1

2025 - ف2 - ت2 - ر2 - ثانوية - الشعب العلمية

I - (ع30) - 1 - المعادلة المميزة:

$r^2+4.r+4=0$

$\Delta = 4^2-4\times 1 = 16-16 = 0$

$r_1 = r_2 = -2 \Rightarrow x_h(t) = (A+B.t).e^{-2.t}$, $A, B \in \mathbb{R}$

2 - الصيغة العامة للحل:

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$x_h(t)$: الحل العام للمعادلة التفاضلية

$x_p(t)$: حل خاص للمعادلة التفاضلية.

3 - نتحقق أن الحلين الأساسيين: Wronksien

$x_1(t) = e^{-2.t}$; $x_2(t) = t.e^{-2.t}$

$x_1'(t) = -2.e^{-2.t}$; $x_2'(t) = e^{-2.t}.(1-2.t)$

$W(t) = x_1(t).x_2'(t) - x_2(t).x_1'(t)$

$W(t) = e^{-2.t}.e^{-2.t}.(1-2.t) - t.e^{-2.t}.(-2.e^{-2.t})$

$W(t) = e^{-4.t}.(1-2.t) + 2.t.e^{-4.t} = e^{-4.t}.(1-2.t+2t)$

$W(t) = e^{-4.t} \neq 0$

يمكن أن نطبق طريقة تغاير الوسائط

$x_p(t) = v_1(t).x_1(t) + v_2(t).x_2(t)$.

يجب حساب المشتقات v_1, v_2 أن تحقق:

$v_1'(t).x_1(t) + v_2'(t).x_2(t) = 0$

$v_1'(t).x_1'(t) + v_2'(t).x_2'(t) = f(t) = e^{-2.t}.\ln t$

نحسب أولا من أجل: v_1', v_2'

$x_1(t) = e^{-2.t}$

$x_2(t) = t.e^{-2.t}$

$x_1'(t) = -2.e^{-2.t}$; $x_2'(t) = e^{-2.t}.(1-2.t)$

2

$$v_1' \cdot e^{-2t} + v_2' \cdot t \cdot e^{-2t} = 0$$

$$v_1' \cdot (-2 \cdot e^{-2t}) + v_2' \cdot e^{-2t} \cdot (1 - 2t) = e^{-2t} \cdot \sin t$$

نضرب كل المعادلة في $\exp(-2t)$:

$$v_1' + t \cdot v_2' = 0$$

$$-2 \cdot v_1' + (1 - 2t) \cdot v_2' = \sin t$$

من المعادلة الأولى:

$$v_1' = -t \cdot v_2'$$

نعوض في المعادلة الثانية:

$$-2t - (-t \cdot v_2') + (1 - 2t) \cdot v_2' = \sin t$$

إذن:

$$(2t + (-2t)) \cdot v_2' = \sin t$$

$$v_2'(t) = \sin t$$

$$v_1'(t) = -t \cdot \sin t$$

بالتكامل:

$$v_2(t) = \int dt \cdot \sin t = -\cos t + C_2$$

حيث C_2 ثابت نختاره $= 0$ لتبسيط الحل، نجد v_1:

$$v_1(t) = -\int dt \cdot t \cdot \sin t$$

إذن:

$$v_1(t) = t \cdot \cos t - \sin t - C_1$$

$$v_1(t) = t \cdot \cos t - \sin t + C_1$$

$$v_2(t) = -\cos t + C_2$$

نكتب الحل الخاص:

$$x_p(t) = v_1(t) \cdot x_1(t) + v_2(t) \cdot x_2(t)$$

$$x_p(t) = (t \cdot \cos t - \sin t) \cdot e^{-2t} + (-\cos t) \cdot t \cdot e^{-2t}$$

$$x_p(t) = -\sin t \cdot e^{-2t}$$

4. الحل العام:

$$x(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-2t} - \sin t \cdot e^{-2t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Scanned with CamScanner

