جامعة ... كلية العلوم قسم الرياضيات

حل فحص الفصل الأول لطلاب السنة الثالثة رياضيات
الفصل الأول من العام الدراسي 2024/2025

عدد الصفحات: 6
مدة الفحص: ساعتان

السؤال الأول: (5/4 درجة)

أجب عن الأسئلة الآتية:

[1] ليكن $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة. اكتب مبدأ الاستقراء وشرط انقطاع السلاسل المتناقصة. ثم أثبت أن المجموعة المرتبة إذا تحقق فيها مبدأ الاستقراء فإنها تحقق شرط انقطاع السلاسل المتناقصة. (1/2)

مبدأ الاستقراء: ليكن Θ خاصية. إذا كان جميع العناصر الأصغر تماماً من $a \in P$ تحقق الخاصية Θ فإن a يحقق Θ، وإذا كان تحقق الخاصية Θ للعدد a يؤدي إلى تحقق Θ لكل $x < a$ ($x \in P$)، عندئذ جميع عناصر P تحقق الخاصية Θ.

شرط انقطاع السلاسل المتناقصة:

كل سلسلة متناقصة $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ من عناصر P تنقطع أي يوجد دليل n بحيث $a_n = a_k$ حيث $k > n$ أي $a_n = a_{n+1} = \cdots$

إثبات الاستنباط: ~~لنفرض عكس الخاصية~~

لنفرض عكس عناصر P خاصية Θ بالشكل:

نقول عن عنصر $b \in P$ إنه يحقق Θ إذا كانت كل سلسلة متناقصة من عناصر P تبدأ بالعنصر b تنقطع

خطوة البدء: لنبرهن أن جميع العناصر الصغرى في P تحقق Θ.

ليكن $d \in P$ عنصراً أصغرياً، عندئذ أي سلسلة متناقصة تبدأ بالعنصر d تكون مؤلفة من عنصر واحد فقط هو d بالتالي تكون منقطعة.

خطوة الاستقراء: ليكن $a \in P$، لنفرض أن كل $x < a$ تحقق Θ.

لنبرهن أن a تحقق Θ. ليكن $(*)$ $a \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ سلسلة متناقصة من عناصر P.

- إذا كانت المتباينة محققة في كل مكان، عندئذ السلسلة $(*)$ تنقطع.
- نفرض أن أول حدث في السلسلة $(*)$ المتباينة فيه غير محققة هو الحد ذو الرقم (i)، عندئذ: $a = a_1 = \cdots = a_{i-1} > a_i \geq a_{i+1} \geq \cdots$

حسب الفرض بما أن $a_i < a$ فإن a_i يحقق Θ.

هذا يبين أن السلسلة المتناقصة $a_i \geq a_{i+1} \geq a_{i+2} \geq \cdots$ تنقطع

بالتالي السلسلة $(*)$ تنقطع.

من خطوتي البدء والاستقراء نجد أن جميع عناصر المجموعة P تحقق الخاصية Θ بالتالي جميع السلاسل المتناقصة من عناصر P تنقطع.

برهنة المثال الثاني:

لتكن G زمرة. لتكن H و K زمرتين جزئيتين من G إذا كانت K ناظمية في G فإن:

$$\frac{HK}{K} = \frac{KH}{K} = \frac{\langle H \cup K \rangle}{K} \simeq \frac{H}{H \cap K}$$

الإثبات: بما أن K ناظمية في G فإن $H.K$ زمرة جزئية من G

لبرهان أن: $\frac{HK}{K} \simeq \frac{H}{H \cap K}$

لنعرف التطبيق:

$$f : H \longrightarrow \frac{HK}{K}$$
$$f(h) = hK \quad \forall h \in H$$

إن f تشاكل

$$\forall a, b \in H : f(ab) = (ab)K = (aK)(bK) = f(a).f(b)$$

f غامر:

$$\forall \bar{x} \in \frac{H.K}{K} : \exists x \in H.K : \bar{x} = xK$$

بما أن $x \in H.K$ فإنه يوجد $h \in H, k \in K$ بحيث

$$x = hk$$
$$f(h) = h.K = \bar{x}$$

$$\bar{x} = xK = (h.k)K = h(k.K) = hK = f(h)$$

ومنه حسب مبرهنة التماثل الأولى نكتب:

$$\frac{H}{\ker(f)} \simeq \frac{H.K}{K}$$

لنثبت أن: $\ker(f) = H \cap K$

$$\ker(f) = \{h \in H : f(h) = K\}$$

$$x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = K \Rightarrow xK = K \Rightarrow x \in K$$

