**محاضرات**

**ابستمولوجية العلوم الرياضية**

المحاضرة الأولى

**مدخل عام**

من المعلوم لدى دارسي الفلسفة أن هناك صلة وثيقة بين العلم والفلسفة, ففي الفكر القديم حينما كانت العلوم أجزاء من الفلسفة, كانت الصلة بين المبحثين صلة اهتمام من الفلسفة لتحليل وتبرير مبادئ العلوم. في الفكر الحديث أيضاً وبعد أن استقلت العلوم عن الفلسفة ظلت تلك الصلة قائمة وتعمقت بعدما نشأ في العلوم نفسها حركات نقد ذاتي لبنائها العلمي من داخله, أي محاولات لاختبار الأفكار والمبادئ التي يقوم عليها هذا البناء, فقدمت بذلك العلوم مشكلاتها التي تواجهها والموضوعات التي تثيرها إلى الفلسفة التي قامت بوظيفتها الدائمة في نقد المعرفة المتكونة في الأنساق العلمية للوقوف على حقيقة الأسس التي يقوم عليها وطبيعتها وقيمتها. فظهر للوجود مبحث جديد أخذ اسم "فلسفة العلوم" أو الابستمولوجية التي هي ملتقى الباحثين في المعسكرين العلمي والفلسفي ومجال التعاون المثمر بينهما.

وإذا كانت الأبحاث الابيستمولوجية, التي تعنى بالمعرفة عامة والمعرفة العلمية على وجه الخصوص, قد اكتسبت أهمية بالغة الحساسية في الوقت الحاضر بسبب الإسهامات العميقة التي قدمتها للعلم, فقد أصبحت من جهة أخرى الميدان الرئيس داخل الأبحاث الفلسفية المعاصرة. بل يمكن القول أن البحث الابستمولوجي في اهتمامه بالعلاقة المركبة بين العلم والفلسفة يسر لنا فهماً أعمق وأيسر للفلسفة المعاصرة, وبين بوضوح أن استيعاباً جاد لهذه الفلسفة وتمثلاً ملتزماً لتعاليمها المميزة ولمدارسها الكبرى لا يكون إلا من خلال استعادة المشكلات الرئيسة والأسئلة الملحة والحاجات الفكرية الحيوية التي فرضها العلم والتي نمت الفلسفة عبر الإجابة عنها وتطورت بتقديم الحلول لها.

ويكفي هنا أن نقدم مثالاً بسيطاً لنوضح به تعذر فهم الخطاب الفلسفي الحديث والمعاصر خارج إطار علاقته التضايفية مع الخطاب العلمي المعاصر له: فإذا حاولنا مراجعة أبرز المقولات وأهم التصورات التي سيطرت على الخطاب الفلسفي في تفسير العالم مثلاً قبل المرحلة الحديثة سنجد أنها تضم المفردات التالية: الماهية, الجوهر, العرض, المُثل, الفيض, الغاية, الوجود بالقوة, الوجود بالفعل, الصورة, الهيولى....إلخ. إذا انتقلنا الآن إلى الفلسفة الحديثة سنجد تراجعاً متزايداً لهذه الأفكار لصالح نوع مغاير جديد أخذ يحتل موقع الصدارة في الخطاب الفلسفي الحديثة مثل: المكان, الزمان, الجسم, الذرة, الحركة, الصفات الأولية والثانوية, القوانين الطبيعية منها والوضعية, الاستقراء, الاستنتاج...إلخ.

السؤال هنا هو كيف نفسر هذا التبدل الجذري الذي طرأ على المقولات والتصورات والأفكار في الخطاب الفلسفي؟ بكل بساطة يمكننا الإجابة على هذا السؤال بالطريقة التالية: إن المعاينة السريعة لما هو جديد يبين لنا أنها مستمدة و مشتقة كلها من العلم الحديث وخطابه ونظريات ومشكلاته. باختصار لقد فرضت الكوزمولوجيا العلمية الجديدة تدريجياً على الفلاسفة (والفلسفة) خطابها وتصوراتها ومقولاتها كما أملت عليها طبيعة المشكلات والمسائل والأسئلة التي ينبغي عليهم تناولها ومعالجتها وحددت ربما أيضاً نوع الأجوبة المقبولة. والواقع أن المحاضرات التي خصصناها لهذا المبحث ستتناول مثالاً واضحاً لبُعدي هذه العلاقة بين العلم والفلسفة من خلال مناقشتنا لعلاقة الفلسفة بأحد أهم علوم العصر وهوعلم الرياضيات.