(3) $x(t) = e^{-2t} \cdot (A + Bt - \sin t)$

IVP حل

$x(0) = 0 \; ; \; x'(0) = 1$

$x(0) = (A + B \cdot (0)) \cdot e^0 - \sin(0) \cdot e^0 = A - 0 = A$

$A = 0$

$x'(t) = \frac{d}{dt}\left\{(A + Bt - \sin t) \cdot e^{-2t}\right\}$

$\frac{d}{dt}(A + Bt) \cdot e^{-2t} = B \cdot e^{-2t} + (A + Bt) \cdot (-2) \cdot e^{-2t}$

$\frac{d}{dt}(A + Bt) \cdot e^{-2t} = e^{-2t} \cdot (B - 2A - 2Bt)$

$\frac{d}{dt}(-\sin t \cdot e^{-2t}) = -\cos t \cdot e^{-2t} + \sin t \cdot 2 \cdot e^{-2t}$

$\frac{d}{dt}(-\sin t \cdot e^{-2t}) = e^{-2t} \cdot (-\cos t + 2 \sin t)$

$x'(t) = e^{-2t} \cdot (B - 2A - 2Bt - \cos t + 2 \sin t)$

$x'(0) = e^0 \cdot (B - 2A - 2B \cdot (0) - \cos(0) + 2 \sin(0))$

$x'(0) = 1 = B - 2A - 1 \Rightarrow B = 2A + 2$

$A = 0 \Rightarrow B = 2$

لبعض الحالات نحل بالطريقة التالية :

$x(t) = e^{-2t} \cdot (2t - \sin t)$

Scanned with CamScanner

4 $x'' + 4.x' + 4.x = 3.e^{-2.t}$ (1.25)

$x_h(t) = (A + B.t).e^{-2.t}$

نبحث عن $x_p(t)$ بحيث أن:

$f(t) = 3.e^{-2.t}$

نلاحظ أن $e^{-2.t}$ هو جزء من الحل العام، لذلك نفترض طريقة المعاملات الغير محددة أن نضرب بـ t^2 من أجل الحصول على حل خاص من الشكل:

$x_p(t) = C.t^2.e^{-2.t}$

نبحث عن x'_p ، x''_p:

$x'_p = C.\frac{d}{dt}(t^2.e^{-2.t}) = C.e^{-2.t}.(2.t - 2.t^2)$

$x''_p(t) = C.\frac{d}{dt}[e^{-2.t}.(2.t - 2.t^2)]$

$x''_p(t) = C.e^{-2.t}.(4.t^2 - 8.t + 2)$

نعوض في المعادلة الغير متجانسة:

$x''_p + 4.x'_p + 4.x_p = 3.\exp(-2.t)$

نضع $C.e^{-2.t}$ كعامل مشترك. نجد بأن:

$C.e^{-2.t} \times 2 = 3.e^{-2.t} \Rightarrow C = \frac{3}{2}$

بالتالي إذن الحل العام للمعادلة الغير متجانسة:

$x(t) = (A + t.B).e^{-2.t} + \frac{3}{2}.t^2.e^{-2.t}$

$x(0) = (A + B.(0)).e^0 + \frac{3}{2}.(0)^2.e^0 = A + 0 = A$

$A = 2$

$x' = \frac{d}{dt}\left[(A + B.t).e^{-2.t} + \frac{3}{2}.t^2.e^{-2.t}\right]$

$x'(t) = e^{-2.t}.(B - 2.A - 2.B.t + 3.t - 3.t^2)$

Scanned with CamScanner

5 $x'(0) = e^0 \cdot (B - 2.A - 0 + 0 - 0) = B - 2.A$

$x'(0) = 0 \Rightarrow B = 2.A \Rightarrow B = 4$

ن الحل الخاص الذي يحقق شرط البدء:

$$x(t) = (2 + 4.t).e^{-2.t} + \frac{3}{2}.t^2.e^{-2.t}$$

Scanned with CamScanner

(6) $y' = f(x,y) = \frac{-3 \cdot x \cdot y}{1 + x^2 + 4 \cdot y^2}$; $y(0) = 1$ (0.25)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3 \cdot x \cdot y}{1 + x^2 + 4 \cdot y^2} \Rightarrow (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot dy = -3 \cdot x \cdot y \cdot dx$$

$$3 \cdot x \cdot y \cdot dx + (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot dy = 0$$

