جامعة دمشق – كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تحليل عقدي (1) +تحليل 6
السنة الثالثة رياضيات

الفصل الثاني 2024-2025

السؤال الأول : **(45 درجة)**

أ. ناقش ،مع التعليل، صحة أو خطأ الدعوى :"كل مجموعة غير منتهية تملك نقطة تجمع".

ب. ادرس تقارب كل من المتسلسلتين، واحسب مجموع متسلسلة متقاربة إن كانت موجودة :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cisn\theta}{n}\quad ،\quad \sum_{n=1}^{\infty}((1+\frac{1}{n})^{n}+i\frac{1}{n^{2}})\quad ،\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+2i}{3})^{n}$$

ت. ادرس ، حسب قيم z ، تقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n}}{2^{n}}$. استنتج ما هو قرص تقارب هذه المتسلسلة، (لا تنس الدراسة في حالة $|z|=2$). أخيرا، أوجد التابع المجموع لهذه المتسلسلة على قرص تقاربها.

السؤال الثاني : **(21 درجة)**

اكتب الشكل المثلثي للعدد العقدي $-1+i\sqrt{3}$ ، واستفد منه في تعيين الجذور التربيعية له وفي حل المعادلة $z^{2}+iz-i\frac{\sqrt{3}}{4}=0$. أخيرا، اكتب بالشكل الجبري $(\frac{-1+i\sqrt{3}}{[1-i]})^{10}$.

السؤال الثالث : **(10 درجة)**

عين الإحداثيات الكروية للعدد العقدي $-1+i\sqrt{3}$ ، وعين العدد العقدي الذي إحداثياته الكروية هي $(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{-2}{7})$.

ملاحظة : استخدم الدساتير مباشرة ولا داعي لاستنتاجها.

السؤال الرابع : **(24 درجة)**

لتكن $A=\left\{z\in C:0\le \operatorname{Arg} z\le\frac{\pi}{3}\right\}$ و $B=\{z\in C:1<\operatorname{Re} z<2\}$ و المطلوب :

1- مثّل هندسيا كلا من المجموعات A ، B ، $A\cap B$ ، $B\setminus A$ في المستوي العقدي.(كل مجموعة في شكل).

2- بيّن، مع التعليل، صحة أو خطأ كلٍ مما يأتي :

أ. $1+i\sqrt{3}$ نقطة تجمع للمجموعة $A\cap B$ ، ب. $A\cap B$ مجموعة متراصة ، ت. النقطة $\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ داخلية في A ، ث. $B\setminus A$ منطقة .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق والنجاح

(ص ١)

سلم لتصحيح امتحان مقرر تحليل عقدي (١)
سنة ثالثة رياضيات - فصل ثاني ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥

إجابة السؤال الأول: (حسن وارسوم درويش)

أ) * الدعوى: كل مجموعة غير منتهية تملك نقطة تجمع" غير صحيحة" (5)

* التعليل: إن المجموعة $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ غير منتهية ولا تملك نقطة تجمع (5)

محكمة $\mathbb{N}$، ممكن $A = \{n+i/n : n \in \mathbb{N}\}$.

ب) * السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+2i}{3}\right)^n$ هندسية أساسها $\frac{1+2i}{3}$

$$\left|\frac{1+2i}{3}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$$

فهي متقاربة، وإن مجموعها يساوي:

$$\frac{\frac{1+2i}{3}}{1-\frac{1+2i}{3}} = \frac{1+2i}{2-2i}.$$

(6)

* بما أن $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ فإن الحد العام للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + i\frac{1}{n^2}\right)$ لا يؤول إلى الصفر، أي أن السلسلة متباعدة.

* إذا كانت $\theta = 2\pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ تصبح متباعدة.

أما إذا كان $\theta \neq 2\pi k$ فإن $q_n = \cos n\theta$، ونضع $v_n = \frac{1}{n}$، حيث $v_n \to 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

وهي سلسلة متقاربة، ومنه $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n - v_{n+1})$ متقاربة بالإطلاق

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \operatorname{cis}\theta + \operatorname{cis}2\theta + \cdots + \operatorname{cis}n\theta$$ أن

$$\operatorname{cis}\theta\, S_n = \operatorname{cis}2\theta + \operatorname{cis}3\theta + \cdots + \operatorname{cis}n\theta + \operatorname{cis}(n+1)\theta$$

بالطرح

$$(1 - \operatorname{cis}\theta) S_n = \operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}(n+1)\theta$$

$\Rightarrow$ لأن $\operatorname{cis}\theta \neq 1$ أي $\theta \neq 2\pi k$ فإن

$$S_n = \frac{\operatorname{cis}\theta - \operatorname{cis}(n+1)\theta}{1 - \operatorname{cis}\theta}$$

$$\Rightarrow |S_n| \leq \frac{|\operatorname{cis}\theta| + |\operatorname{cis}(n+1)\theta|}{|1 - \operatorname{cis}\theta|} = \frac{2}{|1 - \operatorname{cis}\theta|} \quad \forall n$$

