ميكانيك كلاسيكي سنة ثانية فيزياء
25/2/2025 سلم تصحيح
قسم د. علي الطيب

12+20+18=50

12

$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho$

[2] $\vec{v} := \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho \hat{e}_\rho) = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}$

[2] $\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial t}$

[1] $\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \theta} = \hat{e}_x(-\sin\theta\sin\phi) + \hat{e}_y(\cos\theta\sin\phi) = \sin\phi\,\hat{e}_\theta$

[1] $\frac{\partial \hat{e}_\rho}{\partial \phi} = \hat{e}_x(\cos\theta\cos\phi) + \hat{e}_y(\sin\theta\cos\phi) + \hat{e}_z(-\sin\phi) = \hat{e}_\phi$

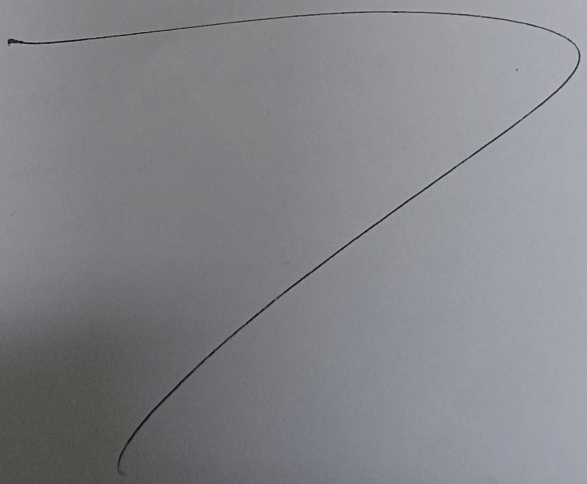
[1] $\Rightarrow \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\sin\phi\,\hat{e}_\theta + \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$

[1] $\Rightarrow \vec{v}(r,\theta,\phi) = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\dot{\theta}\sin\phi\,\hat{e}_\theta$

[2] $L = K - U(r,\theta,\phi)$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m}{2}[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\phi]$

[2] $\Rightarrow L = \frac{m}{2}[\dot{\rho}^2 + \rho^2(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2\sin^2\phi)] - U(r,\theta,\phi)$



[1] $g_1(\vec{r},t) = x\sin\alpha - z\cos\alpha = 0$ $\quad g_2(\vec{r},t) = y = 0$ (1)

معادلات Lagrange I

[1] $m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{e}_z + \lambda_1\vec{\nabla}g_1 + \lambda_2\vec{\nabla}g_2$ (2)

[2] $$= \begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1\sin\alpha \\ m\ddot{y} = \lambda_2 \\ m\ddot{z} = -\lambda\cos\alpha - mg \end{cases}$$ (3)

[2] إيجاد λ_1, λ_2 : باستعمال شرط القيد (1) مرتين متتاليتين :

$\dot{x}\sin\alpha - \dot{z}\cos\alpha = 0$ $\quad \ddot{y} = 0$ (4)

نعوض $\ddot{x}$ ، $\ddot{y}$ ، $\ddot{z}$ من (3) في (4) فينتج

$\lambda_1\sin^2\alpha + \lambda_1\cos^2\alpha + mg\cos\alpha = 0$ $\quad \lambda_2 = 0$

[2] $\Rightarrow \lambda_1 = -mg\cos\alpha$ ، $\lambda_2 = 0$ (5)

نعوض (5) في معادلات الحركة (3) ينتج

[2] $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha\cos\alpha$, $m\ddot{y} = 0$, $m\ddot{z} = -mg\sin^2\alpha$ (6)

وبمكاملة المعادلات (6) بالنسبة للزمن ينتج أن

[2] $$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha + a_1t + a_2 \\ y(t) = b_1t + b_2 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha + c_1t + c_2 \end{cases}$$ (7)

تحديد الثوابت : يتم تحديد ثوابت التكامل بحيث تحقق شرط القيد والشروط الابتدائية

بالاستفادة من المعادلات (1) والمعادلات (7) ينتج أن

$(a_1\sin\alpha - c_1\cos\alpha)t + (a_2\sin\alpha - c_2\cos\alpha) = 0$, $b_1t + b_2 = 0$

وباعتبارها يجب أن تكون محققة من أجل أي t فإن

[1] $a_1\sin\alpha - c_1\cos\alpha = 0$ ، $b_1 = 0$

$a_2\sin\alpha - c_2\cos\alpha = 0$ ،

[1] $c_1 = a_1\cos\alpha$ ، $c_2 = a_2\sin\alpha$

[1] $a_1 = g\cos\alpha$ ، $c_2 = g\sin\alpha$

[1]

[1]

$$\vec{r}(t)=\begin{cases} x(t)=s(t)\cos\alpha \\ y(t)=0 \\ z(t)=s(t)\sin\alpha \end{cases}$$

[4]

$$\vec{F}_2 = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = (-mg\cos\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial z}\hat{e}_z\right)(x\sin\alpha - z\cos\alpha) + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_2 = (-mg\cos\alpha\sin\alpha)\hat{e}_x + mg\cos^2\alpha\,\hat{e}_z}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = mg\cos\alpha$$