$M(x,y) = 3 \cdot x \cdot y$; $N(x,y) = 1 + x^2 + 4 \cdot y^2$

$$M(x,y) \cdot dx + N(x,y) \cdot dy = 0$$

هل المعادلة تفاضلية تامة؟ سوف نتأكد:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 \cdot x \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \cdot x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

إذن المعادلة ليست تفاضلية تامة دقيقة. سوف نبحث إذن عن عامل تكامل $\mu(x)$ بحيث إذا ضُرب بالمعادلة تصبح تفاضلية تامة. نضرب إذن المعادلة بـ $\mu(x)$:

$$\mu(x) \cdot M(x,y) \cdot dx + \mu(x) \cdot N(x,y) \cdot dy = 0$$

حتى تكون المعادلة الناتجة معادلة تفاضلية دقيقة يجب أن يتحقق الشرط:

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x) \cdot M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x) \cdot N(x,y)]$$

$$\mu(x) \cdot \frac{\partial M}{\partial y} = \mu'(x) \cdot N(x,y) + \mu(x) \cdot \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\mu(x) \cdot \frac{\partial M}{\partial y} - \mu(x) \cdot \frac{\partial N}{\partial x} = \mu'(x) \cdot N(x,y)$$

نقسم على $\mu \cdot N$:

$$\frac{1}{N} \cdot \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \frac{\mu'}{\mu}$$

نفرض المتغير الجديد وكذلك N:

(7)

$$\frac{3.x-2.x}{1+x^2+4.y^2}=\frac{\mu'}{\mu}\Leftrightarrow\frac{x}{1+x^2+4.y^2}=\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}$$

نلاحظ أن الطرف اليساري يتبع لـ x و y بينما الطرف اليميني يتبع متغير x. لذلك يجب أن يكون عامل تكامل يتبع متغير y أي $\mu=\mu(y)$. نتبع نفس الخطوات أي نضرب المعادلة بـ $\mu(y)$:

$$M(x,y).dx+N(x,y).dy=0$$

$$\mu(y).M(x,y).dx+\mu(y).N(x,y).dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y).M(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[\mu(y).N(x,y)]$$

$$\mu'(y).M(x,y)+\mu(y).\frac{\partial M}{\partial y}=\mu(y).\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$$

$$\mu(y).\frac{\partial N}{\partial x}-\mu(y).\frac{\partial M}{\partial y}=\mu'(y).M(x,y)$$

نقسم الطرفين على $\mu(y).M$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}$$

نعوض المشتقات و M:

$$\frac{2.x-3.x}{3.x.y}=\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\Leftrightarrow-\frac{1}{3.y}=\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}$$

نلاحظ الآن أن الطرف اليساري يتبع لـ y فقط. نكامل الطرفين:

$$-\frac{1}{3}.\int\frac{dy}{y}=\int dy.\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\int dy.\frac{1}{\mu}.\frac{d\mu}{dy}=\int\frac{d\mu}{\mu}$$

$$Ln|\mu(y)|=-\frac{1}{3}.Ln|y|+C\Rightarrow Ln|\mu|=Ln\left(\frac{1}{|y|}\right)^{1/3}+C$$

Scanned with CamScanner

8) $\mu(y) = e^{c} \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{y}\right)^{1/3}} = K \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^{1/3}$

$\mu(y) = K \cdot y^{-1/3}$

وجدنا إذن معامل المكاملة الذي يجعل المعادلة تفاضلية تامة.

