سلم تصحيح فرض الرياضيات الخليلية

سنة أولى رياضيات فصل أول 2024-2025

السؤال الأول: (5 نقاط)

$A(2,2,-1)$, $B(4,-2,6)$, $C(8,4,3)$

1) نشكل الأشعة:

$\vec{AB} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

$\vec{AC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$

كي تكون A, B, C على استقامة واحدة يجب أن تكون الزاوية بين الشعاعين 0 أو π

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{45} = 6.708$

$|\vec{AC}| = \sqrt{56} = 7.483$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2\times 6 - 4\times 2 + 5\times 4 = 12 - 8 + 20 = 24$

$\cos\theta = \dfrac{24}{(6.708)(7.483)} = 0.478 \Rightarrow \theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$

النقاط A, B, C لا تقع على استقامة واحدة.

2) دورانه حول ox بزاوية $\theta = \frac{\pi}{6}$ نستخدم القوانين. (10 نقاط)

$x = X$

$y = Y\cos\theta - Z\sin\theta$

$z = Y\sin\theta + Z\cos\theta$

$$(3+\sqrt{21})x + (6-2\sqrt{21})y + (12+2\sqrt{21})z - 27 + 2$$

$$7.58x - 3.17y + 21.17z - 17.83 = 0$$

السؤال الخامس: (20 درجة)

$$f(x,y,z) \equiv x^3 - 2yz + y + z - 2 = 0$$

اكتب معادلتي المستقيم ومعادلة المستوي المماس $M_0(-1,2,1)$

معادلة المستوي هي: $f'_{x_0}(x-x_0) + f'_{y_0}(y-y_0) + f'_{z_0}(z-z_0) = 0$ 2

$$f'_x = 3x^2 \Rightarrow f'_{x_0} = f'_{-1} = 3$$ 6

$$f'_y = -2z + 1 \Rightarrow f'_{y_0} = f'_2 = -2(1) + 1 = -1$$

$$f'_z = -2y + 1 \Rightarrow f'_{z_0} = f'_1 = -2(2) + 1 = -4 + 1 = -3$$

وبالتالي معادلة المستوي المماس للسطح في النقطة M_0 هي

$$3(x+1) + (-1)(y-2) + (-3)(z-1) = 0$$

$$3x - y - 3z + 3 + 2 + 3 = 0$$

$$\boxed{3x - y - 3z + 8 = 0}$$ 4

المعادلات القانونية للمستقيم الناظم

$$\frac{x-x_0}{f'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{f'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{f'_{z_0}}$$ 2

$$\boxed{\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-3}}$$ 6

انتهى الخطأ 1.3 نقطة

المعادلة الناظمية للمستوى الأول

$$\frac{1}{\sqrt{21}}x + \frac{2}{\sqrt{21}}y + \frac{4}{\sqrt{21}}z - \frac{9}{\sqrt{21}} = 0$$ 5

$$\Rightarrow d_1 = \frac{9}{\sqrt{21}}$$ بعد P_1 عن مبدأ الاحداثيات

المعادلة الناظمية للمستوى الثاني:

$$\frac{3}{\sqrt{189}}x + \frac{6}{\sqrt{189}}y + \frac{12}{\sqrt{189}}z - \frac{6}{\sqrt{189}} = 0$$ 5

$$\Rightarrow d_2 = \frac{6}{\sqrt{189}}$$ بعد P_2 عن مبدأ الاحداثيات

المستويان بقيمان في جهة واحدة،
البعد بين المستويين هو حاصل الطرح:

$$d = d_1 - d_2 = \frac{9}{\sqrt{21}} - \frac{6}{\sqrt{189}} = 1.528$$ 5

3 معادلة المستوي المنصف الداخلي للزاوية بين المستويين

$$P_1(x,y,z) \equiv x + 2y + 4z - 9 = 0$$

$$P_3(x,y,z) \equiv x - 2y + 2z + 2 = 0$$

نفرض أن $M(x,y,z)$ هي اصل نقاط المستوي المنصف الداخلي للزاوية بين المستويين فهي متساوية البعد عن كل من المستويين P_3 و P_1

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{P_1^2 + q_1^2 + r_1^2}} = \mp \frac{P_3(x,y,z)}{\sqrt{P_3^2 + q_3^2 + r_3^2}}$$ 5

$$\frac{x + 2y + 4z - 9}{\sqrt{21}} = \mp \frac{x - 2y + 2z + 2}{\sqrt{9}}$$

$$\vec{N_1} \cdot \vec{N_2} = (1)(1) + 2(-2) + 4(2) = 1 - 4 + 8 = +5 > 0$$

بالتالي اشارة المستوي المنصف الداخلي هي $(-)$

$$3(x + 2y + 4z - 9) = -\sqrt{21}(x - 2y + 2z)$$ 5

السؤال الثالث: معادلة مستوي يمر من النقطة $M(4,-1,3)$ ويعامد المستويين:

$$P_1 \equiv x - y + 2z + 1 = 0$$

$$P_2 \equiv x + z - 4 = 0$$

ليكن P هو المستوي المطلوب ناظم $\vec{N}$

$$\left.\begin{matrix} P \perp P_1 \\ P \perp P_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P \parallel \vec{N}_1 \\ P \parallel \vec{N}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{N} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2$$ 8

$$\vec{N}_1(1,-1,2) \quad , \vec{N}_2(1,0,1)$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k}$$ 8

فتكون معادلة المستوى المطلوب والمار من M: $P \equiv a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$$P(x,y,z) \equiv -1(x-4)+1(y+1)+1(z-3)=0$$ 6

$$P(x,y,z) \equiv -x+y+z+2=0$$

السؤال الرابع: $(\theta > 30^\circ)$

1) إثبات توازي المستويين P_1, P_2:

5 حتى يتوازى المستويين يجب أن تكون أمثال توجيه ناظمي المستويين متناسبة:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$$

فبذلك الأمثال متناسبة والمستويين متوازيين.

2) البعد بين المستويين

- نوجد المعادلة الناظمية لكل من المستويين

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{N}_2| = \sqrt{9+36+144} = \sqrt{189}$$

لنعين:

(1) $2 = x$

(2) $2 = \frac{\sqrt{3}}{2} y - \frac{1}{2} z$

(3) $-1 = \frac{1}{2} y + \frac{\sqrt{3}}{2} z$

$\frac{1}{2} z = -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} y \Rightarrow \boxed{z = -4 + \sqrt{3} y}$ (4) (2 م)

نعوض (4) في (3)

$$-1 = \frac{1}{2} y + \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} y - 4)$$

$$-1 = \frac{1}{2} y + \frac{3}{2} y - 2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} - 1 = 2y \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3} - \frac{1}{2}}$$

نعوض في (4)

$$z = -4 + \sqrt{3}(\sqrt{3} - \frac{1}{2})$$

$$z = -4 + 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = -(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

نكتب النقطة A في الاحداثيات الكروية:

$A_{oxyz} \left(2, \sqrt{3} - \frac{1}{2}, -(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})\right)$

السؤال الثاني: (5 نقاط)

$\rho = 2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad z = 1$

الاحداثيات الديكارتية:

$x = \rho \cos\theta$

$y = \rho \sin\theta$ 3

$z = z$

بالتعويض $x = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$y = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$z = 1$ 4

الاحداثيات الكروية:

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\theta = \text{arc tg} \frac{y}{x}$

$\varphi = \text{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$ 4

$r = \sqrt{2 + 2 + 1} = \sqrt{5}$

$\theta = \text{arctg} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

$\varphi = \text{arc tg} \frac{\sqrt{4}}{} = \text{arctg}(2)$ 4