سلم أصبح

جامعة دمشق ـ كلية العلوم — امتحان مقرر تحليل عقدي (1) +تحليل 6 — الفصل الأول 2024-2025

قسم الرياضيات — السنة الثالثة رياضيات

السؤال الأول : **(45 درجة)**

أ. ناقش ،مع التعليل، صحة أو خطأ الدعوى :"كل متسلسلة متقاربة تكون متقاربة بالاطلاق".

ب. ادرس تقارب كل من المتسلسلتين، واحسب مجموع متسلسلة متقاربة منهما في حال وجودها :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(i^n+\frac{1}{n^2}) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}+i\frac{2^n}{n!})$$

ت. ادرس ، حسب قيم z ، تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$. استنتج ما هو قرص تقارب هذه المتسلسلة. (لا تنس الدراسة في حالة $|z|=1$).

السؤال الثاني : **(21 درجة)**

1. حل المعادلة $z+2\bar{z}=\frac{2-i}{1+3i}$
2. اكتب الشكل المثلثي للعدد العقدي $1+i\sqrt{3}$، واستفد منه في تعيين الجذور التربيعية له وفي حل المعادلة $z^2+z-i\frac{\sqrt{3}}{4}=0$.

السؤال الثالث : **(10 درجة)**

عين الإحداثيات الكروية للعدد العقدي $1+i\sqrt{3}$، وعين العدد العقدي الذي إحداثياته الكروية هي $(3,6,-2)$.

ملاحظة : استخدم الدساتير مباشرة ولا داعي لاستنتاجها.

السؤال الرابع : **(24 درجة)**

لتكن $A=\left\{z\in C:\frac{\pi}{6}\le \operatorname{Arg} z\le\frac{\pi}{3}\right\}$ و $B=\{z\in C:.1<|z|<2\}$ و المطلوب :

1- مثّل هندسيا كلا من المجموعات A ، B ، $A\cap B$ ، $B\setminus A$ في المستوي العقدي.(كل مجموعة في شكل).

2- بيّن، مع التعليل، صحة أو خطأ كلٍ مما يأتي :

أ. المبدأ نقطة تجمع للمجموعة A، ب. $A\cap B$ مجموعة متراصة ، ت. النقطة $1+i\sqrt{3}$ داخلية في B ، ث. $B\setminus A$ منطقة .

انتهت الأسئلة — مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

سلم تصحيح امتحان تحليل عقدي (1)
لطلاب السنة الثالثة

إجابة السؤال الأول: (خمس وأربعون)

أ. الدعوى: "كل متسلسلة متقاربة تكون متقاربة بالاطلاق" غير صحيحة.

البرير: المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة حسب ليبنز إلا أنها ليست متقاربة بالاطلاق حيث أن $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة.

ملاحظة: أي مثال آخر صحيح يعطى العلامة.

* إن متسلسلة الأجزاء الحقيقية لـ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{2^n}{n!}\right)$ هي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ وهي متسلسلة هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ فهي متقاربة لأن $\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$.

وإن متسلسلة الأجزاء التخيلية لـ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{2^n}{n!}\right)$ هي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

وهي متسلسلة متقاربة:

ط. حسب دالامبير:

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$$

ط. يمكننا أيضا من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ وهي متقاربة نحو e^x لأجل $x = 2$.

بالنتيجة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{2^n}{n!}\right)$ متقاربة حسب برهانه.

ونكتب: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ إذن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + i\frac{2^n}{n!}\right) = \frac{1}{2} + i(e^2 - 1).$$

* إن الحد العام للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(i^n + \frac{1}{n^2}\right)$ هو $a_n = i^n + \frac{1}{n^2}$ لا يسعى إلى الصفر، فلو فرضنا جدلاً أن $\lim a_n = 0$ أي $\lim i^n = \lim\left(a_n - \frac{1}{n^2}\right) = 0$

وهذا يناقض كون i^n متباعدة. $\lim i^n = \lim\left(a_n - \frac{1}{n^2}\right) = 0 - 0 = 0$

تتمة السلم (ص)

وبالنتيجة $\sum_{n=1}^{\infty}(i^n+\frac{1}{n^2})$ متباعدة، حسب اختبار الحد العام.

ت. نفرض $Z_n=\frac{z^n}{n}$، عندئذ:

$$\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{z^n}\right| = \frac{n}{n+1}|z| \longrightarrow |z|$$

وحسب دالامبير، إذا كان $|z|<1$ فالسلسلة متقاربة بالاطلاق، وهذا يعني أنها متقاربة بالاطلاق داخل $D(0,1)$.

