يمكن أن تكون معرفة بأعداد متناهية؛ أي عندما لا نعتقد بوجود موضوع ما من الموضوعات سابق على الذات المفكرة التي تنتجه، ولما كانت هذه الذات متناهية، فإن اللانهائي ليس له معنى إلا في تعبيره عن قدرة هذه الذات على خلق موضوعات متناهية بقدر ما تريد. باختصار إن أصحاب هذه النظرية يصرون على تعميق تصور الرياضيات الانشائية، من حيث هي بناءات ذهنية تكون فيها النظرية الرياضية تعبير عن النجاح في تشييد فعلي لبناء معين. فهم يقولون مثلاً أن القضية القائلة $(2 + 2 = 3 + 1)$ ليست إلى اختزال للقضية التالية: " لقد شيدت البناء الذهني الذي فيه $(2 + 2)$، ثم شيدت البناء الذهني الذي فيه $(3 + 1)$، ووجدت أن أنهما يؤديان للنتيجة نفسها".

أما عن الموضوع الثاني: فهو الموقف من المنطق ومبادئه ولاسيما مبدأ الثالث المرفوع (الذي يقوم على افتراض قيمتي اثنتين لا ثالث لها، صدق وكذب أو وجود ولا وجود).

يتفق الحدسيون الجدد على رفض النظريتين السابقتين (المنطقية والصورية) ويؤسسون رفضهم هذا على فكرة أن المنطق لا صلح أن يكون أساس للرياضيات لأن مبادئه أكثر تعقيد

أقل مباشرة من مبادئ الرياضيات نفسها. وإذا كان أحد بعض أنصار هذه النظرية لا يرون ضير من انشاء منطق ما فإنهم يؤكدون على ضرورة أن يكون مستوحى من الرياضيات.

كذلك رفض أنصار هذه النظرية إطلاق صلاحية أولية لمبدأ الثالث المرفوع ولاسيما أن نقائض نظرية المجموعات تستند كلها لهذا المبدأ. هذا الرفض في الواقع مؤسس على تصورهم للرياضيات باعتبارها "تشييد فعلي لبناء ذهني ما", هذا التصور يفرض مراجعة المبادئ والبرهنة عليها فعلياً. والحال أن تناول مبدأ الثالث المرفوع ضمن هذا المنظور بين أنه قد نستطيع البرهنة عليه إذا كنا نتناوله في المجالات المتناهية، لكن عندما ننتقل إلى مجالات لامتناهية فإن البرهنة عليه تصبح مستحيلة وبالتالي يصبح مبدأ غير قابل للتطبيق.

ويمكن أن نأخذ مثال بروور نفسه لتوضيح هذه الفكرة: فقد افتراض بروور وجود حقيبة فيها كرات بلياردو، وراح يسأل إذا ما كانت في الحقيبة كرات بيضاء. ورأى أن مبدأ الثالث المرفوع لا يقدم لنا إلا احتمالين أما موجود أو غير موجود. ثم حاول أن يختبر هذه الاحتمالات بالقيام بتجربة إخراج الكرات واحدة تلو الأخرى، لكنه قبل إتمام الاختبار يعترض بالقول إن التجربة يمكن لها أن تنجح إذا ما كان عدد الكرات متناهي لكن في حال امتد عدد الكرات إلى ما لا نهاية فالتجربة مستحيلة والمبدأ غير قابل للتطبيق.

القيمة الابستمولوجية للنظرية الحدسية: إنها لا ترفض المنطق بالإطلاق لكنها ترجئه إلى المرتبة الثانية في العمل الرياضي وترفض اعتماده مبدأ أو أساساً للرياضيات، مع ذلك تبقى أراء أنصار هذه النزعة غير مكتملة وتعاني من بعض العيوب ولاسيما فيما يتعلق بمعنى الحدس أي المفهوم الذي أسست عليه كل أطروحتها إذ يبقى هذا المفهوم غامض وغير وواضح في استخداماتهم. كما أن اقتراحهم بناء الرياضيات استناداً لهذا المفهوم الفضفاض عن الحدس أدى على إلغاء قسم كبير من الرياضيات الكلاسيكية.

المحاضرة السابعة

ثانياً: النظرية الأكسيوماتيكية (L'axiomatique):

هي نزعة تقوم على الربط بين المنطق والرياضيات دون اختزال أحدها للأخر، مستخدمة منهجاً جديداً يطلق عليه اسم الأكسيوماتيك وهو منظومة من الأوليات التي يقوم عليها بناء رياضي أو منطقي معين، بحيث يختلف بناء رياضي ما عن غيره باختلاف الأوليات التي يقوم عليها كل منهما. أهم أعلام هذه النظرية ديفيد هلبرت، بول برنييس، كارت غودل وآخرون. أما أهم خصائص هذه النظرية فهي التالية:

1-) رفضها لنزعة اللوجستيقة التي تريد اختزال الرياضيات إلى قضايا منطقية صرفه.

2-) تأكيدها أن المهم في الأوليات هو الدور الذي تلعبه في البناء الرياضي المشيد عليها لا طبيعتها الخاصة. بعبارة أخرى: إن المهم ليس الأوليات، بل العلاقة التي تقوم بينها، ومن أجل الانصراف التام إلى العلاقات وحدها والتحرر التام من تأثير المعنى الواقعي المشخص لا بد من اللجوء إلى الرموز. لقد انتهت هذه النزعة إلى تفريغ التفكير الرياضي والمنطقي من أي محتوى أو مضمون انطولوجي.

