II- حركة جسم في حقل مركزي (50 نقطة)

1- معادلة E.L المتعلقة بالإحداثية φ:

(1.5)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0$$

$$L=L(r,\dot{r},\dot{\varphi}) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi}=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=cst=\ell$$

حيث ℓ ثابت حركة. يمكن أن نكتب باستغلال تـ Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left\{\frac{m}{2}.\left[(\dot{r})^2+r^2.(\dot{\varphi})^2\right]-V(r)\right\}=m.r^2.\dot{\varphi}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}&=\ell\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}&=m.r^2.\dot{\varphi}\end{aligned}\right\} \Rightarrow m.r^2.\dot{\varphi}=\ell=cste$$

يمكن التعبير عن ثابت الحركة ℓ بدلالة طويلة العزم الحركي:

$$\vec{\ell}=\vec{r}\wedge m.\dot{\vec{r}}=(x.\vec{e}_1+y.\vec{e}_2)\wedge m.(\dot{x}.\vec{e}_1+\dot{y}.\vec{e}_2)$$

$$\vec{\ell}=m.(x.\dot{y}-y.\dot{x}).\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{\ell}^{\,2}=m^2.(x.\dot{y}-y.\dot{x})^2$$

وباستعمال العلاقات المثلثية الكرية نجد أن $\vec{\ell}^{\,2}$ يكتب على الشكل:

$$\vec{\ell}^{\,2}=\left[m.r^2.\dot{\varphi}\right]^2 \Rightarrow \ell=|\vec{\ell}|=m.r^2.\dot{\varphi}$$

إذن لدينا:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=m.r^2.\dot{\varphi}=\ell=|\vec{\ell}|=cste$$

$$\vec{\ell}=\vec{r}\wedge m.\dot{\vec{r}}$$

معادلة E.L المتعلقة بالإحداثية r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{m}{2}.\left[(\dot{r})^2+r^2.(\dot{\varphi})^2\right]-V(r)\right\}=m.r.(\dot{\varphi})^2-\frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=m.\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)=m.\ddot{r}$$

نحصل في الأخير على معادلة E.L المتعلقة بـ r:

Scanned with CamScanner

$$m\ddot{r} - m r (\dot{\varphi})^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0$$

نستنتج معادلة E.L. الخاصة بـ φ:

$$m r^2 \dot{\varphi} = \ell \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\ell}{m r^2}$$

$$m\ddot{r} - m r \frac{\ell^2}{m^2 r^4} + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m r^3} + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0}$$

2- هاملتوني الجملة: ⑤

$$H = \sum_{i=1}^{\wedge} \dot{q}_i \cdot P_i - L \qquad i = 1,2 \rightarrow r, \varphi$$

$$H = \dot{r} \cdot P_r + \dot{\varphi} \cdot P_\varphi - \left\{ \frac{m}{2} \cdot \left[(\dot{r})^2 + r^2 \cdot (\dot{\varphi})^2 \right] - V(r) \right\}$$

P_r و P_φ عبارة عن صابن العزم العمية، صابن $\dot{r}$ و $\dot{\varphi}$ بدلالة مركبة العزم:

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left\{ \frac{m}{2} \cdot \left[(\dot{r})^2 + r^2 \cdot (\dot{\varphi})^2 \right] - V(r) \right\} = m \cdot \dot{r}$$

$$\boxed{P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \cdot \dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{P_r}{m}}$$

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left\{ \frac{m}{2} \cdot \left[(\dot{r})^2 + r^2 \cdot (\dot{\varphi})^2 \right] - V(r) \right\} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}$$

$$\boxed{P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{m \cdot r^2}}$$

نعوض في صابن تابع هاملتون:

$$H = \frac{P_r}{m} \cdot P_r + \frac{P_\varphi}{m \cdot r^2} \cdot P_\varphi - \frac{m}{2} \cdot \left[\frac{P_r^2}{m^2} + r^2 \cdot \frac{P_\varphi^2}{m^2 \cdot r^4} \right] + V(r)$$

$$\boxed{H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2 \cdot m \cdot r^2} + V(r)}$$

3- المعادلات القانونية للحركة: ⑮

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad ; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{\partial}{\partial P_r} \left\{ \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2 \cdot m \cdot r^2} + V(r) \right\} = \frac{P_r}{m}$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2 \cdot m \cdot r^2} + V(r) \right\}$$

Scanned with CamScanner

$$\dot{P}_r = -\frac{P_\varphi^2}{2m}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\dot{P}_r = \frac{P_\varphi^2}{m\cdot r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} = \frac{\partial}{\partial P_\varphi}\left\{\frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2m\cdot r^2} + V(r)\right\} = \frac{P_\varphi}{m\cdot r^2}$$

$$\dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\left\{\frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\varphi^2}{2m\cdot r^2} + V(r)\right\}$$

$$\dot{P}_\varphi = -\frac{P_\varphi}{m\cdot r^2}\cdot\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial P_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[m\cdot r^2\cdot\dot{\varphi}\right] = 0 \Rightarrow \dot{P}_\varphi = 0 \Rightarrow P_\varphi = cste$$