وإذا كان $|z|>1$ فالسلسلة متباعدة وهذا يعني أنها متباعدة خارج القرص $D(0,1)$.

نستنتج أن قرص تقارب السلسلة هو $D(0,1)$.

دراسة الحالة $|z|=1$ وتميز الحالات:

* $z=1$، عندئذ تصير السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة

* $z\neq 1$، $|z|=1$،

بما أن $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ وهي متباعدة، وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ ليست متقاربة بالاطلاق في هذه الحالة.

لدراسة التقارب نفرض أنه $a_n=z^n$، $b_n=\frac{1}{n}$. وعندها $b_n\to 0$ (الشرط الثاني لديركلي محقق)

المجموع الجزئي لـ $\sum a_n$ هو $S_n=z+z^2+\cdots+z^n$

$$S_n=\frac{z-z^{n+1}}{1-z} \Rightarrow |S_n|\le \frac{|z|+|z|^{n+1}}{|1-z|}=\frac{2}{|1-z|}$$

وبالتالي S_n محدودة وشرط ديركلي الأول محقق.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

وهذه السلسلة متقاربة، وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ متقاربة بالاطلاق، وبالنتيجة حسب ديركلي

التمرين الأول (4ن)

الإجابة الصحيحة للسؤال الثاني: (N°2 صحيحة)

$z + 2\bar{z} = \frac{2-i}{1+3i} \Leftrightarrow x + iy + 2x - 2yi = \frac{(2-i)(1-3i)}{1+9}$

$\Leftrightarrow 3x - iy = \frac{(2-3)}{10} + \frac{-6i-i}{10}$

$\Leftrightarrow 3x - iy = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{30}, \quad y = \frac{7}{10}$

$\Rightarrow \boxed{z = -\frac{1}{30} + i\frac{7}{10}}$ الشكل

ب.

$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$

$\tan(\arg(1+i\sqrt{3})) = \sqrt{3} \Rightarrow \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \boxed{1+i\sqrt{3} = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}}$

ج. استنتاج: $1+i\sqrt{3}$ من الشكل المثلثي ← نفرض $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$

$r^2\,\mathrm{cis}\,2\theta = 1+i\sqrt{3} \Leftrightarrow r^2\,\mathrm{cis}\,2\theta = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \\ 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow z_k = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \pi k\right) : k = 0, 1$

حيث

$z_0 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{6}, \quad z_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{6}$

تمرين (4 نقاط)

حل المعادلة

$$z^2 + z - i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)\left(-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

بما أنه $z_0 = \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$ جذر لـ Δ فإن:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{2}\,\text{cis}\,\frac{\pi}{6}}{2}$$

هما جذرا المعادلة.

إجابة السؤال الثالث: كتابة درجة

* الإحداثيات الكروية للعدد $1 + i\sqrt{3}$:

$$x_1 = \frac{2\,Re(1+i\sqrt{3})}{1+|z|^2} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{2\,Im(1+i\sqrt{3})}{1+|z|^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{1+|z|^2} = \frac{4-1}{1+4} = \frac{3}{5}$$

* العدد المقابل الذي إحداثياته الكروية هي $(3, 6, -2)$:

(يوجد خطأ بالإحداثيات الكروية، لذلك نقوم بالحل

العادي

أو: إذا استخدم العلاقات المستوية

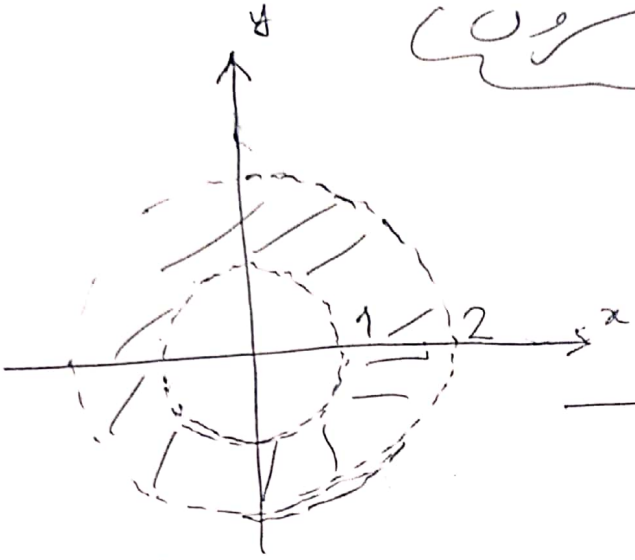
$$Re\,z = \frac{x_1}{1-x_3}, \quad Im\,z = \frac{x_2}{1-x_3}$$

فيكون الإجابة خاطئة.