نضرب الآن المعادلة بهذا المعامل:

$y^{-1/3} \cdot 3 \cdot x \cdot y \cdot dx + y^{-1/3} \cdot (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot dy = 0$

$3 \cdot x \cdot y^{2/3} \cdot dx + (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot y^{-1/3} \cdot dy = 0$

$\tilde{M}(x,y) = 3 \cdot x \cdot y^{2/3}$; $\tilde{N}(x,y) = (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot y^{-1/3}$

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 3 \cdot x \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{\frac{2}{3}-1} = 2 \cdot x \cdot y^{-1/3}$

$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y^{-1/3}$

إذن:

$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial y} = 2x \cdot y^{-1/3}$; $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot y^{-1/3}$

نلاحظ أن المعادلة محققة إذن فهي تفاضلية تامة. نبحث عن تكاملها العام $\phi(x,y)$ بحيث:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \tilde{M} = 3 \cdot x \cdot y^{2/3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \tilde{N} = (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot y^{-1/3} \end{cases}$$

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3 \cdot x \cdot y^{2/3} \xrightarrow{\text{Integration}} \phi(x,y) = \int 3 \cdot x \cdot y^{2/3} \cdot dx$

$\phi(x,y) = 3 \cdot y^{2/3} \int x \cdot dx$

Scanned with CamScanner

[9] $\phi(x,y) = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y^{2/3} + h(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{2/3-1} + h'(y)$

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^2 \cdot y^{-1/3} + h'(y)$

ولكن:

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot y^{-1/3}$

نظائر:

$x^2 \cdot y^{-1/3} + h'(y) = (1 + x^2 + 4 \cdot y^2) \cdot y^{-1/3}$

$h'(y) = y^{-1/3} + x^2 \cdot y^{-1/3} + 4 \cdot y^2 \cdot y^{-1/3} - x^2 \cdot y^{-1/3}$

$h'(y) = \frac{dh(y)}{dy} = y^{-1/3} + 4 \cdot y^{5/3}$

$h(y) = \int y^{-1/3} \cdot dy + 4 \cdot \int y^{5/3} \cdot dy$

$h(y) = \frac{3}{2} \cdot y^{2/3} + 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot y^{8/3} + C$

$h(y) = \frac{3}{2} \cdot y^{2/3} + \frac{3}{2} \cdot y^{8/3} + C$

إذن:

$\phi(x,y) = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot y^{2/3} + \frac{3}{2} \cdot y^{2/3} + \frac{3}{2} \cdot y^{8/3} = K$

نستعمل الشرط البدئي:

$\Leftarrow x = 0 \; ; \; y(x=0) = 1$

$\frac{3}{2} (1)^{2/3} + \frac{3}{2} (1)^{8/3} = K \Rightarrow K = 3$

$y^{2/3} \cdot (1 + x^2) + y^{8/3} = 2$

Scanned with CamScanner

10) $t \cdot x' + 2 \cdot x = \sin t \quad ; \quad x(1) = 3$

$$x' + \frac{2}{t} \cdot x = \frac{\sin t}{t}$$

$$\mu(t) = \exp\left(\int \frac{2}{t} \cdot dt \right) = \exp[2 \cdot \ln|t|] = t^2$$

نضرب الطرفين بـ t^2:

$$t^2 \cdot x' + 2 \cdot t \cdot x = t \cdot \sin t$$

$$t^2 \cdot x' + 2 \cdot t \cdot x = \frac{d}{dt}(t^2 \cdot x)$$

$$\frac{d}{dt}(t^2 \cdot x) = t \cdot \sin t \Rightarrow t^2 \cdot x = \int t \cdot \sin(t) \cdot dt + C$$

$$t^2 \cdot x = -t \cdot \cos t + \sin t + C$$

$$x(t) = \frac{-t \cdot \cos t + \sin t + C}{t^2}$$

$$x(1) = 3 = \frac{-1 \cdot \cos(1) + \sin(1) + C}{1^2} = -\cos(1) + \sin(1) + C = 3$$

$$C = 3 + \cos(1) - \sin(1)$$

$$x(t) = \frac{-t \cdot \cos t + \sin t + 3 + \cos(1) - \sin(1)}{t^2}$$

Scanned with CamScanner