$f(x) = xK$

بما أن $x \in \ker(f) \subset H$ فإن $x \in H$ ومنه $x \in H \cap K$

أي أن $\ker(f) \subset H \cap K$

ليكن $y \in H \cap K$ عندئذ $y \in H$ و $y \in K$

إن $f(y) = yK$ بما أن $y \in K$ فإن $yK = K$

$f(y) = K$ ومنه

أي أن $H \cap K \subset \ker(f)$

~~لتكن $(G, .)$ زمرة. لتكن H زمرة جزئية من G. أثبت أنه إذا كان $aHa^{-1} = H$ لكل $a \in G$ فإن H ناظمية في G.~~

$(G,.)$ زمرة. لتكن A و B جزئيتين من G.
$A.B$ جزئية من G فإن $\langle AUB\rangle = AB$ صحيحة كانت

$\forall x \in A.B \ \exists a\in A, b\in B: \ x = ab$

$a, b \in AUB \subseteq \langle AUB\rangle$ بما أن $\langle AUB\rangle$ زمرة فإن $x = a.b \in \langle AUB\rangle$

(7) $A.B \subseteq \langle AUB\rangle$ وهذا يبرهن أن

$\forall a\in A \quad a = a.e \in A.B \Rightarrow A \subseteq A.B$
$\forall b\in B \quad b = e.b \in A.B \Rightarrow B \subseteq A.B$
AUB جزئية من G تحوي $\langle AUB\rangle$ أصغر زمرة جزئية من G فإن $\langle AUB\rangle \subseteq A.B$

$\Rightarrow AUB \subseteq A.B$ بما أن $A.B$ زمرة جزئية من G فإن

ومنه $A.B = \langle AUB\rangle$

[4] لتكن H زمرة من $(G,.)$. أثبت أنه إذا كان H زمرة جزئية من G. فإن $a^{-1}Ha \subseteq H$ لكل $a\in G$

$\forall x \in Ha \ \exists h\in H: \ x = ha = eha = a.(a^{-1}.h.a) \in aH$
$\Rightarrow Ha \subseteq aH$

(6) $x \in aH \Rightarrow \exists h\in H: \ x = ah = (a^{-1})^{-1}.h = (a^{-1})^{-1}.he$
$= ((a^{-1})^{-1}.h.a^{-1}).a$
$= (b^{-1}.h.b)a \in Ha$
$\Rightarrow aH \subseteq Ha$

(10) $\forall a\in G \ aH = Ha$ ومنه H ناظمية في G.

[5] لتكن G زمرة و H مجموعة جزئية منتهية وغير خالية من G بحيث:
$\forall a,b\in H: \ a.b\in H$
أثبت أن H زمرة جزئية من G.

ستكون H زمرة جزئية من G يكفي أن نتحقق من:
$\forall a\in H: \ a^{-1}\in H$
بما أن $H \neq \emptyset$ فإنه يوجد $a\in H$. نميز حالتين:
- عندئذ $a = e$، $a^{-1} = e^{-1} = e \in H$
- عندئذ $a \neq e$ $a, a^2, a^3, \ldots \in H$

بما أن H منتهية فإنه يوجد $n, m\in\mathbb{N}^*$ حيث $a^n = a^m$ $n \neq m$
ومنه
فرضا $n > m$ $a^n.a^{-m} = a^m.a^{-m}$
عندئذ $n-m > 0$
~~$a^{n-m} = a^0 = e$~~
نضرب الطرفين في a^{-1}
$a^{n-m-1} = a^{-1}$
$a.a^{n-m-1} = e \Rightarrow a^{-1} = a^{n-m-1}$
بما أن $a\neq e$ فإن $n-m > 1$ ومنه $n-m-1 > 0$
$a^{n-m-1} \in H$ أي $n-m-1 > 0$