إذا كان فريجه ورسل في النزعة اللوجستيقية قد دفعوا الصورية إلى مرحلة متقدمة في دراسة المنطق والرياضيات بحيث قدموا لغة خاصة تشرح كل قضايا الرياضيات فقد أصروا رغم ذلك على وجود حدوس منطقية أولية وعلى أن تقول القضية شيء يخص الواقع من حيث هي رموز لمضمون. بالنسبة لـ هلبرت الصورية كانت تعني إلغاء المضمون لصالح الصورة، فرفع بذلك درجة الصورية إلى أعلى مستوى. الرموز في الصيغ الرياضية

ليس لها معنى محدد بذاتها بل تأخذ معناها من قواعد استخدامها، لأن الاستدلال يقوم على هذه الرموز لا على ما تشير إليه. هذا ما سمي فيما بعد الصورية أو الرمزية الصرفة (*formalisme*) التي لا تعتبر المسلمات أو الأوليات من حيث هي حدسية بديهية أو حتى صادقة بل من حيث هي متسقة مع غيرها من أوليات النسق.

المطلب الأول في هذه النزعة كان البرهنة على اتساق أي نسق استنباطي أي عدم تناقضه وهذا أول مظاهر برامج هلبرت الذي اقترح منذ عام 1899_ 1900. هذا البرنامج سيأخذ صورته المكتملة عام 1904 عندما يفترض النظرة الإجمالية إلى الرياضيات أي تقديم قول صوري عن الرياضيات (رياضيات الرياضيات) أو "ما بعد الرياضيات": بحيث تنتمي الصيغة 2 + 3 = 5 إلى علم الحساب، في حين ينتمي التأكيد أن [2+3=5 صيغة حسابية] إلى ما بعد الرياضيات من حيث هو يقول شيء عن الرياضيات.

أما المطلب الثاني للنزعة الصورية كما يرى هلبرت فهو أن "ما بعد الرياضيات" ليست إلا تناول ميكانيكي للرموز استناداً إلى قواعد؛ أي مكننة الاستدلال من خلال اختزاله إلى حساب خالص على الرموز.

من هذين المطلبين ولدت "نظرية البرهان" التي تعنى بإعداد القواعد الصورية لصحة البرهان بشكل عام. تنص نظرية البرهان هذه أنه عندما نقوم بتشييد بناء رياضي معين مستندين لمجموعة من الأوليات، فإن على هذه الأوليات وهذا البناء (منظور إليها كنسق استنباطي متماسك) أن تحقق جملة من الشروط المنطقية:

1-) استقلال أولياتها.

2-) عدم تناقضها.

3-) تتامها أو مجرد إشباعها.

وتكون الأوليات مستقلة عندما لا يكون من الممكن البرهنة على أي أولية بواسطة الأوليات الباقية، لأن إمكان ذلك يعني أن الأولية المبرهن عليها تصبح نظرية. أما عدم التناقض فهو ينشأ من خلال بناء نسق لا يكون ممكناً فيه البرهنة على قضية ونقيضها استناداً لنفس الأوليات. أخيراً يكون النسق تتامي عندما يكون بالامكان دائماً البرهنة على أي قضية في

النسق أو على نقيضها استناداً لمسلمات النسق. لكن مبرهنة غودل عام 1930 بينت استحالة تحقق هذا الشرط من خلال تقديم برهان على لا تتامية أي نسق استنباطي. لذلك نلجأ عادة إلى برهان بدرجة أقل كبرهنة إشباع النسق من خلال البرهنة أنه مغلق لا يحتمل إضافة أولية جديدة دون إحداث تناقض.

هناك خصائص أخرى ليست بضرورة الخصائص السابقة، لكن قد يتصف بها البناء النظري الذي من هذا النوع، منها: الانغلاق والانفتاح، التكافؤ، التقابل.

أخيراً القيمة الابستمولوجية للنزعة الأكسيوماتيكية:

1-) إن المنهج قديم لكن الطريقة جديدة أما أهميته فتكمن في اعتماد منهج مقنن له أصول وقواعد وهذا يفيد على صعيد التفكير في التجريد والتعميم والتنظيم والمقارنة والمناظرة واستخلاص البنية. إن الانتقال إلى هذا المستوى من التجريد يفتح أفاقاً جديدة بما يرافقه من تقدم في مجال التعميم الذي يحول كما قال رسل الثوابت إلى متغيرات، ويمكن الفكر من معالجة أكثر القضايا تعقيداً وغموضاً بمرونة ووضوح. كما أنه يساعد على اكتشاف التناظر بين النظريات المتفرقة التي يضمها علم واحد وذلك باستخلاص البنية المتغيرة المشتركة بينها. بالإضافة إلى أن الطابع الآلي للخطوات الأكسيوماتيكية سمح بإدخال التقانة الالكترونية وصناعة حواسيب وعقول آلية.

2-) لابد من الإشارة إلى حدود هذه النزعة من حيث أن بعض الخصائص المنطقية للنسق الاستنباطي لم تعد قابلة للتحقق بموجب مبرهنة غودل وخاصة تتامية هذا النسق.

3-) إن نمط التفكير هذا أكمل ما بدأه رسل في تغيير معنى الرياضيات على نحو جذري وكلي، فمع النظرية الأكسيوماتيكية لم تعد رياضيات علماً للكم المتصل والمنفصل بل علماً العلاقات والبنيات التي تتشكل منها هذه العلاقات.

