حساب مقاييس النزعة المركزية لبيانات مبوبة

أ- حساب المتوسط الحسابي لبيانات مبوبة:

ملاحظة هامة: سوف نستخدم الأسلوب المباشر في حسابنا لهذه المقاييس وليس الأسلوب غير المباشر.

مثال: يبين الجدول الآتي كميات الهطل السنوية بالملليمتر والمسجلة في مدينة الحكة خلال الفترة (١٩٥٧-١٩٩٨).

العمود رقم (١)	العمود رقم (٢)	العمود رقم (٣)	العمود رقم (٤)
الفئات (Classes)	التكرار (ك) (f)	مركز الفئة (س) (X)	(ك . س) (f . X)
٩٠ وأقل من ١٦٠	٥	١٢٥	٦٢٥
١٦٠ وأقل من ٢٣٠	١١	١٩٥	٢١٤٥
٢٣٠ وأقل من ٣٠٠	٩	٢٦٥	٢٣٨٥
٣٠٠ وأقل من ٣٧٠	٧	٣٣٥	٢٣٤٥
٣٧٠ وأقل من ٤٤٠	٤	٤٠٥	١٦٢٠
٤٤٠ وأقل من ٥١٠	٦	٤٧٥	٢٨٥٠
المجموع (مج) أو (Σ)	٤٢		١١٩٧٠

المطلوب: احسب الوسط الحسابي للجدول السابق.

الحل:

١- نقوم بتحديد مراكز الفئات (س) أو (X) ونضعها في العمود رقم (٣) وذلك عن طريق جمع الحد الأدنى

(٣) للفئة والحد الأعلى للفئة ثم تقسيم الناتج على (٢).

٢- نضرب مركز كل فئة في التكرارات المقابلة لها ونكتب ناتج عملية الضرب في العمود رقم (٤) والذي عنوانه (س × ك) أو ($f.X$).

٣- نجمع القيم الواردة في العمود رقم (٤) ثم نقسمها على مجموع التكرارات (مج ك) أو (Σf) وفي مثالنا هي تعادل (٤٢) فنحصل على الوسط الحسابي والذي يعادل في مثالنا (٨٥٫٢) ملم.

أما العلاقة المستخدمة في حساب الوسط الحسابي لبيانات مبوبة فهي:

$$\text{س}\bar{} = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}} = \frac{١١٩٧٠}{٤٢} = ٨٥٫٢ \text{ ملم}$$

أو:

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f.X}{\Sigma f}$$

حيث: س$\bar{}$ = الوسط الحسابي، ← $\bar{X}$

مج ك = مجموع التكرارات، ← Σf

س = مركز الفئة، ← X

(لاحظ أن س في حالة البيانات المبوبة تدل على مركز الفئة وليس على القيمة).

٤- حساب الوسيط لبيانات مبوبة: (median)

med. أو $\tilde{x}$

مثال: يبين الجدول الآتي توزيع الأجور الشهرية لـ (٥٠) عاملاً في أحد المصانع موزعة في جدول تكراري.

المطلوب: احسب الوسيط للجدول التكراري الوارد.

عمود (١)	عدد العمال عمود (٢)	عمود (٣)
فئات الأجور الشهرية (الدينار)	التكرار (ك) (f)	التكرار التجميعي الصاعد (FC)
٤٠٠٠ وأقل من ٥٠٠٠	١	١
٥٠٠٠ // // ٦٠٠٠	٢	٣
٦٠٠٠ // // ٧٠٠٠	٧	١٠
٧٠٠٠ // // ٨٠٠٠ ← الفئة الوسيطية	١٨	٢٨
٨٠٠٠ // // ٩٠٠٠	٢٢	٥٠
	مجموع التكرار العادي ← ٥٠	

المصدر: مفترض

أ- ننشئ عمود نضع فيه التكرار التجميعي الصاعد مقابل كل فئة كما هو مبين في العمود رقم (٣)، وذلك عن طريق جمع التكرار العادي لكل فئة مع التكرار العادي للفئة السابقة لها.

فمثلاً الفئة الثانية والتي حدها الأدنى (٥٠٠٠) وحدها الأعلى (٦٠٠٠) تكرارها العادي هو (٢) الذي أعطى لنا، أما التكرار التجميعي الصاعد لها فنحصل عليه عن طريق جمع تكرارها العادي (٢) مع تكرار الفئة السابقة لها (١) فيكون الناتج (٣) والذي نضعه مقابلها في عمود التكرار التجميعي الصاعد. (في العمود ٣).

ب- نبحث في عمود التكرار التجميعي الصاعد عن الفئة المباشرة لـ ($\frac{مجـ ك}{2}$) أو ($\frac{مجـ f}{2}$) أو الفئة الأكبر منها مباشرة (هي في مثالنا $\frac{٥٠}{2} = ٢٥$) بهدف تحديد الفئة الوسيطية.

ج- نحسب الوسيط باستخدام العلاقة الآتية:

(٤)

$$و = ح_و + \left(\frac{\frac{مجك}{٢} - ك_{سو}}{ك_و} \right) \times ف$$

إذ أنَّ:

و = الوسيط.

$ح_و$ = الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

$ك_{سو}$ = التكرار التجمعي الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطية.

$ك_و$ = تكرار الفئة الوسيطية.

ف = طول الفئة.

أو تستخدم العلاقة باللغة الإنجليزية:

$$med. = lm + \left(\frac{\frac{\Sigma f}{2} - Fcm_{-1}}{Fm} \right) \times Cm$$

إذ أنَّ: med. = وسيط.

lm = الحد الأدنى للفئة الوسيطية.

Σf = مجموع التكرار العادي.

Fcm_{-1} = التكرار التجمعي الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطية.