لكن قبل البدء في ذلك لابد لنا من تمييز الدراسات الابيستمولوجية في التفكير الفلسفي بخصوص العلاقة بين العلم والفلسفة. فقد قلنا أن الأبحاث الابستمولوجية تتناول قضايا المعرفة والمعرفة العلمية, وهنا لا بد من التفريق بينها وبين فلسفة المعرفة التي تميزت بها الفلسفة الحديثة بالمقارنة مع الفلسفة القديمة التي كانت في معظمها فلسفة في الوجود؛ فلا بد من التفريق بين فلسفة المعرفة كما دشنها ديكارت وحدد موضوعها وشيد صرحها كانط, وبين الدراسات الابستمولوجية المعاصرة التي نشطت عقب الثورة العلمية الحديثة التي شهدها العقد الأول من القرن العشرين. إنه فرق كبير يعكس البون الشاسع بين الفيزياء والرياضيات الكلاسيكية التي دشنها كلاً من غاليليو وديكارت و لايبنتز ونيوتن من جهة, وبين الفيزياء والرياضيات الحديثة التي أرشى دعائمها كلاً من ماكس بلانك وأينشتين (فيزياء), وجورج كانتور وديفيد هلبرت (رياضيات) من جهة آخرى. إن الدراسات الإبستمولوجية تنتمي إلى الفكر المعاصر على نحو يفصلها عن نظرية المعرفة بمعناها الكلاسيكي وعن تداخل العلاقة بين العلم والفلسفة كما شهدناه في كثير من المذاهب الفلسفية.

لتوضيح هذه القضايا والبرهنة على التقارير التي أعلنتها حول علاقة الفلسفة بالعلم سنتناول في البحث موضوع الفكر الرياضي وتطوره من اليونان إلى الوقت الحاضر, مركزين على القضايا التي تتناولها فلسفة الرياضيات, رابطين بين هذه القضايا وتطور الفكر العقلاني بحيث يفضي بنا هذا الرصد إلى الوقوف على المعالم الرئيسة للعقلانية المعاصرة والمفهوم الجديد الذي تشتقه عن الحقيقة. ثم سنقف عند بعض القضايا المنفردة التي تلقي الضوء على كيفية معالجها بعض القضايا الرياضية داخل إطار التفكير الابستمولوجي مثل قضية البرهان الرياضي, قضية المعاني الرياضية, ووظيفة الرياضيات وأثرها في العلوم.

**تاريخ الرياضيات موضوعها وفروعها**

حقيقة أنه لا علم أكثر عراقة في تاريخه من الرياضيات, فقد أخذ هذا المبحث صفة العلم اليقيني منذ أقدم مفكريه "فيثاغورث". وإذا قلنا أننا سنتناول هذا التاريخ بعين الاعتبار فإننا مع ذلك غير معنيين هنا بالتأريخ للرياضيات ككشوف وإنجازات. وإن كنا سنعرض بين الحين والأخر لهذا الكشف أو ذاك الإنجاز بحسب ما تتطلبه مادة البحث التي ترصد تطور الفكر الرياضي (أي فكر الرياضيين وفيما يفكرون) فإن ما نرجوه من وراء ذلك ليس الفكر الرياضي بذاته, بل نموذج المعقولية الذي يرسم معالمه بوضوح. فليس تتبعنا لتطور الفكر الرياضي إلا تتبعاً لتطور المعقولية والفكر العقلاني من أفلاطون إلى العصور الراهنة. إنه تتبع لنشوء وتطور هذه المسائل وتحليلها تحليلاً يبرز قيمتها الابيستمولوجية ودلالتها الفلسفية. في هذا التتبع لتطور الفكر الرياضي سنحاول تناول مرحلتين أساسيتين:

**المرحلة الأولى** وتتمثل فيما سنسميه عادة بالرياضيات الكلاسيكية التي احتوت نظريتين كبيرتين حول موضوع ومنهج الرياضيات: الأولى جاءت في الفكر اليوناني تحت اسم الرياضيات التأملية والعقلانية الفلسفية التي دعمتها, أما الثانية فقد تأخرت حتى الفكر الحديث وصاغت الرياضيات الانشائية وعقلانيتها الجديدة.