بعد استعراض مجموع هذه التيارات والمحاولات يمكننا القول إن مشكلة أسس الرياضيات لم تعد تطرح اليوم بفضل تقدم الأبحاث الأكسيوماتيكية التي أدت إلى قيام علمين جديدين هما: "ما بعد الرياضيات", "ما بعد المنطق" وتحولت أنظار الرياضيين من الكائنات إلى البنيات.

المحاضرة الثامنة

العقلانية المعاصرة من الكائنات إلى البنيات

إن ما يميز الرياضيات المعاصر عن الرياضيات السابقة هو ذلك التصور الجديد الذي تقدمه عن موضوع العلم الرياضي ومنهاجها مع قيام الصياغات الأكسيومية لمختلف فروع الرياضيات. فقد بقيت الرياضيات حتى منتصف القرن التاسع عشر تدرس ما أسميناه "الكائنات الرياضية" الأعداد والأطوال والأشكال. وكان هنا شبه إجماع أن موضوع هذا العلم هو هذه الكائنات نفسها بما فيها من خصائص من حيث هي معطاة لنا وليست من إنشاء الفكر، وتتمتع بوجود موضوعي مستقل عن الذات التي تتأملها، وبالتالي فهي تفرض نفسها على العقل فرضاً، وليس بالإمكان تجاهلها أو إعطائها خصائص غير تلك التي تتصف بها.

كان هذا تصور أفلاطون المستمد من نظريته بالمثل، وهو التصور نفسه الذي ساد في القرون الوسطى لدى كثير من الفلاسفة الواقعيين الذين اعتقدوا أن الكليات، أي المفاهيم العامة، ذات وجود موضوعي مستقل عن كونها موضوعات للفكر (وذلك مقابل الأسميين الذين رأوا أن موضوعات الفكر تعبير عن مجرد ألفاظ، وأن الاسم الكلي ليس له معنى أكثر

من مجموع الأشياء التي ينطبق عليها.) كذلك في العصر الحديث فقد اعتقد ديكارت بوجود مبادئ وأفكار عقلية فطرية على رأسها الكائنات الرياضية نفسها، ولم يتردد باسكال بالقول إن الكائنات الرياضية كالمثلث مثلاً تتمتع بوجود مستقل كوجود الحجر. وقد كتب مالبرانش أيضاً: إذا فكرت في الدائرة أو العدد فإني أفكر في أشياء واقعية، إذ لو كانت غير موجودة لكنت أفكر في لاشيء. أما سبينوزا الذي بنى فلسفيته بناء هندسياً فقد كان منطلقه "وحدة الفكر والوجود". كانط أيضاً نظر للقضايا الرياضية كقضايا قبلية أولية تركيبية، والمقولات التي منها مقولة الكم قبلية وهي التي تجعل المعرفة ممكنة.

باختصار، ما يمكن ملاحظته مما تقدم أن الخاصية المميزة للعقلانية الكلاسيكية هي اعتقادهم بوجود محتوى ثابت خاص بالعقل، أن النموذج الواضح لهذا المحتوى العقلي الخالص هو الكائنات الرياضية. وقد انعكس هذا التصور لموضوع العلم الرياضي على منهجه فكان هذا المنهج يقوم دائماً على نوع من الحدس، حدس هذا المحتوى العقلي أو تلك الحقائق.

غير أن تحولاً جذرياً طرأ على هذا التصور، وعلى العقلانية الكلاسيكية كلها. فمع النظرية الأكسيوماتيكية التي استبدلت الرياضيات (كعلم للكم المتصل والمنفصل) بالرياضيات كعلم للعلاقات والبنيات التي تتشكل منها هذه العلاقات، لم يعد من الممكن الحديث عن محتوى عقلي دائم للعقل ولا عن معطيات عقلية محضة. لأن العقل لم يعد في التصور الجديد مجموعة من المبادئ، بل أصبح قوة تمارس نشاطاً معيناً حسب قواعد معينة. إنه بالأساس فاعلية. ومن ثمة أصبحت العقلانية هي الاقتناع أن النشاط العقلي يمكنه أن يبني منظومات بمقدار الظواهر المختلفة. هذه المنظومات الفكرية التي ينشئها العقل استناداً إلى المنظومات الأولية يمكن لها أن تكون مستمدة من النشاط العملي والتجارب في الطبيعة والحياة في المجتمع وبالتالي تكون مطابقة للواقع. كما يمكن لها أن تكون بناءات نظرية اكسيومية متماسكة وصحيحة من الناحية المنطقية لكن لا تنطبق على واقع معين. بل تستلزم افتراض واقع ما تنطبق عليه (كما فعل ريمان مثلاً عندما افترض مكاناً كروي الشكل بدلاً من المكان المستوي الذي بنى عليه اقليدس هندسته) لتغدو المسألة تحويلاً لمفهوم الحقيقة الذي يقوم على المطابقة بين الفكر والواقع، واستبداله بمطلب التلاقي بين عمليات الفكر وعمليات

الطبيعة بعدما فقد الحدس امتيازه (كضامن لاتساق معطيات التجربة مع محتوى الفكر) بفعل تعدد المنظومات الأكسيوماتية.

هنا يتضح لنا ذلك الانقلاب الذي أحدثته الصياغة الأكسيومية للرياضيات التي لم تعد قائمة على الحدس بل على منهج فرضي استنتاجي ينطلق من فرضيات ويبني منظومات استناداً لقواعد المنطق الجديد. إن موضوع الرياضيات لم يعد الكائنات بل الإجراءات والعمليات والعلاقات نفسها، ولم يعد علم للكم بل نظرية في البنيات من مختلف الأنواع وعلى رأسها ما يعرف بالبنيات الأولية والبنيات الأم.

