(6) $\mu(t) = \exp\left[\int p(t)\,dt\right] = \exp[P(t)]$

$= \exp[\ln(t)] = t$

نضرب المعادلة التفاضلية بـ $\mu(t)=t$:

$$x' + t\cdot\frac{1}{t}\cdot x = t\cdot\frac{\cos t}{t}$$

$$t\cdot x' + x = \cos t$$

$$\frac{d}{dt}(t\cdot x)' = x + t\cdot x' \Rightarrow \frac{d}{dt}(t\cdot x) = \cos t$$

نضرب بـ dt ونكامل:

$$\int \frac{d}{dt}(t\cdot x)\cdot dt = \int \cos t\,dt$$

$$t\cdot x - \int \cos t\cdot dt = \sin t + c \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{\sin t + c}{t}, \quad t \neq 0$$

$$x(1) = 2 \Rightarrow \frac{\sin(1)+c}{1} = 2 \Rightarrow c = 2 - \sin(1)$$

بالتالي:

$$x(t) = \frac{\sin t + 2 - \sin(1)}{t}$$

(2)

$$V_1 = \ln(u) + \frac{1}{u} - \frac{1}{2u^2} - \ln|1+u| = -t + e^t - \frac{1}{2}e^{2t} - \ln(1+e^{-t})$$

$$V_2 = -\int \frac{du}{u^2(1+u)} = \int du \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u+1}\right)$$

$$= \ln(u) + \frac{1}{u} - \ln(1+u) = -t + e^t - \ln(1+e^{-t})$$

الحل العام:

$$x_p = x_1 \cdot V_1 + x_2 \cdot V_2$$

$$x_p = e^{-2t}\left[e^t - t - \frac{e^{2t}}{2} - \ln(1+e^{-t})\right] +$$

$$e^{-t}\left[e^t - t - \ln(1+e^{-t})\right]$$

ج- بما أن الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + e^{-2t}\left[e^t - t - \frac{e^{2t}}{2} - \ln(1+e^{-t})\right] + e^{-t}\left[e^t - t - \ln(1+e^{-t})\right]$$

نجمع الحدود ونضع الأسي كعامل مشترك:

$$x(t) = \frac{1}{2} + e^{-t}\left[(c_2+1) - t - \ln(1+e^{-t})\right] + e^{-2t}\left[c_1 - t - \ln(1+e^{-t})\right]$$

II - حالة خاصة حيث الحد الثاني يكتب على الشكل:

$$P(r) = r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r = -2$$

الحل المتجانس:

$$x_h = c_1 e^{-2t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-2t}$$

من الجدول نجد أن:

$$x_p = A \cdot e^{-2t}$$

هل x_p حل للمعادلة التفاضلية؟:

$$x'' + 4x' + 4x = 0$$

$$x'_p = -2A \cdot e^{-2t} \quad ; \quad x''_p = 4A \cdot e^{-2t}$$

$$4A \cdot e^{-2t} + 4(-2A \cdot e^{-2t}) + 4A \cdot e^{-2t} = 0$$

حل تمرين المعادلات التفاضلية - ج2 - فيزياء - ف1 - 2025

I - 1 - ⑤

$$x'' + 3x' + 2x = 0$$

$$x = e^{rt} \Rightarrow x' = r e^{rt}, \quad x'' = r^2 e^{rt}$$

نعوض في المعادلة، نجد: D.E.

$$r^2 e^{rt} + 3r e^{rt} + 2e^{rt} = e^{rt}(r^2 + 3r + 2) = 0$$

$$e^{rt} \neq 0 \Rightarrow r^2 + 3r + 2 = 0 \longrightarrow r_1 = -1 \; ; \; r_2 = -2 \Rightarrow$$

$$x_1(t) = e^{-2t} \; ; \; x_2(t) = e^{-t}$$

الحل العام:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}$$

2 -

$$x'' + 3x' + 2x = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

A - ⑤

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$x_h(t)$: الحل العام للمعادلة التفاضلية

$x_p(t)$: حل خاص للمعادلة التفاضلية.

B - طريقة تغيير الثابتات: ⑮

$$x_1(t) = e^{-2t} \; ; \; x_2(t) = e^{-t}$$

$$W(x_1, x_2) = x_1 x_2' - x_1' x_2 = e^{-2t}(-e^{-t}) - (e^{-t})(-2e^{-2t})$$

$$W(x_1, x_2) = e^{-3t}$$

$$x_p = v_1 x_1 + v_2 x_2$$

$$v_1 = -\int dt \cdot \frac{x_2 \cdot f}{W(x_1, x_2)} = -\int dt \cdot \frac{e^{-t}}{e^{-3t}} \cdot \frac{1}{1+e^{-t}} = -\int dt \cdot \frac{e^{2t}}{1+e^{-t}}$$

$$v_2 = \int dt \cdot \frac{x_1 \cdot f}{W(x_1, x_2)} = \int dt \cdot \frac{e^{-2t}}{e^{-3t}} \cdot \frac{1}{1+e^{-t}} = \int dt \cdot \frac{e^{t}}{1+e^{-t}}$$