**المرحلة الثانية**  وتشمل المرحلة الانتقالية بما حملته من تطورات وأزمات داخل التفكير والبنيان الرياضيين وصولاً إلى تحقيق نقلة نوعية عبر طرح "أزمة أسس الرياضيات" التي خلقت نظريات ابستمولوجية جديدة حول طبيعة ومنهج الفكر الرياضي أسست للرياضيات المعاصرة وفلسفتها الجديدة.

المحاضرة الثانية

**المرحلة الأولى**

**الرياضيات الكلاسيكية**

عندما نريد تمييز علم عن أخر نقوم عادة بذلك استناداً لموضوعه ومنهجه المتناسب مع هذا الموضوع. لكن عندما نريد تميزت الرياضيات الكلاسيكية عن الرياضيات الحديثة, فإننا نجد أن ما يميز بينهما هو أن الأولى تميز بين الموضوع والمنهج في حين تدمج الثانية بينهما.

في الرياضيات الكلاسيكية موضوع الرياضيات هي علم الكم والمقدار.المقدار : كل ما هو قابل للزيادة والنقصان

تبحث الرياضيات فقط في المقادير القابلة للقياس أي المقادير الكمية وهي نوعان:

1ـ) المقادير الكمية المشخصة: كالمكان الذي هو موضوع علم الهندسة والحركة موضوع علم الميكانيكا وتسمى هذه المقادير بالكم المتصل.

2ـ) المقادير الكمية المجردة: كالعدد الذي هو موضوع علم الحساب, وتسمى هذه المقادير بالكم المنفصل

في التطور الفلسفي الكلاسيكي يأخذ هذان النوعان شكل معطيات أولية تمثلها "الكائنات الرياضية", أي أفكار تشكل المحتوى الخاص للعقل, هذا المحتوى الخاص يأخذ تارة شكل أفكار كلية كالمثل الأفلاطونية ويأخذ تارة أخرى شكل الأفكار الفطرية التي عبر عنها ديكارت. ونظراً لطبيعة هذا الموضوع كان المنهج الرياضي الكلاسيكي والفكر الفلسفي عموماً يعولان على الحدس والاستنتاج: حدس الحقائق البديهية والأفكار الفطرية, واستنتاج حقائق جديدة من تلك. وذلك بدعوة أن الحدس يمد الرياضيات بالخصوبة أما الاستنتاج فيمنحها التماسك المنطقي. ومن هنا يمكن لنا الحديث داخل المرحلة الكلاسيكية عن نظريتين أساسيتين: الأولى تعود إلى التفكير اليوناني الذي صاغ الفكر الرياضي ضمن إطار تأملي فلسفي وحدسي فأنتج الرياضيات التأملية وعقلانيتها. أما النظرية الثانية فتأخرت حتى بداية العصور الحديثة وخاصة مع ظهور علم الجبر الذي فرض تحولاً جوهرياً في فهم طبيعة ومنهج الرياضيات لتصبح الرياضيات وشكل المعقولية الذي تمثله إنشائية من فعل الذات العاقلة بعد أن كانت تأملية مفروضة على هذه الذات.

**أولاً:) الرياضيات التأملية وعقلانيتها عند اليونان**

تروي لنا كتب التاريخ أن حضارات الشرق القديم, خاصة منها الحضارة المصرية والحضارة البابلية, عرفت أشكال مختلفة من التفكير الرياضي كعلم الحساب والهندسة وعلم المساحة, فتاريخ هيرودوت مثلاً يقول لنا إن ميلاد الهندسة كان في مصر القديمة نتيجة لفيضانات النيل. فقد كانت الأراضي آنذاك تعود بكليتها إلى فرعون الذي كان يؤجرها مقابل عائد على محاصيلها, إلا أن فيضانات النيل غيرت مقاس الحصص المتساوية بالأصل, مما استوجب وجود مهندس لقياس تناقص حجم القطعة وحساب التناقص النسبي للعائد. بالإضافة إلى ذلك عرف المصريون العمليات الأربعة في الحساب وقاموا ببعض العمليات المعقدة نوعاً ما.