المغزى الفلسفي لنظرية الأكسيوماتيكية بوصفها نظرية في البنية:

إن تطور المنهج الأكسيوماتيكي لم يقتصر فقط على العمل العلمي، بل امتد أيضاً إلى بعض المشكلات الفلسفية: فلسفة الرياضيات، فلسفة العلم، وفلسفة المعرفة. بخصوص فلسفة الرياضيات تحدثنا عن ذلك عندما شرحنا النظرية الأكسيوماتيكية التي حاولت أن تقدم فلسفة للرياضيات تتجاوز المتناقضات التي فرضتها نظرية المجموعات.

1- فلسفة العلم:

على الرغم من أن مبرهات المنطق وعلم الحساب يمكن لها أن تنطبق على الواقع فإننا ننظر عادة لهذه العلوم كعلوم عقلية استنباطية خالصة، وعلى الرغم من أن الفيزياء تشرح بلغة الرياضيات فإنها تبقى علماً تجريبياً يستمد جوهره من التجربة. على هذا الأساس كانت مشكلة التقسيم الكلاسيكي للعلوم إلى علوم عقلية وأخرى تجريبية، ولم تكن محاولة كانط في صياغة الأحكام التركيبية القبلية إلا رغبة في تجاوز هذه المشكلة.

المنهج الأكسيوماتيكي قدم حل لهذه المشكلة بطريقة أخرى عندما قدم هلبرت نموذج أكسيوماتيكي للهندسة الكلاسيكية دون أي استعانة بالحدس، وهو بهذه المحاولة بين أن

الهندسة الكلاسيكية التي كانت تبدو في الوقت نفسه عقلية وحدسية تجريبية، ليست في الحقيقة إلا خليط يجمع بين علمين متميزين لم يكونا واضحين وهما:

الهندسة المحضة التي صاغها هلبرت في صورة حدود وقضايا تستمد حقيقتها من الاتساق المنطقي مستبعداً أي معنى حدسي تجريبي.

الهندسة التطبيقية التي لا تبدو فيها الصور البرهانية إلا مساعدات للتعبير عن قوانين الفيزياء.

مع تطور الأبحاث الأكسيوماتيكية أصبحت المسألة تقوم على النحو التالي: بدلاً من القسمة بين علوم تجريبية وأخرى عقلية من الممكن عرض أو شرح أو قراءة نفس الخطاب العلمي لأي علم كان بطريقة مزدوجة: مرة صورية وأخرى تطبيقية. وهذا يعني أن كل علم من العلوم يمكن أن ينظر له كلغة قابلة أن تقرأ بطريقيتين مختلفتين: في القراءة الأولى نكون بصدد نسق صوري خالي من أي مضمون تجريبي تم ضبطه بالوسائل المنطقية للتأكد من خلوه من المتناقضات. أما القراءة الثانية فتمكننا من اعطاء أوليات النسق تأويلات صحيحة في مجال محدد للواقع بحيث تأخذ الرموز معنى عيني وتعبر الصياغات المؤلفة من الرموز حقيقة أمبيريقية.

وبالتالي لم يعد صحيحاً تقسيم العلوم إلى علوم عقلية وعلوم تجريبية بل لا بد لنا من النظر إلى العلوم كسلسلة واحدة بدراجات مختلفة في التجريد والمعقولية، كما يمكن النظر لكل علم في هذه السلسلة على أنه قابل للقراءة المزدوجة عقلية وتجريبية.

2- فلسفة المعرفة:

إن التعارض بين العقل والتجربة هو التعارض الأساسي للفلسفة: إنه تعارض بين الأفكار والوقائع، الفكر والشيء، المعرفة والوجود، المعقول والمحسوس، المجرد والعيني، القبلي والبعدي. المنهج الأكسيوماتيكي ليس فقط أسلوب تقني في الرياضيات بل طريقة يمكن للفكر فيها أن يتعامل مع المعرفة ويمكننا من معالجة التعارض المذكور بطريقة جديدة.

مبدأ هذه الطريقة يقوم على أساس أن العيني ليس إلا المجرد وقد أصبح مألوفاً بالاستخدام. وعليه لا يمكن فهم التعارض السابق بين العقل والتجربة إلا عبر العلاقة بينهما فالمعرفة

ليست إلا التوافق بين البنية المجردة والتحقق العيني، بين المخطط والمجسم. إن المعرفة التي تفرضها الاكسمة هي المعرفة العقلانية التي لا ترى ضير في تسميتها تجريبية فكل معرفة لها مخطط أو هيكل رمزي وومجسم أو تحقيق عيني.

المحاضرة التاسعة

طبيعة الوجود الرياضي

لم تطرح مشكلة وجود الكائنات المنطقية إلا في بدايات القرن العشرين في حين طرحت هذه المشكلة منذ اليونان بصدد الكائنات الرياضية، وكان الطرح على النحو التالي: ما هو الواقع الذي يعبر عنه العدد 3 مثلاً أو المثلث المساوي الأضلاع؟ إن السؤال المطروح لا يخص من جهة الوقائع التجريبية الفردية العينية بل الكيانات أو الكائنات العامة المجردة التي تستعملها وتحمل عليها الرياضيات، ولا يخص من جهة أخرى الفكرة التي امتلكها الآن كذات فرد لكن ما يجعل موضوع هذه الفكرة عام وخارج إطار الزمان.

