اسم الطالب:

الرقم الامتحاني:

الجمهورية العربية السورية

وزارة التعليم العالي

جامعة دمشق– كلية العلوم–قسم الفيزياء

أسئلة امتحان مقرر الجبر والهندسة التحليلية لطلاب السنة الأولى، قسم الفيزياء . الفصل الأول 2024-2025

اقرأ الملاحظات التالية قبل الإجابة على الأسئلة:

- يعتبر امتحان الجبر والهندسة التحليلية مقرر في مرحلة الإجازة الجامعية، وهي أحد مراحل الدراسة الأكاديمية وبالتالي ليس كل ما يعطى في المقرر يأتي بحرفيته في الامتحان لأن الامتحان الأكاديمي فرصة لإبراز مهارات ومدارك الطلاب وتمييزهم.
- إن كتابة الطالب لأي رمز دون ذكر ماذا يمثل ذلك الرمز، تؤدي إلى خسارة الدرجة المرافقة لذلك الرمز سواء في الأسئلة النظرية أو في الأسئلة ذات الإجابات العددية.
- كانت مدة الإجابة على أسئلة امتحان المقرر، من قبل مدرس المقرر، (89.5 ∓ 0.8) دقيقة.

أجب عن الأسئلة التالية:

أولاً. أوجد كل من المعادلة المختزلة والمعادلة العامة للكرة ذات القطر 20، ومركزها مبدأ الاحداثيات، ثم بيَن هل تنتمي النقطة $(8,0,6)$ لهذه الكرة. ثم أوجد معادلة المستوي المار بالدائرة العظمى لهذه الكرة. 20 درجة

لإيجاد المعادلة المختزلة والمعادلة العامة للكرة ذات القطر 20 ومركزها في مبدأ الإحداثيات، يمكننا اتباع الخطوات التالية:

المعادلة المختزلة للكرة:

المعادلة المختزلة للكرة التي مركزها \((0, 0, 0) \) وقطرها \(d = 20 \) يمكن كتابتها على الشكل التالي:

x^2 + y^2 + z^2 = r^2

حيث (r) هو نصف القطر. لذا:

r = 10

وبذلك تصبح المعادلة:

x^2 + y^2 + z^2 = 10^2

أي:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

المعادلة العامة للكرة:

المعادلة العامة للكرة تأخذ الشكل:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

حيث \((h, k, l) \) هو مركز الكرة. في حالتنا، المركز هو\((0, 0, 0) \)، لذا تصبح المعادلة:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

التحقق مما إذا كانت النقطة (8, 0, 6) تنتمي للكرة:

للتحقق مما إذا كانت النقطة \((8, 0, 6) \) تنتمي للكرة، يوجد طريقتين:

طريقة1:

نحسب المسافة من النقطة إلى المركز:

$$8^2 + 0^2 + 6^2 = 64 + 0 + 36 = 100$$

بما أن \(100 = 100 \)، فإن النقطة \((8, 0, 6) \) تنتمي إلى الكرة.

طريقة 2: نعوض النقطة في معادلة الكرة فملاحظ أنها محققة فهي تنتمي.

معادلة المستوى المار بالدائرة العظمى للكرة:

الدائرة العظمى للكرة هي المستوى الذي يمر بمركز الكرة ويقسمها إلى نصفين متساويين. معادلة هذا المستوى يمكن أن تكون أي مستوى يمر بمركز الكرة.

يمكننا اختيار مستوى موازٍ لأي من المحاور. على سبيل المثال، إذا اخترنا المستوى الذي يمر بمركز الكرة ويكون عمودياً على محور الدائرة، حيث يمكن إيجاد المعادلة من المعادلة العامة أو المختزلة للمستوي

....

ثانياً. أوجد ثنوية كل علاقة مما يلي، ثم بيّن هل تختلف الإجابة لو بدأت من الطرف الآخر: 6 درجات

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(\Omega - A) \cap (\Omega - B) = \Omega - (A \cup B)$$

لإيجاد الثنوية لكل علاقة، سنبدأ بتحليل كل علاقة على حدة.