كذلك تدلنا بعض الأبحاث الجديدة أن الرياضيات كانت متقدمة عند البابليين, فقد استخدموا الحساب والهندسة في دراسة الكواكب والنجوم وحساب الزمن وفي تنظيم الملاحة والفلاحة شؤون الري. إلا أن هذه الأشكال بقيت محصورة في الإطار التطبيقي العملي الناشئ أصلاً عن ضغط الحاجات الاقتصادية والاجتماعية والحياتية عموماً, مما أجل ظهور الرياضيات كعلم نظري بحت إلى أيام اليونان الذين نقلوا الممارسة الرياضية من عالم المحسوس إلى عالم المعقول, من التطبيق العملي إلى التفكير الميتافيزيقي الذي يبحث بما هو ثابت وأبدي لا ما هو متغير ومؤقت.

لكن لم تكن هذه النقلة النوعية في الفكر اليوناني بخصوص الرياضيات مباشرةً ودفعةً واحدةً, وذلك لأنها لم تحدث بالمعنى الدقيق إلا في القرن الثالث قبل الميلاد على يد أفلاطون. فعلى الرغم من اهتمام اليونان بالرياضيات وإبداعهم نظرياتها ونظمهم لأولى قواعدها وقوانينها إلا إنهم بقوا حتى زمن أفلاطون لا يميزون بينها وبين مهارات أخرى (كالنجارة والحدادة) عندما يريدون تعداد العلوم في عصرهم. وقد وثقت محاورات أفلاطون هذه الواقعة على لسان ثياتيتوس عندما أراد الإجابة على سؤال سقراط عن "ماهية العلم" بالتالي: "يبدو لي أن العلوم هي ما يمكننا تعلمه عند ثيودور, الهندسة والعلوم الأخرى التي عددتها للتو و مهنة الحذّاء أيضاً ليست شيء أخر غير العلم بالإضافة إلى تقنيات الحِرَف الأخرى مجتمعة" بحسب هذا النص العلم هو ما يمكن تعلمه سواء عند الرياضي أو عند الحِرفي, أما العلوم الأخرى التي أتى على تعدادها سقراط كما أشار ثياتيتوس فهي الحساب, علم الفلك, الموسيقى أي رياضيات ذلك العصر. وما يمكن ملاحظته من هذا النص هو أن الفرق الجوهري بين عمل المهندس وعمل الحذّاء لم يكن واضحاً على نحو كافي في القرن الثالث قبل الميلاد, فالرياضيات تعلّم مثل حرفة الحذّاء, وهي قبل كل شيء مهارة عملية, مهارة مساح و حاسب. في الواقع إن صياغة مفهوم الرياضيات كعلم بالمعنى الذي نفهمه اليوم كان بجزء كبير منه ما سيفعله أفلاطون لاحقاً, لأن ظهور هذا المفهوم ارتبط بصورة وثيقة بتفكيره الفلسفي.

تبدأ القصة في محاورة مينون[[1]](#footnote-1) وهي المحاورة التي عرض فيها أفلاطون نظريته في المعرفة. ما يميز هذه المحاورة هو أنها على خلاف المحاورات السابقات (حيث كان الطب هو النموذج الذي استخدمه أفلاطون لمناقشة المعرفة الأخلاقية والسياسية), أعتمد أفلاطون فيها للمرة الأولى التفكير الرياضي السائد في عصره نموذجاً للمعرفة وأداة للبرهنة على نظريته في المعرفة التي صاغها بقالب أسطورة (تقول أن المعرفة تذكر), و ذلك من خلال تناوله مشكلة مضاعفة المربع, التي أراد بها أن يبرهن لـ مينون كيف استطاع الشاب الصغير تذكر حل مشكلة رياضية مستخرجاً علمه من ذاته بالرغم من جهله بالهندسة.

والواقع أن ما يعنينا في هذا الطرح هو هذا الأسلوب الجديد الذي أعتمده أفلاطون في البرهان على نظريته, لأن مراجعة هذا النموذج تبين لنا أن أفلاطون طور أسلوباً جديداً في التفنيد يقترب كثيراً مما يعرف في الرياضيات بـ"برهان الخلف أو برهان نقض الفرض". وإذا كنا غير معنيين هنا بالبرهان الذي يقدمه أفلاطون لأطروحة "المعرفة تذكر" فهو مع ذلك يكشف لنا قضيتين هامتين في بحثنا: أولاهما أنها تفصح عن المفهوم الذي كونه أفلاطون عن العلم, فللمرة الأولى في تاريخ الفكر يمكننا أن نقول مع أفلاطون أن "لا علم بدون استدلال وبدون برهان", أما القضية الثانية فهي أن الرياضيات كمعرفة لاأمبيريقية مؤسسة على الاستدلالات هي نموذج هذا العلم.