بدأ السؤال عندما استبدل فيثاغورث الرياضيات التجريبية العملية عند المصريين القدماء برياضيات عقلية. لم يكن هذا الاستبدال إلا انتقالاً من مجرد الفائدة العملية إلى العلم، من الحس إلى العقل، من العالم التجريبي إلى عالم الأفكار أو عالم الجواهر. وقد وصفت

أسطورة الكهف الأفلاطونية ببراعة هذا التحول فلم تكتشف فقط وجود عالم أخر إلى جانب العالم المألوف بل اكتشفت أيضاً أن هذا العالم أكثر سمو وأهمية من العالم الذي تقدمه الحواس، عالم هو أكثر شبهاً بعالم الكمال الذي وصفته الأديان من الزاوية الإيمانية فقط. وبذلك لم ننتقل عند اليونان من الإيمان والرأي إلى العلم فقط بل إن هذا العلم يسمو بالروح لأنه يدخلنا في عالم من الوقائع الفوق حسية حاملاً على هذا النحو قيمة ميتافيزيقية شبه دينية, يقول أفلاطون في كتابه الجمهورية [ليس مهمة العلم الرياضي خدمة التجار في عمليات البيع والشراء كما كان يعتقد الجهّال بل تيسير طريق النفس في الانتقال من دائرة الأشياء الفانية إلى تأمل الحقيقة الثابتة الخالدة] وعلى ذلك كان موضوع الرياضيات ماهيات ذهنية تتمتع بوجود موضوعي مستقل [مثل], وهذا ما دفع أفلاطون ليرى في الرياضيات مدخل ضروري للفلسفة. في أيامنا المعاصرة يطلق اسم الأفلاطونية على النزعة التي تقول بواقعية الجواهر الرياضية وهي واحدة من أهم المدارس المهتمة بفلسفة الرياضيات مع ظهور نظرية المجموعات.

وقد عبرت العقلانية الكلاسيكية عن هذا التوجه الفلسفي، يعتقد ديكارت بوجود أفكار فطرية عقلية على رأسها الكائنات الرياضية. مالبرانش يتساءل هل أستطيع أن أغير مجموع زوايا المثلث بحسب رغبتي؟ الجواب عند لا لأن موضوعات الرياضيات موجودة وجود موضوعي. فإذا فكرت في الدائرة أو العدد يقول مالبرانش فأنا أفكر في أشياء واقعية لأنه لو لم تكن موجودة فأنا أفكر في اللاشيء. القضايا الرياضية عند كانط قضايا قبلية تركيبية. بمثل هذه الميتافيزيقا بإمكاننا أيضاً أن نتناول كثير من المفاهيم الفلسفية المعاصرة مثل الحقيقة بذاتها عند بولزانوا أو دوام الأفكار الرياضية على نقيض الوجود الزائل في الأشياء الحسية عند رسل. بدأ رسل نظريته المنطقية بهذا النوع من الاعتقاد شبه الديني بعالم أزلي أفلاطوني تتمتع به الرياضيات بوجود موضوعي مستقل عن أي علاقة بالذات المفكرة التي تكتشفه بواسطة المنطق.

مقابل هذه النزعة الأفلاطونية المتطرفة ظهرت نزعة أسمية متطرفة للوضعية المنطقية كنتيجة لكسوف المطلقات المنطقية الرياضية للأفلاطونية في بداية القرن العشرين بسبب

وجود متناقضات نظرية المجموعات. عند الاسميين الحقائق الرياضية نسبية فهي تتبع نسق المبادئ المختارة اعتباطاً بحيث تأخذ الحدود معناها فيها من القواعد التي تحدد طريقة استخدامها بموجب مبادئ النسق. عند أنصار هذا التصور لا تستهدف الرياضيات الأفكار خارج إطار الرموز فهي مرتبطة بهذه الرموز وبالقواعد التي تحدد ترابطات الرموز. إلى هذه النزعة أنتقل رسل بعد رفضه للنزعة الأفلاطونية مدافعاً عن اسمية تريد اختزال الرياضيات إلى المنطق مع فريجه، ثم اختزال المنطق إلى تحصيل حاصل مع فيتجنشتين. هذه النزعة الاختزالية الاسمية قادت إلى اشتقاق صدق القضايا الرياضية من صدق القضايا المنطقية بحيث لم تعد وظيفة الصيغ الرياضية المنطقية تقديم معرفة جديدة بل تعطينا فقط أداة تسمح لنا بتحويل النص الرياضي وقول الشيء نفسه بحدود مختلفة. مثلاً ق ⊃ ك .≡. ~ق ∨ ك .≡. ~ (ق. ~ك). على ذلك لم يعد للصيغ الرياضية المنطقية الأكثر تعقيد من دور إلا ضمان صحة تكافؤات كهذه. جوهرياً هذه الصيغ ليست إلا قواعد لغة وهنا تكمن فائدتها للعلم. أحد أهم الاسميين المعاصرين الذين رفضوا الدخول في مغامرات الميتافيزيقا الأفلاطونية كان كارناب في وضعيته المنطقية التي تفصل بين القراءة الصورية والقراءة الواقعية للعلم من حيث أن الأولى ليس لها موضوع فهي نسق من القضايا المساعدة الخالية من أي مضمون انطولوجي.

انتقد سابقاً فريجه الاسميين الألمان الذين يفضلون مقارنة الفاعلية الرياضية بالفاعلية التي يقوم فيها الذهن في لعبة الشطرنج. بالنسبة لفريجه إن تنظيم القطع في لعبة الشطرنج لا يشرح شيء وقواعد اللعبة تشكل نظام مغلق ليس له أي تطبيق خارج إطار هذه اللعبة، بينما تشرح الصيغ الحسابية أفكاراً، وقوانينها قابلة لتطوير بدون حد ولها تطبيقات غير محدودة خارج إطار علم الحساب.

