سلم تصحيح مقرر فيزياء البلازما
السنة الرابعة فيزياء
الفصل الثاني، العام الدراسي /2024 - 2025/
مدرس المقرر: د. يوسف أبو علي

إجابة السؤال الأول: (25 درجة) 6

تعريف البلازما: غاز شبه معتدل من الجسيمات المشحونة (وربما بعض الجسيمات الحيادية) والتي تبدي سلوك جماعي.

شرح لماذا المعايير ضرورية:

6 **$\lambda_D << L$** : إذا طبقنا حقل كهربائي (كمون على البلازما، أو تم إضافة) تحريك شحنة، مثل هذا الفعل يولد حقل كهربائي، فإن البلازما تحاول حجب هذا الحقل (أي التقليل من أثره عليها). الميزة الأساسية لسلوك البلازما هو قدرتها على حجب هذا الحقل الناتج.

$$\lambda_{De} = \left(\frac{\varepsilon_o k_B T_e}{n_e e^2}\right)^{1/2}$$

حيث λ_{De} طول ديباي وهو يقيس مسافة التحجيب او سماكة القشرة.

إذا كانت أبعاد النظام $L > \lambda_{De}$ و بالتالي بتطبيق كمونات فسوف تقوم البلازما بحجبها في مسافة تساوي تقريباً الى طول ديباي، أغلب البلازما ستكون شبه معتدلة بمعنى أن $n_i = n_e$، أما إذا كان $L < \lambda_D$ فلا يوجد مسافة كافية لكي يحدث الحجب. فلكي يدعى أي غاز مؤين بلازما يجب أن يتحقق شرط شبه التعادل الكهربائي:

$$\lambda_D << L$$

5 **$N_D >>> 1$** : من الواضح، أنه من الضروري أن يكون هناك عدد كاف من الجسيمات ضمن طول ديباي لحدوث الحجب.

أذا كان n_oإلكترون يشغل$1\ \mathrm{m}^3$ ومن ثم فإن كل إلكترون يشغل حجم $\frac{1}{n_o}$، تخيل هذا ليكون مكعب جانبه له الطول $n_o^{-1/3}$ لكي يحدث الحجب، يتطلب ذلك:

$$n_o^{-1/3} << \lambda_{De}$$

$$n_o \lambda_{De}^3 >>>> 1$$

لنتخيل كرة نصف قطرها λ_{De} و تحتوي N_D إلكترون/أيون حيث:

$$N_D = \frac{4\pi}{3} n_o \lambda_{De}^2 >>>> 1$$

يتطلب السلوك الجماعي: $N_D >>> 1$

5 **$\omega\tau_c > 1$** : إذا كانت البلازما مؤينة بشكل ضعيف فقط وتحتوي على نسبة هامة من الذرات/الجزئيات. ومن ثم فإنه من الممكن أن تكون التصادمات مع هذه الذرات / الجزئيات متكررة جداً وبالتالي فالتصادمات سوف تسيطر على حركية الغاز بدلاً من القوى الكهرومغناطيسية. إذا كان τ_c الزمن بين تصادمات الجسيمات المشحونة بالذرات الحيادية، لكي تظهر الظواهر الكهرومغناطيسية و ظواهر البلازما يجب أن يحدثوا في مقياس زمني أصغر من τ_c. بفرض أن عملية كهذه مميزة بالزمن τ أو بواسطة التردد $\omega = 2\pi / \tau$ ، فإنه يتطلب من أي نظام ليقوم بفعل البلازما أن يتحقق:

$$\omega\tau_c > 1$$

(a) بحاجة إلى الوصف الحركي (النظرية الحركية)
(b) بحاجة إلى نموذج المائعين (2-fluids equation) 3

****

إجابة السؤال الثاني: (22 درجة)

(a) قوة بوندروموتيف: هي القوة المحصلة التي تعانيها الجسيمات المشحونة عندما تهتز في حقل كهربائي عالي التواتر ومتغير فراغياً ومن ثم بواسطة معادلات مكسويل في حقل مغنطيسي. 5

(b) بما أن الحقل الكهربائي غير متجانس، فسوف تهتز الجسيمة من المناطق ذات الحقل المغناطيسي الأقوى إلى المناطق ذات الحقل الأضعف. وتتلقى قوة أقوى في المنطقة ذات الحقل القوي منها في المنطقة ذات الحقل الضعيف، التأثير المحصل هو قوة متوسطة (خلال دور واحد) على الجسيمة تحركها نحو منطقة الحقل الضعيف. وبالتالي معادلة الحركة: 2

$$m\ddot{x} = qE_o(x)\cos(\omega t)$$

بتحليل الحركة إلى حركة مركز الاهتزاز x_0، والمرتبط معه، الاهتزاز عالي التواتر حول هذا المركز عند x_1، وبالتالي $x = x_o + x_1$ حيث x_1 سيكون مهتزاً بسرعة بينما x_0 سيكون عبارة عن حركة متوسطة (خلال دور واحد $2\pi/\omega$) لمركز الاهتزاز. إذا فرضنا بأن سعة الحقل E_0 لا تتغير كثيراً مع الاهتزاز وبالتالي يمكننا نشر مركز الاهتزاز إلى: 2

$$E_o(x) = E_o(x_o + x_1) = E_o(x_o) + x_1\left(\frac{dE_o}{dx}\right)_{x=x_0}$$ 2