لكن ما الذي يجعل من الرياضيات نموذجاً للعلم عند أفلاطون؟

الحقيقة أن الثابت في كل المحاورات هو معارضة أفلاطون بين المعرفة الحقيقية التي موضوعها نوع ومجال الفكر , والرأي البسيط الذي موضوعه المحسوس. فهو يرى أن كل ما هو مرئي ومحسوس متعدد وغير مستقر ولا يمكن أن يكون موضوع معرفة حقيقية, أما ما يعرفه العقل بذاته دون واسطة الإحساس فهو وحده موضوع معرفة حقيقية, وبالتالي لم يكن اعتبار أفلاطون الرياضيات نموذج المعرفة الحقيقية إلا لعدم احتوائها على شيء أمبيريقي. والواقع أن هذا ما حاول أفلاطون شرحه في قوله: إن "الرياضيين يستخدمون الأشكال المرئية ويقومون باستدلالاتهم على هذه الأشكال, لكن ليس إليها يفكرون بل إلى ما هي شبيهه: مثلاً يقيمون استدلالاتهم على المربع بذاته وليس على ذلك الذي يخط ويرسم."

إن الرياضيات بهذا المعنى هي التي تقود بشكل طبيعي إلي العقل بمساعدة بعض الإحساسات التي ترافق العقل وصولاً للحقيقة الموجودة في" عالم المثل", معها يتخلص الفيلسوف من الصيرورة لأن عليه الاهتمام بالجوهر. إنها تجبر النفس على التعلم بواسطة العقل وحده. على هذا النحو يخلص أفلاطون في جمهوريته لنتيجة التالية : "ليست مهمة العلم الرياضي خدمة التجار في عمليات البيع والشراء, كما يعتقد الجهّال, بل تيسير طريق النفس في انتقالها من دائرة الأشياء الفانية على تأمل الحقيقة الثابتة والخالدة."

لقد أصبحت مهمة الرياضيات إذن جذب النفس نحو الثابت والمطلق والكامل بقطع النظر عن محاكياتها الحسية. فموضوع الرياضيات **ماهيات ذهنية تتمتع بوجود موضوعي مستقل وكامل**. فالعدد والمربع والمثلث والدائرة و كل الكائنات الرياضية الأخرى هي كائنات كاملة في ذاتها أما صورها الحسية فيعتريها النقص دائماً.

بهذا المعنى يمكننا القول أن أفلاطون هو من فرض المنظور الجديد الذي يرى في الرياضيات علماً نظرياً بحتاً وينقل الممارسة الرياضية من عالم المحسوس إلى عالم المعقول, من التطبيق العملي إلى التفكير الميتافيزيقي الذي يبحث بما هو ثابت وأبدي لا ما هو متغير ومؤقت.

لكن داخل هذا المنظور الجديد الذي جعل من الرياضيات علماً نظرياً خالصاً كانت الاهتمام الأول في هذا العلم منصب على كمال وبساطة وتناسق وجمال الكائنات الرياضية بكونها صفات ذاتية لها, الأمر الذي دفع الفكر اليوناني باتجاه الأبحاث التأملية المحضة التي تهتم بجمال الاكتشافات وتناسق العلاقات لدرجة أضفوا فيها على الأعداد والأشكال طابعاً سحرياً وحصروا دراساتهم في الموضوعات التي يمكن إضفاء هذه الصفة عليها وأبعدوا من اهتماماتهم الموضوعات الرياضية الأخرى التي يكتنف تصورها بعض التشويش والنقص. مما خلق عائقاً أمام الفكر الرياضي اليوناني منعه من استكمال عملية التطوير اللازمة.