وهذه S_n متتالية محدودة. وشرط ديريكليه محققة

وبالتالي $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{cis}n\theta}{n}$ متقاربة

مثال: بين أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $|z| < 2$، إذا كانت متقاربة داخل $D(0,2)$ ومتباعدة خارج دائرة التقارب أي $D(0,2)$ ، ثم أوجد مجموع التقارب.

$$\begin{cases} f : D(0,2) \longrightarrow \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{\frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}} = \dfrac{z}{2 - z} \end{cases}$$

ملاحظة: يمكن استخدام الدليل أو كوشي، عند تعريف الدالة على الحافة

الإجابة السؤال الثاني: واحد كامل وثلاثون

$|-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ ، $tg(Arg(-1+i\sqrt{3})) = -\sqrt{3}$ *

$\Rightarrow Arg(-1+i\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

و الشكل المثلثي هو:

$$-1+i\sqrt{3} = 2\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

5 //

* نفرض $z = r\,cis\theta$ حيث عدد مركب فيكون $(r\,cis\theta)^2 = -1+i\sqrt{3}$ أي $-1+i\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\,cis\,2\theta = 2\,cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2} \\ 2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \pi k \end{cases}$$

5 //

$$\Rightarrow z_k = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{3} + \pi k\right) \; ; \; k = 0, 1$$

$z_1 = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ، $z_0 = \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{3}$ نجد $-1+i\sqrt{3}$ الجذران التربيعيان لـ

*

$$z^2 + iz - i\frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$$\Delta = (i)^2 - 4\left(-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(1) = -1 + i\sqrt{3}$$

6 //

وقد وجدنا سابقاً أن $\sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{3}$ جذر تربيعي لـ Δ وبالتالي

فحلول المعادلة هي:

$$\frac{-i - \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{3}}{2} \quad , \quad \frac{-i + \sqrt{2}\,cis\frac{\pi}{3}}{2}$$

5 //

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10} = \left(\frac{2\,cis\frac{2\pi}{3}}{\sqrt{2}\,cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\,cis^{10}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \quad *$$

$$= 32\,cis\left(\frac{10\pi}{12}\right)$$

$$= 32\,cis\,\frac{5\pi}{6}$$

إجابة السؤال الثالث: عمر وريهام

* أولا حساب الكتابة المثلثية لـ $-1+i\sqrt{3}$:

$$x_1 = \frac{2\,Re(-1+i\sqrt{3})}{|1+i\sqrt{3}|^2+1} = \frac{-2}{4+1} = -\frac{2}{5}$$

$$x_2 = \frac{2\,Im(-1+i\sqrt{3})}{|1+i\sqrt{3}|^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{4+1} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$x_3 = \frac{|-1+i\sqrt{3}|^2-1}{|-1+i\sqrt{3}|^2+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

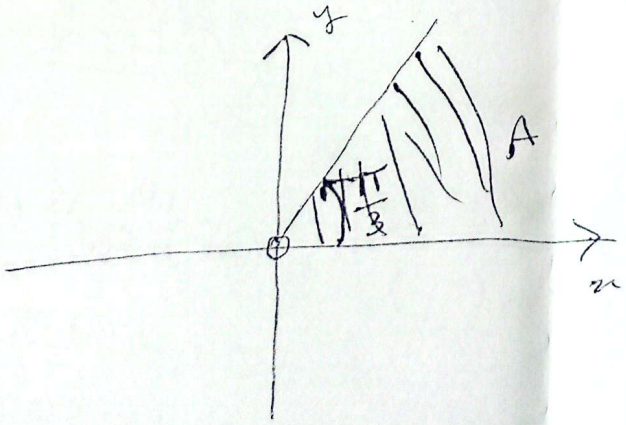
* العدد العقدي الذي لاحداثياته الكرتيزية هي: $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{7}, \frac{-2}{7}\right)$

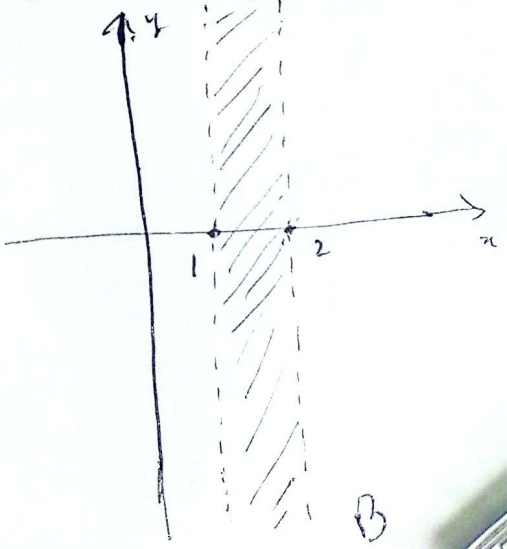
$$x = \frac{x_1}{1-x_3} = \frac{\frac{3}{7}}{1+\frac{2}{7}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad y = \frac{\frac{6}{7}}{1+\frac{2}{7}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