ومن ثم:

$$m(\ddot{x}_o + \ddot{x}_1) = q\left[E_o + x_1\frac{dE_o}{dx}\right]\cos(\omega t)$$ 2

حيث فرضنا الأن بأنه قد حددت الحقول عند مركز الاهتزاز. بإختيار الجزء الاهتزازي السريع من المعادلة السابقة نحصل على: 3

$$m\ddot{x}_1 = qE_o\cos(\omega t)$$

$$x_1 = -\frac{qE_o}{m\omega^2}\cos(\omega t)$$

باختيار الحدود المتبقية من المعادلة السابقة وبالتعويض عن x_1 وأخذ المعدل خلال دور واحد نحصل على: 3

$$m\ddot{x}_o = -\frac{q^2}{m\omega^2}E_o\frac{dE_o}{dx} < \cos^2(\omega t) >$$

$$= -\frac{q^2}{4m\omega^2}\frac{d}{dx}E_o^2$$

حيث معدل $\cos^2(\omega t) = 1/2$ خلال دور واحد. وأخيراً قوة بوندروموتيف هي: $F_p = m\ddot{x}_o$ حيث: 1

$$F_p = -\frac{q^2}{4m\omega^2}\frac{d}{dx}E_o^2$$

$$= -\frac{m}{4}\frac{d}{dx}v_{osc}^2$$ 2

حيث $v_{osc} = qE_o/m\omega$ هي سرعة التقلق أو الارتجاف (quiver velocity).

****

إجابة السؤال الثالث: (23 درجة)

لدينا من معادلة الحركة:

$$m\dot{\vec{v}} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$
$$\dot{\vec{v}} = \frac{q}{m}\vec{E} + \Omega\vec{v}\times\hat{z}$$
2

حيث: $\Omega = \dfrac{qB_o}{m}$

الشروط الأبتدائية: $\vec{B}_o = (0,0,B_o)$ & $\vec{E}_o = (E_o,0,0)$ & $\vec{v}(t=0)=0$ & $\vec{r}(t=0)=0$

بالمكاملة نجد: 2

$$\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \Omega\vec{r}\times\hat{z} + A$$
1

بتطبيق الشروط البدائية نجد: $A=0$ ومنه: 1

$$\vec{r}\times\vec{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y\hat{x} - x\hat{y}$$
2

وبالتالي:

$$v_x = \frac{qE_o}{m}t + \Omega y$$
$$v_y = -\Omega x$$
$v_z = 0 \Rightarrow z = 0$ بالاشتقاق بالنسبة للزمن نجد:

3

$$E_o \perp B_o \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m}E_o + \Omega\, v_y \qquad \frac{dv_y}{dt} = -\Omega\, v_x \qquad \frac{dv_z}{dt} = 0$$
2

تعطي المعادلة الأخيرة $v_z = v_{z0}$. يمكن إعادة كتابة المعادلات السابقة بالشكل:

$$\frac{dv_x}{dt} = \Omega\left(v_y + \frac{E_o}{B_o}\right) \qquad \frac{d}{dt}\left(v_y + \frac{E_o}{B_o}\right) = -\Omega\, v_x$$
2

بمفاضلة العلاقة الأولى نحصل على:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = \Omega\,\frac{d}{dt}\left(v_y + \frac{E_o}{B_o}\right) = \Omega\frac{dv_y}{dt} = -\Omega^2 v_x$$
$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \Omega^2 v_x = 0$$
2

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية تقبل حلاً من الشكل: 1

$$v_x = A\sin(\Omega t + \varepsilon)$$

حيث A و ε ثابتان. لدينا من المعادلة الأولى:

$$\frac{1}{\Omega}\frac{dv_x}{dt} = v_y + \frac{E_o}{B_o}$$
$$\frac{1}{\Omega}[A\Omega\cos(\Omega t + \varepsilon)] = v_y + \frac{E_o}{B_o}$$
$$v_y = -\frac{E_o}{B_o} + A\cos(\Omega t + \varepsilon)$$
3

فيكون الانجراف على طول المحور y السالب (إضافة حقل على المحور x ينتج عنه انجراف على طول المحور y) تعطى بالعلاقة: $\vec{v}_d = -\dfrac{E_o}{B_o}\hat{y}$ أو $v_d = \left|\dfrac{E_o}{B_o}\right|$ 2

****

إجابة السؤال الرابع: (30 درجة)

المرتبة الصفر (zero-order):

$$\left.\begin{aligned} n_e &= n_o \\ v_e &= 0 \\ E &= 0 \\ P_e &= T_e = 0 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

المرتبة الأولى (first-order):

$$\left.\begin{aligned} n_e &= n_o + n_1 \\ v_e &= v_1 \\ E &= E_1 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

حيث يشير الرمز 1 إلى أن الكمية صغيرة.