ويكفي أن نذكر هنا الدور الذي لعبه مثل هذا الاتجاه في إعاقة إدراك الرياضيين اليونان أهمية اكتشافهم لنوع جديد من الأعداد هي الأعداد الصم ؛ إي الأعداد التي لا تقبل القياس وهي الأعداد التي عرفت منذ ذلك الوقت بالأعداد اللاعقلية (التي لايتصورها العقل تمام التصور) وتسمى اليوم بالأعداد الجذرية.

أما قصة هذه الأعداد فتعود إلى فيثاغورث الذي أراد أن يطبق نظريته المعروفة باسمه على أشكال مختلفة من المثلثات القائمة الزاوية (تقول النظرية: إن مربع الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمين) ولكنه فوجئ بأن وتر المثلث القائم الزاوية يكون في بعض الحالات غير قابل للقياس بوحدات صحيحة. فلو كان لدينا مثلث قائم الزاوية وضلعاه المجاوران يساويان على التوالي 3, 4 فإن مربع وتره يساوي : 23 + 24 = 9 + 16 = 25√ = 5 وهو عدد صحيح "معقول" يمكن تصوره بتمامه, ولكن إذا كان ضلعا المثلث المذكور يساويان على التتالي 5, 7 فإن مربع الوتر يساوي 25 + 27 = 25 + 49 = 74√ وهو عدد غير صحيح بل يقع بين 8 و 9 على اعتبار أن 82 = 64, 29 = 81 إذن إن مربع الوتر في هذا المثلث لا يقبل القياس بوحدات صحيحة لأنه يساوي 8 مع كسور لا نهاية لعدد أرقامها بعد الفاصلة, ولذلك لا يمكن أن يتصوره العقل بتمامه. هذه الواقعة دفعت الفيثاغورثيين ليس فقط لعدم اعترافهم بغير الأعداد الصحيحة وعدم العناية بغيرها, بل دفعت بالفكر اليوناني لإهمال دراسة الحساب لصالح الاقتصار على الدراسات الهندسية, أعراضهم عن الأبحاث المعقدة التي تطرحها التجربة وظلوا مسجونين في عالمهم الذهني متأملين الأفكار والمفاهيم البسيطة التي يدركها العقل بسهولة الحدس.

وإذا كان من الممكن -كما يرى البعض- استثناء أعمال كلاً من أرسطو واقليدس بوصفها أرست الطابع المنطقي في تشييد صروحهم الرياضية النظرية وإرسائهم البرهان الرياضي على قواعد منطقية صارمة, إلا أننا لا نستطيع إغفال الطابع الحدسي المفرط الذي ساد التصورات الرياضية والأفكار الفلسفية للعقلانية اليونانية وأعاق تطورهما, حتى داخل الصروح المنطقية عند اقليدس:

منطق العلاقات المكانية عند اقليدس وارخميدس حيث توضع التعريفات الأولية وتصاغ المسلمات والبديهيات استناداً للحدس المكاني, كما لا يمكن قبول الكثير من براهينه إلا بشهادة الأشكال والصور الهندسة المرتبطة بالحدس المكاني.

خلاصة القول بقي الفكر الرياضي اليوناني يتعامل مع موضوعات الرياضيات ككائنات مستقلة كاملة ومعروفة لا نحتاج إلا إلى تذكرها تارة, وتأمل خصائصها وتوكيدها وتسجيلها تارة أخرى. وبالمقابل بقي الفكر العقلاني اليوناني يتناول هذه الكائنات بوصفها المعطيات أولية التي تشكل المحتوى الخاص للعقل الذي تارة يتناولها بالحدس (حدس الأعداد والأشكال) وتارة ينظمها مع غيرها من المعطيات والحقائق الأخرى عبر الاستدلال والاستنتاج المنطقي. على هذا النحو أنتج اليونان الرياضيات التأملية و كما صاغ عقلانيتها الفلسفية (المؤسسة على هذا النموذج الرياضي) التي تخصصت في بحثها عن محتوى عقلي ثابت وأزلي.

1. ـ مينون هي أقدم النصوص التي وصلت إلينا والمخصصة للرياضيات في اللغة الإغريقية. وقد كتبت قبل مينون عدة مؤلفات عن الرياضيات, ولاسيما مؤلفات ديموقريدس و إبوقراط مؤلف كتاب المبادئ الأولى . لكن إياً من هذه النصوص لم يحفظ لنا. [↑](#footnote-ref-1)