٤) لتكن $\mathbb{Z}$ مجموعة الاعداد الصحيحة. لتكن R علاقة تابعة معرفة على $\mathbb{Z}$ بالشكل الآتي:

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}: \quad aRb \Leftrightarrow a-b\in 14\mathbb{Z}$$

أثبت أن R علاقة تكافؤ، ثم أوجد مجموعة التكافؤ الناتجة

$$[2]\ ,\ [13]\ ,\ [0]$$

$\forall a\in\mathbb{Z}: \ a-a=0\in 14\mathbb{Z} \Rightarrow aRa$

$\forall a,b\in\mathbb{Z}: \ aRb \Rightarrow a-b\in 14\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a-b=14q : q\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow b-a=-14q : q\in\mathbb{Z} \Rightarrow bRa$

(10)

$\forall a,b,c\in\mathbb{Z}: \ aRb \ . \ bRc$

$\Rightarrow a-b\in 14\mathbb{Z}, \ b-c\in 14\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a-b=14q_1 \ , \ b-c=14q_2 \ : \ q_1,q_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a-c=(a-b)+(b-c)=14q_1+14q_2=14(q_1+q_2)\in 14\mathbb{Z}$

بما أن R انتقالية متناظرة متعدية فإن R علاقة تكافؤ

$$[0]=\{a\in\mathbb{Z}: aR0\}=\{a\in\mathbb{Z}: a-0\in 14\mathbb{Z}\}=14\mathbb{Z}$$

$$[1]=\{a\in\mathbb{Z}: aR1\}=\{a\in\mathbb{Z}: a-1\in 14\mathbb{Z}\}=\{a\in\mathbb{Z}: a-1=14q : q$$

$$=1+14\mathbb{Z}$$

$$[2]=2+14\mathbb{Z}$$

لتكن $\mathbb{Z}_{14}$ [2] زمرة الجمع بالقياس 14. أوجد رتبة كل عنصر من العناصر

$1, 2$ في $\mathbb{Z}_{14}$.

$-1=14-1=13, \quad -2=14-2=12, \quad -3=14-3=11$

رتبة أي عنصر $\neq 0$ في $\mathbb{Z}_{14}$ هي 2 أو 7 أو 14

(5)

$2.1=2, \ 7.1=7, \ 14.1=0 \Rightarrow \boxed{o(1)=14}$

$2.2=4, \ 7.2=0 \Rightarrow \boxed{o(2)=7}$

$2.3=6, \ 7.3=7 \Rightarrow \boxed{o(3)=14}$

ع الزمرة الجزئية من الزمرة Z_{14} ومرتبتها.

والجزئية من الشكل $\langle \frac{14}{k} \rangle$ حيث k قاسم 14.

1 قاسم $\langle \frac{14}{1} \rangle = \langle 14 \rangle = \langle 0 \rangle = \{0\}$

2 قاسم $\langle \frac{14}{2} \rangle = \langle 7 \rangle = \{0,7\}$

7 قاسم $\langle \frac{14}{7} \rangle = \langle 2 \rangle = K$

14 قاسم $\langle \frac{14}{14} \rangle = \langle 1 \rangle = Z_{14}$

2+3 / 9

[4] لتكن $(U(16),0)$ زمرة الضرب بالمقاس 16. أوجد عناصر الزمرة $U(16)$.

$U(16) = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$

4+5 / 10

[5] أوجد رتبة كل عنصر من عناصر الزمرة $U(16)$.

$o(1)=1$

$3^0=1$, $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=11$, $3^4=1 \Rightarrow o(3)=4$

$5^0=1$, $5^1=5$, $5^2=9$, $5^3=13$, $5^4=1 \Rightarrow o(5)=4$

$7^0=1$, $7^1=7$, $7^2=1 \Rightarrow o(7)=2$

$o(9)=o(3^2)=o(3^{4-2})=2 \Rightarrow o(9)=2$

$o(11)=o(3^3)=o(3^{4-1})=o(3)=4 \Rightarrow o(11)=4$

$o(13)=o(5^3)=o(5^{4-1})=o(5)=4 \Rightarrow o(13)=4$

$15^0=1$, $15^1=15$, $15^2=1 \Rightarrow o(15)=2$

[6] علل الزمرة $U(16)$ دورية ولماذا؟

نلاحظ أنه $\forall a \in U(16) : o(a) \neq 8 = (U(16):1)$ بالتالي ليست دورية.