بين واقعية الجواهر والاسمية الخالصة ظهرت نزعة وسطية أرادت تجنب الميتافيزيقيا الأفلاطونية دون أن تفرغ القضايا العلم من معنى رياضي. عرّف أنصار هذه النزعة الوجود الرياضي بغياب التناقض: فالقول بوجود مفهوم من المفاهيم الرياضية يعني عند هؤلاء أن هذا المفهوم يمتلك الحق بالانتساب إلى نسق بشرط ألا يسبب وجود في هذا النسق أي

تناقض. هلبرت هو صاحب هذه النظرية وقد بين اختلافه عن فريجه في هذه النقطة على النحو التالي: عند فريجه أن عدم التناقض ينشأ من وجود المفاهيم الرياضية بينما عند هلبرت وجود المفاهيم الحقيقي يتبع عدم تناقضها. إن هذا التصور الأخير يقرر وجود المفاهيم الرياضية نسبة لعدم تناقضها ففي الهندسة الاقليدسية لا يوجد مثلاً مثلث قائم الزاوية ومتساوي الأضلاع لأن وجود مثل هذا الكائن في هذه الهندسة يؤدي إلى تناقض مع مسلمة اقليدس أن مجموع زوايا المثلث يساوي 2 قا، ولكن في هندسة ريمان مثل هذا المثلث موجود لأن مجموع زوايا المثلث في هذه الهندسة يتغير ليصل إلى 3 قا. إن خاصية تناقض أو عدم تناقض قضية ما لا يتبع فقط المسلمات في نسق ما لكن أيضاً القانون المنطقي الذي تخضع له المسلمات.

الواقع إن هذا الموقف الذي يربط الوجود الرياضي باتساق النسق الذي يرد فيه لم يكن كافي من وجهة نظر المدرسة الحدسية (بروور_ هيتنغ) على الرغم من ابتعاد هؤلاء عن الإطلاقية الأفلاطونية فإن الاتساق المنطقي وإن كان شرط ضروري للوجود الرياضي إلا إنه شرط غير كافي. يضيف أنصار هذا التصور إلى الاتساق المنطقي مفهوم التجربة أو الاختبار. ففي نظرهم مثلما إن عدم قدرتنا على إثبات التهمة على متهم لا تعني براءته فإن البرهان على عدم وجود تناقض في مفهوم أو في قضية رياضية لا يعني أن هذا المفهوم موجود أو هذه القضية صادقة. فمن أجل التأكد الوجود الرياضي لا بد من إنشائها بالحدس أو على الأقل تقديم قاعدة تسمح فعلاً بإنشائه بعدد محدد من المراحل. في الواقع مع أهمية الرياضيات التي تنشأ من أسس الحدسيين أعترض الرياضيون على مثل هذا التصور لأنه يلحق الرياضيات بواقعة عرضية مرتبطة بذات الرياضي وتحولاتها وينفي عن الرياضيات موضوعيتها. 5

خلاصة القول: على الرغم من تنوع واختلاف هذه المذاهب لا يمكن فهم أي مذهب بمعزل عن المذاهب الأخرى ذلك أن القصد العميق للنزعة الاسمية لم يكن إلا رفض كل أشكال الميتافيزيقا الواقعية الأفلاطونية فالاسمية المنطقية عند كواين وغودمان تعبر عن رغبة ببناء منطق بدون انطولوجيا. من جهة أخرى إن التناقض مع انطولوجيا الجواهر الرياضية هو

محرك النزعة الحدسية. بالمقابل يتحرك الأفلاطونيين بموجب مبدأ يدافع دائماُ عن الموضوعية في الرياضيات واستقلالها عن أعراض تطورها التاريخي. فالقول بجواهر ترانسندانتالية يعني ضد الاسميين أن الحقائق الرياضية ليست عبثية ولا تتبع فنتازياتنا الخاصة ولا تختزل إلى لعبة لغة، ويعني ضد الحدسيين أن الحقائق الرياضية مستقلة عن المعرفة التي نأخذها منها عند الحدث الطارئ الذي يكتشفه الرياضي. إن صيغ هذه الجواهر لا الجواهر نفسها هي موضوع البحث. وعليه فكما كانت أفلاطونية فريجه هي رفض لاسمية هين سابقاُ، فأفلاطونية تشيرش هي رفض لاسمية كواين.

المحاضرة العاشرة

أهمية الرياضيات وفلسفة الرياضيات

بدون أدنى شك ليس من الصعب على من يريد أن يتكلم عن أهمية الرياضيات أن يجد فيها مجالاً خلاقاً يستجيب لحاجات اجتماعية واقتصادية، فضلاً عن أنها اليوم تمد العلم الطبيعي بالتنظيم العقلي للظواهر الطبيعية، وقد أصبح منهجها وتصوراتها ونتائجها قوام العلوم الفيزيقية من حيث يمكن دائماً الحديث عن دور المثل الأعلى الرياضي في:

1ـ تثبيت الأحداث: وذلك عبر دراسة هذه الأحداث دراسة كمية تستبدل الملاحظة البسيطة بالملاحظة المسلحة بالمنهج الدقيق الذي يبين لنا أن لا علم إلا البرهان.

2ـ تنظيم الحوادث: وذلك من خلال تزيد العلوم الأخرى بمفاهيم كلية (الزمان والمكان، (الحركة علاقة رياضية بين الزمان والمكان))، وتنظيم الدليل العلمي.