نحل أحد التكاملات، نعوض:

$$u = e^{-t}$$

$$v_1 = \int \frac{du}{u^3(1+u)} = \int du \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u+1} \right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + Q(y)$$

$$F(x,y) = \int (2xy)\,dx + Q(y)$$

$$F(x,y) = 2y \cdot \int x\,dx + Q(y) = x^2 y + Q(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 y + Q(y)\right] = 1 + x^2 + 3y^2$$

$$x^2 + \frac{dQ}{dy} = 1 + x^2 + 3y^2 \Rightarrow \frac{dQ}{dy} = 1 + 3y^2$$

$$dQ = (1+3y^2)\,dy \Rightarrow Q(y) = \int (1+3y^2)\,dy \Rightarrow$$

$$Q(y) = y + y^3 \Rightarrow F(x,y) = x^2 y^2 + y + y^3$$

ولما أن $F(x,y) = c$: حيث

$x^2 y^2 + y + y^3 = c$: Implicit solution

c : ثابت

$$x^2 y^2(x) + y(x) + y^3(x) = c$$

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ x(0)^2 y^2(0) + y(0) + y^3(0) = c \end{cases} \Rightarrow c = 2$$

إذن الحل الضمني:

$$x^2 y + y + y^3 = 2$$

IV - 20

$$t \cdot x' + x = \cos t \quad , \quad x(\pi) = 2$$

$$x' + \frac{1}{t} x = \frac{\cos t}{t} \quad , \quad t \neq 0$$

$$p(t) = \frac{1}{t} \quad ; \quad q(t) = \frac{\cos t}{t}$$

$$\mu(t) = \int p(t)\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|$$

3) $e^{-2t}(4A - 8A + 4A) = 0 \Rightarrow e^{-2t}(0) = 0$

إذن x_p حل للمعادلة المتجانسة. نلاحظ أيضا أن x_p مطابقة لـ x_h حيث:

$$C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-2t} = A \cdot e^{-2t} \quad \text{if:}$$

$$C_1 = A \text{ and } C_2 = 0$$

ولكن يجب أن نتحقق أكثر لكي نكون:

$$x_p = A \cdot t \cdot e^{-2t}$$

هل x_p حلا خاصا لدينا؟:

$$x'_p = A \cdot e^{-2t} + A \cdot t \cdot (-2) \cdot e^{-2t} = A \cdot e^{-2t} - 2 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t}$$

$$x''_p = -2 \cdot A \cdot e^{-2t} - 2 \cdot A \cdot e^{-2t} + 4 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t}$$

$$x''_p = -4 \cdot A \cdot e^{-2t} + 4 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t}$$

نعوض في المعادلة:

$$-4 \cdot A \cdot e^{-2t} + 4 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t} + 4 \cdot A \cdot e^{-2t} - 8 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t} + 4 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t} \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 = 0$$

إذن $x_p = A \cdot t \cdot e^{-2t}$ حل خاص، لهذا حل كاف ونكتب الحل العام x_h:

$$x_h = C_1 \cdot e^{-2t} + C_2 \cdot e^{-2t} = x_p = A \cdot t \cdot e^{-2t} \quad \text{if:}$$

$$C_1 = 0 \text{ and } C_2 = A$$

إذن نقترح حلا خاصا من الشكل:

$$x_p = A \cdot t^2 \cdot e^{-2t}$$

$$x'_p = 2 \cdot A \cdot t \cdot e^{-2t} - 2 \cdot A \cdot t^2 \cdot e^{-2t} = A \cdot t \cdot (2 \cdot e^{-2t} - 2 \cdot t \cdot e^{-2t}) + A \cdot (2 \cdot e^{-2t} - 2 \cdot t \cdot e^{-2t})$$

$$x''_p = A \cdot t \cdot (-6 \cdot e^{-2t} + 4 \cdot t \cdot e^{-2t})$$

نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$x'' + 4 \cdot x' + 4 \cdot x = 2 \cdot e^{-2t}$$

ونجمع الحدود حسب e^{-2t} ، $t \cdot e^{-2t}$ و $t^2 \cdot e^{-2t}$:

$$x_p'' + 4x_p' + 4x_p = A\left(-6e^{-2t} + 4t e^{-2t}\right) + A\left(2e^{-2t} - 2te^{-2t}\right) + 4A\left(te^{-2t} - t^2 e^{-2t}\right) = A t^2 e^{-2t}(4-8+4) + Ate^{-2t}(-6-2+8) + Ae^{-2t}(2)$$

$$Ae^{-2t}(2) = 2e^{-2t} \Rightarrow A = 1$$

$$x_p(t) = t^2 e^{-2t}$$

الحل العام:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} \cdot t + t^2 e^{-2t}$$

$$x' = -2e^{-2t}(c_1 + c_2 t + t^2) + e^{-2t}(c_2 + 2t)$$

نعوض شروط البدء:

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 1 = c_1 \\ x'(0) &= 1 = -2c_1 + c_2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{Resolution}} c_1 = 1 \; ; \; c_2 = 3$$

إذن حل المسألة:

$$x(t) = e^{-2t} + 3te^{-2t} + t^2 e^{-2t}$$

III - حل مسألة بيشار، بطريقة حل المعادلات التفاضلية التالية: (25)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{1+x^2+3y^2} = f(x,y)$$

$$(2xy)\,dx + (1+x^2+3y^2)\,dy = 0$$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$M(x,y) = 2xy \; ; \; N(x,y) = 1 + x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2x \; ; \; \frac{\partial N}{\partial x} = 2x \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$