الأولى:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

لنبدأ بإيجاد ثنوية العلاقة:

-الثنوية تعني عكس العلاقة. في هذه الحالة، سنقوم بتبديل عمليات الاتحاد (U) والتقاطع (∩) ونطبق قانون ديمورجان.

إذا قمنا بتبديل العمليات، نحصل على:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

العلاقة الثانية:

$$(\Omega - A) \cap (\Omega - B) = \Omega - (A \cup B)$$

لنبدأ بإيجاد ثنوية العلاقة:

-كما في السابق، سنقوم بتبديل عمليات الفرق (−) والتقاطع (∩) والاتحاد.(U)

إذا قمنا بتبديل العمليات، نحصل على:

$$(\Omega \cap A) \cup (\Omega \cap B) = \Omega \cap (A \cap B)$$

هل تختلف الإجابة لو بدأنا من الطرف الآخر؟

عند تحليل الثنائيات، نجد أن عملية التبديل لا تؤثر على النتيجة النهائية، ولكن يمكن أن تكون هناك تعبيرات مختلفة تعتمد على الطريقة التي نبدأ بها. عادة، في علم الرياضيات، يمكن أن تكون هناك طرق متعددة لبرهنة نفس العلاقة، لكن من حيث النتيجة النهائية، يجب أن تكون متساوية.

....

ثالثاً. بفرض المجموعة Ω مجموعة شاملة نسبياً تعبر عن الأرقام من 0 حتى 9 وهي مجموعة مرتبة، والمجموعة A تعبر عن أرقام جوالك بدون تكرار لنفس الرقم وهي أيضاً مجموعة مرتبة، والمجموعة Φ هي المجموعة الخالية: 20 درجة

1-اكتب المجموعة Ω، ثم بيّن هل ينتمي العنصر 5 لهذه المجموعة.

2-اكتب المجموعة A، ثم بيّن هل ينتمي العنصر 5 لهذه المجموعة.

3-أوجد Ω U A، وبيّن هل تعتبر Ω عنصر ماص أم عنصر حيادي في هذه الحالة.

4- أوجد Φ U A، وبين هل تعتبر Φ عنصر ماص أم عنصر حيادي هنا.

5-أوجد كل من Ω^*، Φ^*، وبيّن ما هي العلاقة بينهما.

6-أوجد A^*.

7-أوجد $A \Delta \Omega$.

في هذا السؤال تختلف الإجابة من طالب إلى آخر ويجب التأكيد على ناحيتين، الأولى بخصوص عدم تكرار الرقم في المجموعة، والثانية المجموعة هي مجموعة ترتيبية

....

رابعاً. أوجد كل من المعادلة المختزلة والمعادلة العامة للمستوي المار بالنقطة (5,0,-2)، والذي يقبل الشعاع(10,5,6) ناظماً له. ثم أوجد كل من المعادلة المختزلة والمعادلة العامة للمجسم الناقصي (البيضوي) الذي مركزه النقطة (7,4,-2)، وأنصاف أقطاره 2 و 3 و 7. ثم احسب المسافة بين مركز المجسم الناقصي والمستوي السابق. 20 درجة

لإيجاد المعادلة المختزلة والمعادلة العامة للمستوي المار بالنقطة (2−,5,0) والذي يقبل الشعاع (10,5,6) ناظماً له، نتبع الخطوات التالية:

1. المعادلة العامة للمستوي:

المعادلة العامة للمستوي يمكن كتابتها كالتالي:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

حيث (A, B, C) هو الشعاع الناظم للمستوي. بالنظر إلى الشعاع المعطى (10, 5, 6)، نأخذ:

$$A = 10 ،B = 5 ،C = 6$$

الآن، نستخدم النقطة (5, 0, 2−) لتعويضها في المعادلة:

$$D = 0 + (2-)6 + (0)5 + (5)10$$

نحسب الناتج:

$$D = 0 + 12 - 0 + 50$$

وبالتالي:

$$D = -38$$

لذا، المعادلة العامة للمستوي هي:

المعادلة المختزلة للمستوي:

x + 5y + 6z - 38 = 010

يمكن كتابة المعادلة المختزلة للمستوي بعد ترتيبها:

x + 5y + 6z = 3810

3. المعادلة المختزلة للمجسم الناقصي (البيضوي):

المعادلة للمجسم الناقصي (البيضوي) الذي مركزه النقطة (7, 4, −2) وأنصاف أقطاره 2 و3 و7 هي كالتالي:

(\frac{(x-7)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} + \frac{(z+2)^2}{7^2} = 1\)\

يمكن كتابة المعادلة المختزلة كما يلي:

(\frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} + \frac{(z+2)^2}{49} = 1\)\

4. حساب المسافة بين مركز المجسم الناقصي والمستوي:

لحساب المسافة بين مركز المجسم الناقصي (7, 4, −2) والمستوي، نستخدم العلاقة:

المسافة = (\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\)\

حيث (x_0, y_0, z_0) هو مركز المجسم الناقصي، و(A, B, C, D) هي معاملات المستوي.

نقوم بالتعويض:

D = -38 ،C = 6 ،B = 5 ،A = 10

المركز (7, 4, −2):

المسافة = (\}{2^6 + 2^5 + 2^10}frac{|10(7) + 5(4) + 6(-2) - 38|}{\sqrt\)\

نحسب:

= (\}{36 + 25 + 100}frac{|70 + 20 - 12 - 38|}{\sqrt\)\

= (\}{161}frac{|40|}{\sqrt\)\

= (\}{161}frac{40}{\sqrt\)\

وبذلك، المسافة بين مركز المجسم الناقصي والمستوي هي:

$$\frac{40}{\sqrt{161}}$$

....

خامساً. بيّن لأي شكل هندسي في الفراغ تعود المعادلة التالية: 14 درجة

$$7x^2+7y^2-11.2z+28=28x-14y-7z^2-10.36$$

لنبدأ بتبسيط المعادلة المعطاة:

المعادلة هي:

$$7x^2 + 7y^2 - 11.2z + 28 = 28x - 14y - 7z^2 - 10.36$$

نقوم بنقل جميع الحدود إلى جهة واحدة من المعادلة:

$$7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 28x + 14y - 11.2z + 28 + 10.36 = 0$$

ثم نجمع الحدود الثابتة:

$$7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 28x + 14y - 11.2z + 38.36 = 0$$

الآن، نقوم بتقسيم المعادلة على 7 لتبسيطها:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - \frac{11.2}{7}z + \frac{38.36}{7} = 0$$

نبدأ بإكمال المربع لكل من x، y، و z:

بالنسبة لـ **x**:

$$x^2 - 4x \rightarrow (x-2)^2 - 4$$

بالنسبة لـ **y**:

$$y^2 + 2y \rightarrow (y+1)^2 - 1$$

بالنسبة لـ **z**:

\[

}(نحتاج الى إكمال المربع هنا)z^2 - \frac{11.2}{7}z \rightarrow z^2 - \frac{11.2}{7}z

= \left(z - \frac{11.2}{14}\right)^2 - \left(\frac{11.2}{14}\right)^2

\]

بعد إجراء هذه التعديلات، يمكننا كتابة المعادلة بشكلها المكمل. ولكن دعنا نقوم بتجميع النواتج:

وبإعادة الترتيب نلاحظ بأن المعادلة تمثل معادلة مكورة في الفراغ.

....

سادساً. برهن صحة العلاقة المجموعية التالية بطريقتين مختلفتين: 20 درجة

$$((A \cap C^*) \cup (B \cap C^*)) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (C \cap D^*)^*$$

يمكن حل السؤال بعدة طرق ويجري اختيار طريقتين مثل استعمال القوانين الجبرية متضمة علاقات دمورغان، إضافة لاستعمال جدول الحقيقة ويأخذ الطالب عشر درجات عن كل طريقة.

....

....

مع التمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر: د. مروان الراعي