3ـ تنظيم القوانين العلمية تنظيماً رياضياً: من خلال إخضاع الطريقة الاستقرائية إلى الطريقة الاستنتاجية عبر أكسمة العلوم وضبط صياغاتها ضبطاً يبين خلوها من التناقضات، كما تمكن العلماء من القريب بين القوانين من خلال دراسة التقابل والتناظر ولاتشابه بين البنى المنطقية التي ترسمها هذه الطريقة الاكسيوماتيكية.

لكن الاسترسال في الحديث عن أهمية الرياضيات من هذه الزاوية يبقينا في أطار البحث الميتودولوجي، ولا يوصلنا إلى البحث الابستمولوجي الذي هو موضوع بحثنا الأساسي. لذلك لابد لنا من تخصيص الحديث عن أهمية الرياضيات فيما يخص الفلسفة ليدخل بحثنا في الإطار الابستمولوجي.

ومدخلنا لمثل هذا المبحث هو العبارة التي كان قد كتبها أفلاطون فيما يقال على باب الأكاديمية "لا يدخل علينا من لم يكن رياضياً" وهي عبارة أراد منها الإشارة إلى شرط من شروط الالتحاق بمدرسته. والواقع أن هذه العبارة تضع بين أيدينا أمر له دلالته ومغزاه فيما يخص العلاقة بين الفلسفة والرياضيات على نحو نرى معه كيف غدت الرياضيات مقدمة ضرورية للفلسفة، وشرط ضرورياً لتعلم الفلسفة ولصحة التفلسف الحقيقي. ضمن هذا المعنى رأينا كيف بنيت الفلسفة الأفلاطونية على أساس رياضي، وكيف طبق ديكارت النهج الرياضي على كل مناحي التفكير الفيزيقي والميتافيزيقي، ومن هنا أيضاً نجد العذر لـ لايبنتز في حلمه الذي ظل يلازمه طوال حياته في أن يكون كل تفكير إنساني شبيها بالتفكير الرياضي، ونفهم لماذا بنى سبينوزا كتابه "الأخلاق" بناءاً هندسية، ولماذا كانت نقطة البدء والأساس في "نقد العقل المحض" لكانط كيف يمكن للأحكام الرياضية أن تكون ممكنة؟ باختصار، يمكن لنا أن نفهم أهمية الرياضيات بالنسبة للفلسفة من حيث هي المصدر الذي اعتادت أن تجد فيه الفلسفة نموذج معقوليتها والأشكال المتطورة المتتالية لعقلانيتها.

لكن العلاقة بين الفلسفة والرياضيات لم تقتصر على هذا الشكل بل إن تطور الرياضيات باتجاه الصياغات الجبرية والصورية الخالصة من جهة وتطور فرع كبير في الفلسفة هو المنطق من جهة أخرى أعطى أشكالاً مختلفة للعلاقة بين الفلسفة والرياضيات. من هذه الأشكال كان الشكل الذي يربط بين المنطق والرياضيات ربطاً عضوياً يزعم فيه أن العلمان أصبحا شيء واحد (للوجستيقة)، والشكل الذي يربط بين الرياضيات والمنطق عبر منهج جديد هو الأكسيوماتيك الذي أدى إلى التمييز بين الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية.
الجديد في هذه الأشكال هي صورة العلاقة بين الفلسفة والرياضيات التي تجعل هذه الأخيرة موضوع الفلسفة وليس فقط مجرد أساس الأمر الذي خلق فرع جديد في الفلسفة هو فلسفة الرياضيات.

الفرق بين الرياضيات وفلسفة الرياضيات:

إن الرياضيات دراسة إذا بدأنا بأكثر أجزائها ألفة وهي الأعداد، لكان بإمكاننا أن نسير في أحد اتجاهين متقابلين: الاتجاه الأول هو الاتجاه البنائي الذي يتجه بالتدريج نحو مزيد من التركيب نبدأ من العدد الطبيعي ثم العدد الصحيح فالأعداد الكسرية والأعداد الحقيقية والأعداد المركبة، ومن الجمع والطرح إلى التفاضل والتكامل، وهكذا إلى الرياضيات العالية. الاتجاه الثاني وهو الاتجاه الأقل ألفة من الاتجاه الأول ويقوم على التقدم بالتحليل إلى التجريد أكثر فأكثر وإلى البساطة أكثر فأكثر. فبينما نكتفي في الاتجاه الأول بالبحث عما يمكن تعريفه واستنباطه من ذلك الذي افترضناه، نجد أنفسنا في الاتجاه الثاني نطرح الأسئلة التالية: هل توجد أفكار ومبادئ أعم يمكن منها تعريف واستنباط ما بدأنا به؟ إن السير في هذا الاتجاه الأخير هو الذي يميز فلسفة الرياضيات عن الرياضيات العادية.
إن فلسفة الرياضيات تبحث فيما وراء البدايات التي بدأنا منها التركيب وتسأل عن المبادئ التي تكمن وراء هذه البدايات أنه سؤال عن المصدر والأساس والأصل والوجود والماهية. بعبارة أخرى إذا كان الطريق باتجاه التركيب والتقدم إلى الأمام لكي نبني الرياضيات هو طريق الرياضيات العادية فإن الطريق باتجاه التحليل والنظر إلى الوراء لنحلل البدايات هو طريق فلسفة الرياضيات التي تفلسف أسس ومناهج وطبيعة الرياضيات.