إذن نكتب المعادلات القانونية للحركة على الشكل التالي:

المعادلات القانونية للحركة

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{P_r}{m}$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\varphi^2}{m\cdot r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{m\cdot r^2}$$

$$\dot{P}_\varphi = 0 \Rightarrow P_\varphi = cste$$

4- نشتق بالنسبة للزمن عبارة $\dot{r}$ أي المعادلة القانونية الأولى: (5)

$$\frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_r}{m}\right) \Rightarrow \ddot{r} = \frac{\dot{P}_r}{m} \Rightarrow m\cdot\ddot{r} = \dot{P}_r$$

نستخرج المعادلة القانونية الثانية:

$$\left.\begin{aligned} m\cdot\ddot{r} &= \dot{P}_r \\ \dot{P}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{P_\varphi^2}{m\cdot r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{m\cdot\ddot{r} = \frac{P_\varphi^2}{m\cdot r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r}}$$

Scanned with CamScanner

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} &= \frac{P_\varphi^2}{m r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \\ m\ddot{r} &= \frac{l^2}{m r^3} - \frac{\partial V(r)}{\partial r} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_\varphi^2 = l^2 \Rightarrow \boxed{P_\varphi = l}$$ -5 (5)

6- ⑥ في حالة تماثل Poisson، إذا أثبتنا $F \equiv l_z$ يكون:

$$\left.\begin{aligned} F &\equiv l_z \\ \frac{dF}{dt} &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dl_z}{dt} = \dot{l}_z = \{l_z, H\} + \frac{\partial l_z}{\partial t}$$

ولكن l_z لا تتغير بشكل واضح لذلك فإن:

$$l_z = x \cdot P_y - y \cdot P_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} l_z = 0$$

إذن:

$$\frac{dl_z}{dt} = \dot{l}_z = \{l_z, H\}$$

بالإضافة لذلك، إذا كان l_z ثابت حركة فإن متغير بالنسبة للزمن صفر. إذن:

$$\left.\begin{aligned} l_z &= \text{constant of motion} \Rightarrow \frac{dl_z}{dt} = 0 \\ \frac{dl_z}{dt} &= \dot{l}_z = \{l_z, H\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{l}_z = \{l_z, H\} = 0$$

$$\boxed{\text{if } l_z = \text{constant of motion} \Rightarrow \dot{l}_z = \{l_z, H\} = 0}$$

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_{i=1}^{\wedge} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial P_i} - \frac{\partial A}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

$$\{l_z, H\} = \left[\frac{\partial l_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial P_x} - \frac{\partial l_z}{\partial P_x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial l_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial P_y} - \frac{\partial l_z}{\partial P_y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot P_y - y \cdot P_x \right] = P_y$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x \cdot P_y - y \cdot P_x \right] = -P_x$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{\partial l_z}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x}[x\cdot p_y - y\cdot p_x] = -y$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial p_y} = \frac{\partial}{\partial p_y}[x\cdot p_y - y\cdot p_x] = x$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p_x}\left\{\frac{1}{2\cdot m}\cdot(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y)\right\} = \frac{p_x}{m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial}{\partial p_y}\left\{\frac{1}{2\cdot m}\cdot(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y)\right\} = \frac{p_y}{m}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2\cdot m}\cdot(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y)\right\} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{2\cdot m}\cdot(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y)\right\} = \frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$

نفرض هـ. التالي بين بـ: $\{l_z, H\}$

$$\dot{l}_z = \frac{dl_z}{dt} = \{l_z, H\} = 0$$

$$\frac{p_y\cdot p_x}{m} - \frac{p_x\cdot p_y}{m} + y\cdot\frac{\partial V}{\partial x} - x\cdot\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y\cdot\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) - x\cdot\frac{\partial}{\partial y}V(x,y) = 0}$$

f l_z = constant of motion $\Rightarrow \dot{l}_z = \{l_z, H\} = 0 \Rightarrow$

$$y\cdot\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) - x\cdot\frac{\partial}{\partial y}V(x,y) = 0$$

② الحل الرياضي العام: الحل الرياضي العام الممكن هو أن يتبع $V(x,y)$ ② للمتغيرات x، y من خلال الكمية (x^2+y^2) أي أن:

$$V(x,y) = f_1(x^2+y^2)$$

7- الطاقة الحركية لأي جسيم ناتجة أي تتكون من كون. إذن ③

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(r) \Rightarrow F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \; ; \; F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

نفرض أن عكس: $\dot{L}_z = [L_z, H] = 0$:

$$-F_x \cdot y + F_y \cdot x = 0$$

$$x \cdot F_y - y \cdot F_x = 0 \iff \boxed{(\vec{r} \wedge \vec{F})_z = \vec{e}_z \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F}) = 0}$$

نتوافق هذه النتيجة تماماً مع الميكانيك الكلاسيكي الشامي الأساسي.