Fm = تكرار الفئة الوسيطية.

Cm = طول الفئة الوسيطية.

وإذا لم نجد في عمود التكرار التجمعي الصاعد قيمة $\left(\frac{مجك}{٢}\right)$ في مثالنا (أي $\frac{٥٠}{٢} = ٢٥$) نأخذ القيمة الأكبر منها مباشرة (في عمود التكرار التجمعي الصاعد).

نلاحظ في مثالنا أنَّ (٢٥) غير موجودة في العمود رقم (٣) فنأخذ القيمة التي أكبر منها مباشرة والتي تقابل في مثالنا (٢٨) وهي القيمة التي تقابل الفئة الوسيطية.

⑤ إذا الفئة الوسيطية في مثالنا هي الفئة التي حدها الأدنى (٧٠٠٠ وأقل من ٨٠٠٠).

أ- نطبق العلاقة $و = ح_و + \left(\frac{\frac{ن}{٢} - ك_{ح_و}}{ك_{ح_و}}\right) \times ف$

بالتعويض:

$$و = ٧٠٠٠ + \left(\frac{\frac{٥٠}{٢} - ١٠}{١٨}\right) \times ١٠٠٠$$

$$و = ٧٠٠٠ + \left(\frac{٢٥ - ١٠}{١٨}\right) \times ١٠٠٠$$

$$و = ٧٠٠٠ + \left(\frac{١٥}{١٨}\right) \times ١٠٠٠$$

و = ٧٠٠٠ + ٨٣٣٣,٣ = ٧٨٣٣,٣ ليرة سورية.

أي أن الوسيط للجدول التكراري السابق يعادل (٧٨٣٣,٣) ل.س.

ب- حساب المنوال لبيانات مبوبة:

هناك عدة طرق لحساب المنوال، ولكننا سنعرض هذه الطريقة هي تلك الطريقة التي اقترحها كارل بيرسون، وتعرف باسم طريقة الفروق، إذ يحسب المنوال من العلاقة الآتية:

$$ل = ح_ل + \left(\frac{\Delta_١}{\Delta_١ + \Delta_٢}\right) \times ف$$

إذ أن: ل = المنوال.

$ح_ل$ = الحد الأدنى للفئة المنوالية.

$\Delta_١$ = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تسبقها.

$\Delta_٢$ = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تليها.

ف = طول الفئة.

(٦)

مثال: يبين الجدول الآتي كميات التساقط السنوية (بوصة) والمسجلة في محطة بيركهند في بريطانيا خلال عامي (١٩٠١ - ١٩٣٠) موزعة في جدول تكراري.

الفئات — Classes كميات التساقط السنوية (بوصة)	عدد السنوات (التكرار) (ك) أو (f)
١٠ وأقل من ١٣	١
١٣ " " ١٥	٢
١٥ " " ١٧	١٠
١٧ " " ١٩	٦
١٩ " " ٢١	٥
٢١ " " ٢٣	٢
٢٣ " " ٢٥	٣
٢٥ " " ٢٧	١

الفئة المنوالية

المطلوب: ما هي كمية الأمطار الأكثر شيوعًا في محطة بيركهند، أو بصيغة أخرى (احسب المنوال للجدول التكراري السابق).

الحل: ١- نقوم بتحديد الفئة المنوالية، وهي الفئة الأكثر تكرارًا، وفي مثالنا الفئة المنوالية هي الفئة التي حدها الأدنى (١٥) وحدها الأعلى (١٧).

٢- نطبق العلاقة الآتية:

$$\text{ل} = \text{ح}_{\text{ل}} + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \times \text{ف}$$

إذاً أنّ ل = المنوال (Mod)

L_0 = الحد الأدنى للفئة المنوالية = (L_0)

Δ_1 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة التي تسبقها.

Δ_2 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها.

ف = طول الفئة = (C).

ويمكننا أن نستخدم العلاقة بالرموز الآتية:

$$Mod = L_0 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) \times C$$

بالتعويض بالنسبة لمثالنا:

ح ل = ٢٥

Δ_1 = ١٠ - ٢ = ٨.

Δ_2 = ١٠ - ٦ = ٤.

ف = طول الفئة = ٢.

بالتعويض نجد أنّ ل = $٢ \times \left(\frac{٨}{٤+٨}\right) + ٢٥$

ل = $٢ \times \left(\frac{٨}{١٢}\right) + ٢٥$

ل = $٢ \times \left(\frac{٢}{٣}\right) + ٢٥$

ل = $٢ \times (٠,٦٦٦٧) + ٢٥$

ل = ١,٣٣ + ٢٥ = ٢٦,٣٣ بوصة.

أي أن المنوال للجدول التكراري السابق يعادل (٢٦,٣٣) بوصة.

(٨) - العلاقة بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال في التوزيع الطبيعي:

إذا كانت مفردات المجموعة تتوزع بشكل متناظر حول قيمة وسطى أعلى، كما هو مبين في جدول التوزيع التكراري التالي:

الفئة	التكرار
٢ و أقل من ٤	٢
٤ // // ٦	٣
٦ // // ٨	٤
٨ // // ١٠	٥
١٠ // // ١٢	٤
١٢ // // ١٤	٣
١٤ // // ١٦	٢

المصدر: مفرضة

لو حسبنا الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للجدول السابق لوجدنا أنه كلها متساوية وتعادل (٩)، أي أن:

$$\bar{س} = ٩ ، و = ٩ ، ل = ٩$$

هذا التوزيع التكراري يسمى توزيع طبيعي أو (Normal Distribution)

إذاً: إذا كان لدينا توزيع طبيعي فإن: $(\bar{س} = و = ل)$ والعكس بالعكس.

انتهت المحاضرة الثالثة