ولا يخفى علينا الأهمية الكبيرة لمثل هذا المبحث بخصوص الرياضيات والفلسفة على حد سواء. في الرياضيات من خلال حل مشكلة أسس الرياضيات وإعادة الوحدة لعلم الرياضيات ومنهجه بالتطورات المتلاحقة للنظرية الأكسيوماتيكية. ونقل الرياضيات من المعنى الكلاسيكي كعلم للكم والمقدار للمعنى المعاصر كعلم للبنيات والعلاقات التي تتكون منها هذه البنيات. ولم يكن لهذا التطور إلا أن ينعكس على الفلسفة من خلال ما تقدمه الرياضيات المقروءة بالمنهج الأكسيوماتيكي أو الرياضيات البنيوية من تطوير للمفاهيم الفلسفية في فهم طبيعة العلم والمعرفة على السواء.

أحد جوانب هذه الفلسفة تظهر في مناقشة تعريف الرياضيات بالمعنى الجديد. واحد من أهم التعريفات الجديدة للرياضيات من حيث هي علم للبنيات هو تعريف برتراند رسل الذي يرى فيه أن: " الرياضيات هي العلم الذي لا نعرف فيه عما نتحدث, ولا ما إذا كان ما نقوله صادق أو كاذب" هذه العبارة التي يملئها الشك يجب أن تفهم بمعنى مختلف عما تبدو عليه فهي تعني أن التصورات الأولية المقدمة في النظرية الرياضية لا يمكن أن تحدد بطريقة قطعية ووحيدة بل يمكن أن نفسر بطرق متعددة (لا نعرف عما نتكلم لأننا يمكن أن نستخدم هذا الكلام بصدد عدة موضوعات) كذلك فالرياضي في هذا المعنى لا ينبغي أن يشغل نفسه بما إذا كانت نظرية معينة متحققة بالتجربة أو غير متحققة وعليه (لا نعرف أو لا ينبغي لنا أن نهتم فيما إذا كان ما نقوله في الرياضيات البحتة صادق أو كاذب).

وفق هذا التعريف الرياضيات المحضة مستقلة في بنيتها عن التجربة ومعطياتها وثباتها إنما يتحدد بصحة استنباط النظريات من المقدمات التي يبدأ منها الرياضي ويعمل على خلوها من التناقضات. هذا الأمر يعنى كما أشرنا سابقاً أن من الممكن إنشاء منظومات بعدد الظواهر المدروسة كما يمكن لإنشاء منظومات تحليلية خالصة وعليه تكون الرياضيات نسق استنباطي فرضي يتبع مبدأ التسامح الذي أقره كارناب عندما قال:

" قضيتنا ليست في إملاء محظورات بالوصول إلى توافقات، ... فلا أخلاقية في المنطق.. كل واحد حر في بناء منطقه أي بناء شكل لغته الخاص."

ما عناه كارناب في قوله هذا هو أن النسق الاستنباطي الافتراضي ليس نظرية بل لغة أي نظام إشارات مع قواعد استخدام. إلا أن هذا التصور لم يكن دون بعض الانتقادات التي وجهت له من جانب بعض الفلاسفة المحدثين. فقد اعترض أدوارد لوروا على هذا التصور بالتسائل عن الفائدة من العلم الرياضية المطروح بهذه الصورة، وهو لا يرى جدوى من تقديم الرياضيات بوصفها مجرد لعبة بالرموز. وأنصار هذا التيار يرفضون أن يروا في الحقائق الرياضية مجرد تحصيل حاصل وبأنها متروكة لحرية العالم الرياضي يلهو بها ويختار منها ما يشاء.

كذلك يرى باشلار أن العالم الرياضي عندما يتحدث دون أن يدري ما يتحدث عنه فإنه في الحقيقة يتعمد ألا يدري أو يعرف إذ أن من واجبه أن يتحدث كما لو كان لا يعرف فهو يقوم بعملية كبت لادراكاته الحسية ويرتفع بالتجربة الحسية إلى مستوى عقلي خالص.

من الواضح أن هذه النظرة تجعل للرياضيات اتصالا مباشراً بالواقع المحسوس والطبيعة الخارجية وقد تسلم باتصال ما بينهما، لكن لا يمكن مع ذلك الانتقال على القول إن الحقائق الرياضية انعكاسا للطبيعة ووقائع الحس يكتبها الرياضي في نفسه ويرتفع بها على مستوى عقلي خالص لأن الكبت هنا لا يمكن أن يعني القيام بعملية تجريد للواقع لأن الأمر لو كان كذلك لما كان لنا أن ننشأ أكثر من منظومة واحدة لأن الواقع واحد. والحقيقة أن مثل هذه النظرة لا يمكن لها أن تقوم إلا لأنها لم تدرك الفصل الذي فرضته النظرية الأكسيوماتيكية داخل العلم الواحد بين القراءة الخالصة والقراءة التطبيقية بحيث لا نطلب من القراءة الأولى سوى الإجابة عن سؤال الاتساق وعدم التناقض ونترك للقراءة الثانية الإجابة عن سؤال الفائدة بطريقة لا تمس من قريب أو بعيد صحة ويقين اتساق الرياضيات البحتة.

لأن الحقائق الرياضية في هذا المجال ليست اكتشاف وإنما اختراع وليست مقدماتها وقائع بل فروض وليست ضرورتها حدسية أو تجريبية بل شرطية. وإذا كانت التجربة الحسية توحي للرياضي ببعض مسلماته فإنها لا توحي له إلا بالقدر الذي يوحي بها صفاء القمر للشاعر المرهف الذي بنظم قصيدة لمن يحب.