د. نبيل حمودة

END

$\frac{50}{100}$ العلامة

سلم تنقيط - سنة ثانية فيزياء - ميكانيك تحليلي

27.08.2025 الفصل الثاني

15+20+15=50

Q1

1- الحركة في كمون متناظر كرويا.

15

متجه الموضع $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r$

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{e}_r + \frac{d\hat{e}_r}{dt} r(t)$

$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi}\dot{\phi} + \frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}\dot{\theta}$

$= (-\sin\theta\sin\phi\,\hat{e}_x + \sin\theta\cos\phi\,\hat{e}_y)\dot{\phi} + (\cos\theta\cos\phi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z)\dot{\theta}$

$= \sin\theta\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi + \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{e}_r + (r\sin\theta\,\dot{\phi})\hat{e}_\phi + (r\dot{\theta})\hat{e}_\theta$ 5

$\mathcal{L}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, t) = T - U$

$= \frac{1}{2}mv^2 - U(r, t)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) - U(r, t)$ 5

الإحداثي الحلقي هو ϕ حيث أن $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

$\Rightarrow \ell_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{\phi}r^2\sin^2\theta = const$ 5

المركبة z للاندفاع الزاوي

بسبب التناظر الكروي للمسألة يمكن وضع المحور OZ في اتجاه اختياري بدون أن يتغير شكل $\mathcal{L}$ وبالتالي كل مركبة للاندفاع الزاوي محفوظة

$\vec{\ell} = m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = const.$

2- شرطي القيد

20

$2\begin{cases} g_1(\vec{r}, t) = x\sin\alpha - z\cos\alpha \\ g_2(\vec{r}, t) = y = 0 \end{cases}$

$\mathcal{L}G\text{-}I : m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{e}_z + \lambda_1\vec{\nabla}g_1 + \lambda_2\vec{\nabla}g_2$

$m\ddot{x} = \lambda_1\sin\alpha \qquad m\ddot{y} = \lambda_2 \qquad m\ddot{z} = -\lambda\cos\alpha - mg$

Scanned with CamScanner

اشتقاق معادلات القيد مرتين

$\ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha = 0, \quad \ddot{y} = 0$

$\lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \sin^2\alpha + \lambda_1 \cos^2\alpha + mg\cos\alpha = 0,$

$\Rightarrow \lambda_1 = -mg\cos\alpha$

نعوض في معادلات الحركة

$m\ddot{x} = -mg\cos\alpha\sin\alpha, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg\sin^2\alpha$

وبالمكاملة

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha\cos\alpha + a_1 t + a_2 \\ y(t) = b_1 t + b_2 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin^2\alpha + c_1 t + c_2 \end{cases}$$

تحديد ثوابت التكامل بحيث تحقق الشروط الابتدائية وشروط القيد

$(a_1\sin\alpha - c_1\cos\alpha)t + (a_2\sin\alpha - c_2\cos\alpha) = 0 \qquad b_1 t + b_2 = 0$

وباعتبار المعادلات أعلاه محققة مهما كان أي قيمة لـ t عندها

$$\begin{cases} a_1\sin\alpha - c_1\cos\alpha = 0 & b_1 = 0 \\ a_2\sin\alpha - c_2\cos\alpha = 0 & b_2 = 0 \end{cases}$$

وبوضع

$$\begin{cases} a_1 = v_0\cos\alpha & c_1 = v_0\sin\alpha \\ a_2 = s_0\cos\alpha & c_2 = s_0\sin\alpha \end{cases}$$

وأكمل بقية المتوافقة مع شروط القيد

$$\begin{cases} x(t) = s(t)\cos\alpha \\ y(t) = 0 \\ z(t) = s(t)\sin\alpha \end{cases}, \quad s(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0 t + s_0$$

لإيجاد قوة القيد

$$\vec{F}_2 = \lambda_1\vec{\nabla}g_1 + \lambda_2\vec{\nabla}g_2$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = (-mg\sin\alpha\cos\alpha)\hat{e}_x + (mg\cos^2\alpha)\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow F_2 = mg\cos\alpha$$

Scanned with CamScanner

2 [ϕ والزاوية r الطول ℓ بدلالة الكمية T عبارة

$$\Rightarrow T = \frac{M}{2}\dot{s}^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

$$= \frac{M}{2}\left[\frac{d}{dt}(\ell - r)\right]^2 + \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)$$

$$= \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2$$

بفرض أن مستوى m هو المستوى المرجعي للطاقة الكامنة للجاذبية

$$U = -Mgs = Mg(r - \ell)$$

$$\Rightarrow L = T - U = \frac{M+m}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\phi}^2 - Mg(r - \ell)$$

$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi$ إحداثي حلقي

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = const$$

مقدار محفوظ (الاندفاع الزاوي للكتلة m في المستوى).

ومعادلة الحركة بالنسبة لـ r

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow$$

$$(M+m)\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + Mg = 0$$

M تتسارع نحو الأعلى $\Leftrightarrow \ddot{r} > 0 \Leftrightarrow mr\dot{\phi}^2 > Mg$.

Scanned with CamScanner