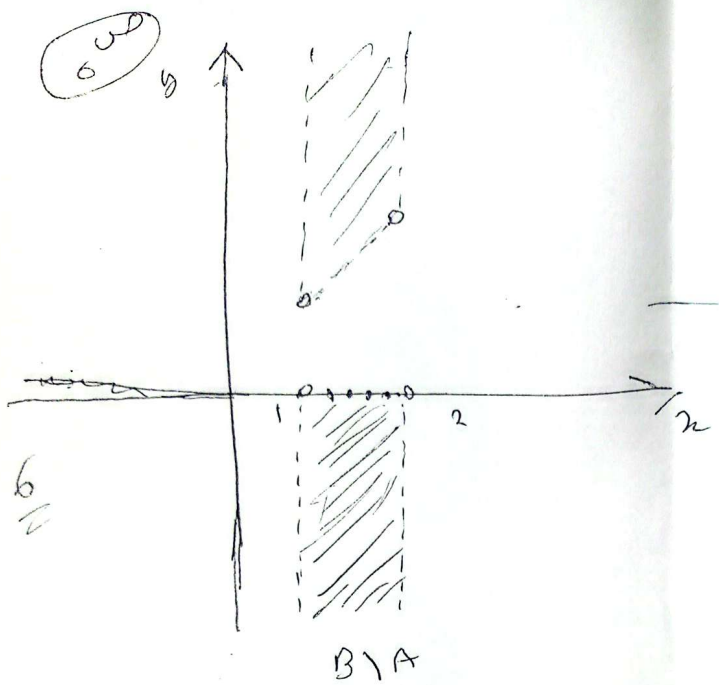
$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{3} + i\frac{2}{3}}$$

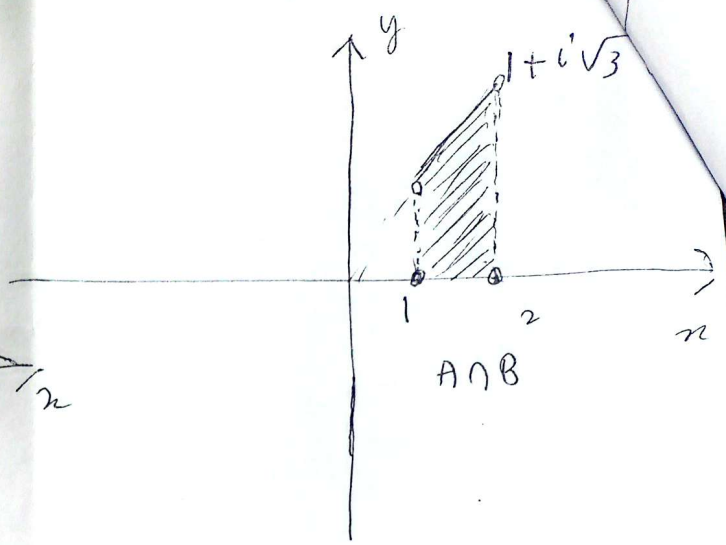
إجابة السؤال الرابع: أربع وعشرون

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 \le Arg\,z \le \frac{\pi}{3}\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C} : 1 < Re\,z < 2\}$$



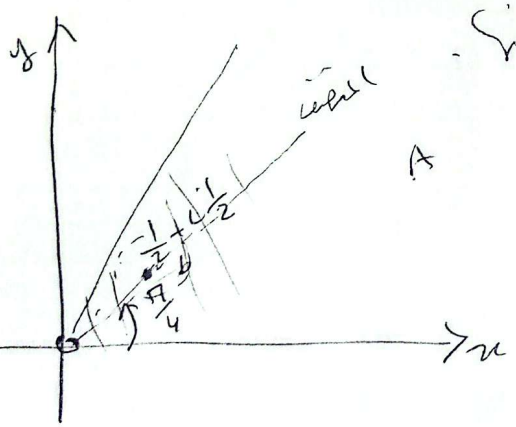






ج. أ. $1+i\sqrt{3}$ نقطة تحقق $A \cap B$، صح لأن أي جواب يحتوي نقاط من $A \cap B$ غيرها. (انظر الشكل أعلاه على اليمين)

ب. $A \cap B$ متراصة: خطأ. لأنه $A \cap B$ ليست مغلقة لأنه $1+i\sqrt{3}$ نقطة تحقق لها وليست منها.



ت. A إلى $\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}$ هي صورة A بدوران مركزه O، لذا النقطة تحتوي A.

ث. B\A منطقة، خطأ، لأنها غير متراصة.