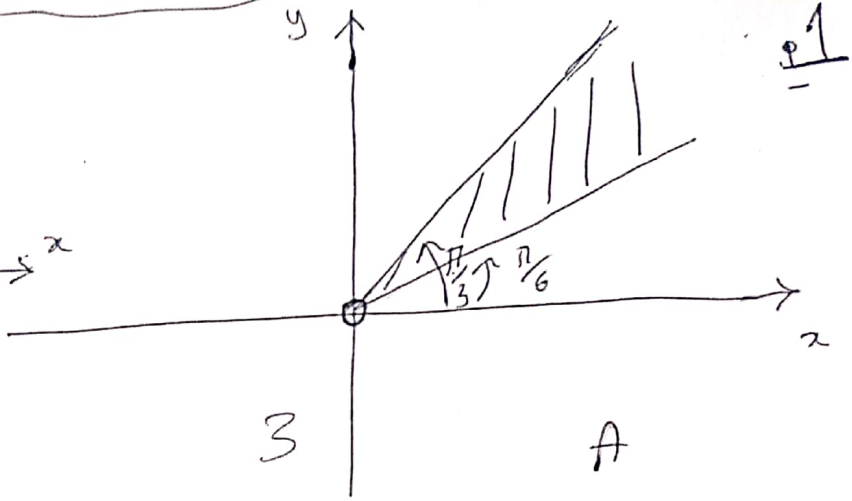
السلم ص

إجابة السؤال الرابع: (أربع وعشرون)

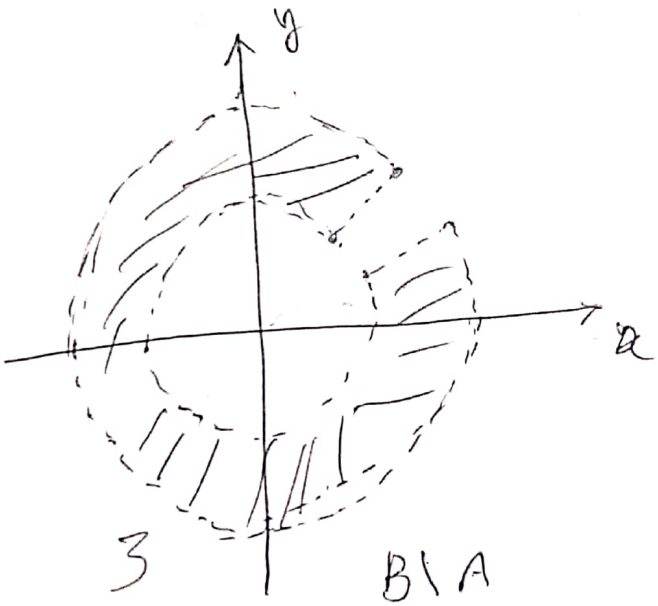
1.



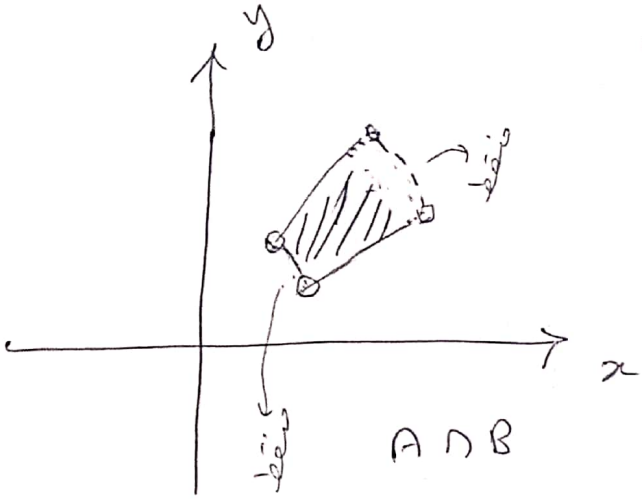
3 B



3 A



3 B\A



A ∩ B

3

2. أ. صحيحة، لأنه أي جوار لعدد سيحوي نقاطاً من A. 3

ب. A ∩ B غير متراصة لأنها ليست مغلقة. 3

ت. $\sqrt{3}+1$ ليست داخلية في B لأنها تقع على محيط الدائرة $|z|=2$ 3

ث. B\A منطقة لأنها مفتوحة ومترابطة. 3