

مكاتبك كليلي
25/2/2025

قسم د. علي الخطيب

$$12+20+18=\sqrt{50}/2$$

لغز (12 20 18) لا يوجد

12

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$$

$$[2] \quad \vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \hat{e}_\rho) = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$$

$$[2] \quad \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$[1] \quad \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \vartheta} = \hat{e}_x (-\sin \vartheta \sin \phi) + \hat{e}_y (\cos \vartheta \sin \phi) = \sin \phi \hat{e}_\vartheta$$

$$[1] \quad \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} = \hat{e}_x (\cos \vartheta \cos \phi) + \hat{e}_y (\sin \vartheta \cos \phi) + \hat{e}_z (-\sin \phi) = \hat{e}_\phi$$

$$[1] \quad \Rightarrow \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\vartheta} \sin \phi \hat{e}_\vartheta + \dot{\phi} \hat{e}_\phi$$

$$[1] \quad \Rightarrow \vec{v}(r, \vartheta, \phi) = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \rho \dot{\vartheta} \sin \phi \hat{e}_\vartheta$$

$$[2] \quad L = K - U(r, \vartheta, \phi)$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \rho^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \phi]$$

$$[2] \Rightarrow L = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 (\dot{\phi}^2 + \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \phi)] - U(r, \vartheta, \phi)$$

2 - انشاهد جميع على مستوي كل في سنن اجاديت برون اعدت

2 كذا في شروط القيد

1 $g_1(\vec{r}, t) = x \sin \alpha - z \cos \alpha = c$ $g_2(\vec{r}, t) = y = 0$ (1)

معادلات Lagrange I

1 $m \vec{r} = -mg \hat{e}_z + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2$ (2)

2 $= \begin{cases} m \ddot{x} = \lambda_1 \sin \alpha \\ m \ddot{y} = \lambda_2 \\ m \ddot{z} = -\lambda \cos \alpha - mg \end{cases}$ (3)

ايجاد λ_1 و λ_2 : باستفاد من شرط القيد مرتين متتاليتين (1)

2 $\ddot{x} \sin \alpha - \ddot{z} \cos \alpha = 0$ $\ddot{y} = 0$ (4)

نقوض $\ddot{x}$ و $\ddot{z}$ من (3) في (4) فننتج
 $\lambda_1 \sin^2 \alpha + \lambda_1 \cos^2 \alpha + mg \cos \alpha = 0$ $\lambda_2 = 0$

2 $\Rightarrow \lambda_1 = -mg \cos \alpha$, $\lambda_2 = 0$ (5)

بتعويض (5) في معادلات الحركة (3) ننتج

2 $m \ddot{x} = -mg \sin \alpha \cos \alpha$, $m \ddot{y} = 0$, $m \ddot{z} = -mg \sin^2 \alpha$ (6)

وبملاحظة المعادلات (6) بالنسبة للزمن ننتج انه

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \cos \alpha + a_1 t + a_2 \\ y(t) &= b_1 t + b_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2 $z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin^2 \alpha + c_1 t + c_2$

تحديد الثوابت : يتم تحديد ثوابت التكامل بحيث يتحقق شرط القيد والشرط الابتدائي بالاستفادة من المعادلات (1) والمعادلات (7) ننتج انه

$(a_1 \sin \alpha - c_1 \cos \alpha) t + (a_2 \sin \alpha - c_2 \cos \alpha) = 0$, $b_1 t + b_2 = 0$

رباعيا يجب ان تكون محققة منذ اجل أي t فانه

1 $a_1 \sin \alpha - c_1 \cos \alpha = 0$, $b_1 = 0$
 $a_2 \sin \alpha - c_2 \cos \alpha = 0$, $b_2 = 0$

$a_1 = g \cos \alpha$, $c_1 = g \sin \alpha$
 $a_2 = g \cos \alpha$, $c_2 = g \sin \alpha$

ملاحظة : الاستيعاب
في حالة القيد القوي
في الموضع الابتدائي

[1]

$$z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha + v_0 t \sin \alpha$$

برای $s(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha + v_0 t \sin \alpha$

[1]

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = s(t) \cos \alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = s(t) \sin \alpha \end{cases}$$

مساكنة $\frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$ بعد قسمة بر $\sin \alpha$

[4] $\vec{F}_2 = \lambda_1 \vec{g}_1 + \lambda_2 \vec{g}_2$

$$1 \vec{F}_2 = \lambda_1 \vec{g}_1 + \lambda_2 \vec{g}_2 \quad (8)$$

تبدیل λ_1, λ_2 به (5) و (4) به g_2, g_1

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = (-mg \cos \alpha) \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) (x \sin \alpha - z \cos \alpha) + 0$$

$$2 \vec{F}_2 = (-mg \cos \alpha \sin \alpha) \hat{e}_x + mg \cos^2 \alpha \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = mg \cos \alpha$$