تعطى معادلة الاستمرار ومعادلة الحركة ومعادلة بواسون بصورة عامة بـ:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla.(n_s \vec{\mathbf{v}}_s) = 0 && (1) \\ &\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}_s}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}}_s.\nabla \mathbf{v}_s = \frac{q_s}{m_s}\left[\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}_s \times \vec{\mathbf{B}}\right] - \frac{1}{m_s n_s}\nabla P_s && (2) \\ &\nabla.\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} && (3) \end{aligned}\right\} \quad 3$$

يمكن جعل العبارات اللاخطية في المعادلات السابقة خطية (في حال حركة الإلكترونات فقط) كما يلي:

$$\left.\begin{aligned} n_e v_e &= (n_o + n_1)\, v_1 \approx n_o v_1 \\ v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} &= v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \approx 0 \end{aligned}\right\} \quad 2$$

أن وجود درجة حرارة محددة (بلازما دافئة) يعني بأن تدرجات الضغط يمكن أن تغير من الانتشار. وبالتالي تصبح معادلة الحركة (المعادلة 2) على النحو الآتي: 2

$$\frac{\partial P_e}{\partial x} = \gamma_e \frac{P_e}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x} = 3k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} = 3m_e v_{te}^2 \frac{\partial n_e}{\partial x}$$

حيث وضعنا $\gamma_e = 3$، مع التمييز أنه في هذه الفترة الزمنية السريعة تكون الإلكترونات كظومة (adiabatic). بأخذ كل ما سبق بعين الاعتبار والتعويض في المعادلات (1+2+3) فإننا نحصل على: 1

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_o \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 && (1') \\ &\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_1 - 3m_e v_{te}^2 \frac{\partial n_e}{\partial x} && (2') \\ &\frac{\partial E_1}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_o}(n_o - (n_o + n_1)) = -\frac{e}{\varepsilon_o} n_1 && (3') \end{aligned}\right\} \quad 3$$

بفرض أن كل الكميات تتغير بالشكل: $\exp(i(kx - \omega t))$ أي: $\frac{\partial}{\partial x} \to ik \quad \frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

بتطبيق تحليل فورييه نحصل على:

$$-i\omega\, n_1 + ik\, n_o v_1 = 0 \qquad (4)$$

$$-i\omega v_1 = -\frac{e}{m_e}E_1 - \frac{3v_{te}^2}{n_0}\frac{\partial n_1}{\partial x} \qquad (5)$$

$$ik E_1 = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_1 \qquad (6)$$

3

بحذف v_1 و E_1 من المعادلات (4+5+6) ، فإننا نحصل على علاقة التشتت من الشكل:

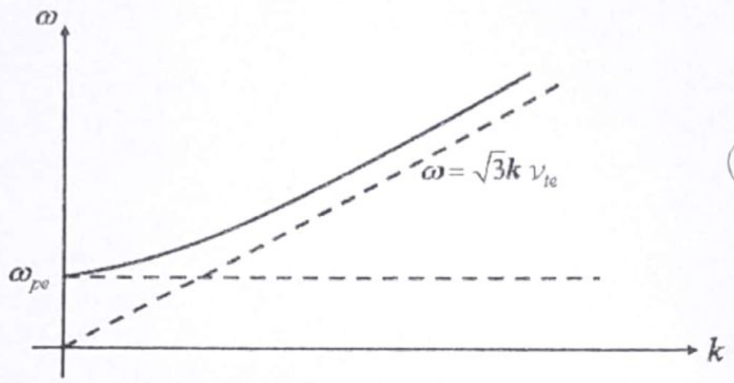
$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{te}^2$$

4

حيث:

$$v_{te} = (k_B T_e / m)^{1/2} \ ، \ \omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}\right)^{1/2}$$

2



3

عندما: $k = 0 \Leftarrow \omega = \omega_{pe}$

أما عندما $k > 0$ فأن العلاقة بين k و ω هي جزء من قطع مكافيء يعطى مقاربه بالعلاقة: $\omega = \sqrt{3}\, k v_{te}$.

2

تعطى السرعة الطورية بالعلاقة:

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

بتعويض قيمة ω من علاقة التشتت نحصل:

$$v_p = \left(\frac{\omega_{pe}^2}{k^2} + 3v_{te}^2\right)^{1/2}$$

و لكن $\omega_{pe} = \frac{V_{te}}{\lambda_{De}}$ ، بالتعويض نجد:

$$v_p = \left(\frac{v_{te}^2}{k^2\lambda_{De}^2} + 3v_{te}^2\right)^{1/2} = v_{te}\left(\frac{1}{k^2\lambda_{De}^2} + 3\right)^{1/2}$$

عندما $k^2\lambda_{De}^2 >> 1$ فيمكن إهمال الـ 3:

$$v_p \approx \frac{1}{k\lambda_{De}} v_{te}$$

****