[7] أوجد مقلوب العنصر (5) في الزمرة $U(16)$.

6+7+8 / 8

$5 \cdot 13 = 1 \Rightarrow 5^{-1} = 13$

[8] أوجد عناصر الزمرة الجزئية $H = U_4(16)$.

$H = \{1,5,9,13\}$

[9] بين أن H ناظمية في $U(16)$ ثم أوجد عناصر زمرة القارج $\frac{U(16)}{H}$.

9+10 / 8

بما أن $U(16)$ تبديلية فإن H ناظمية في $U(16)$ بالتالي $\frac{U(16)}{H}$ دورية.

$H = \{1,5,9,13\}$, $3H = \{3,15,11,7\} \Rightarrow \frac{U(16)}{H} = \{H, 3H\}$

[10] بين أي من الزمر الآتية متماثلة:

Z_{18} , $Z_6 \oplus Z_3$, $Z_2 \oplus Z_9$, $Z_9 \oplus \frac{U(16)}{H}$

$Z_6 \oplus Z_3$ ليست دورية (مرتبة 18) $\Leftarrow gcd(6,3) \neq 1$

$Z_2 \oplus Z_9$ دورية (مرتبة 18) $\Leftarrow gcd(2,9)=1$

$Z_9 \oplus \frac{U(16)}{H}$ دورية مرتبة 18 $\Leftarrow gcd(9,2)=1$ و $\frac{U(16)}{H}$ دورية مرتبة 2

$\Rightarrow Z_{18} \cong Z_2 \oplus Z_9 \not\cong Z_9 \oplus \frac{U(16)}{H}$

(10 درجات)

$(G,*)$ زمرة حيث $G=\{e,a,b,c\}$، والعملية $*$ معرفة كالآتي:
العنصر الحيادي هو e ومقلوب a هو نفسه، ومقلوب b هو c.

المطلوب: ① تشكيل جدول العملية $*$ المعرفة على الزمرة G

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

4

السطر الأول والعمود الأول ينتجان من كون e عنصر حيادي

بما أن مقلوب a هو a فإن $a*a=e \Rightarrow a^2=e$

بما أن مقلوب b هو c فإن $c*b=e$ و $b*c=e$

~~$a*b=e$~~ لأنه: $a*b=c$ لأن مقلوب a هو a

وإذا فرضنا جدلاً أن $a*b=a$ فإن $a*(a*b)=a*a=e$ و هذا غير صحيح $\Leftarrow b=e$

~~$a*(a*b)=b$~~ وإذا فرضنا جدلاً أن $a*b=b$ فإن $(a*b)*c=b*c$ و منه $a=e \Leftarrow a*(b*c)=e$ و هذا غير صحيح

نتابع بقية عناصر الجدول حيث لا يمكن التكرار في السطر والعمود.

② ما هي رتبة العنصر b في الزمرة G وما هي رتبة G؟

بما أن $b\neq e$ عنصر في زمرة مرتبتها 4 فإن رتبة b إما 2 أو 4

نلاحظ من الجدول أن $b*b=a\neq e$ بالتالي $o(b)=4$

③ هل الزمرة G تماثل $U(8)$ ولماذا؟

$U(8)=\{1,3,5,7\}$

$3^2=1$ ، $5^2=1$ ، $7^2=1$

نلاحظ أن $U(8)$ لا تحوي عنصر رتبته 4، بينما G تحوي b مرتبته 4

إذن هما غير متماثلتان.

④ هل الزمرة G تماثل $U(7)$ ولماذا؟

$U(7)=\{1,2,3,4,5,6\}$

نلاحظ أن $(G:1)=4\neq(U(7):1)=6$ إذن هما غير متماثلتان

السؤال الثالث (3)

أوجد جميع الزمر الجزئية للزمرة $\langle \frac{14}{k} \rangle$ حيث k قاسم لـ 14.

$\langle \frac{14}{1} \rangle = \langle$