معهد التكوين والخبرة - لطلبة السنة الثالثة جيوفيزياء
(0350) العقود الزمنية والتنبؤ - السداسي الثاني - 2025 - أجوبة الفرض الثاني

السؤال الأول (20 نقطة)
(10 دقائق لكل تكامل)

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^{3x})^2}\,dx$$

نفرض: $e^{3x} = t$ أي $e^x = t^{1/3}$

بالمفاضلة نجد: $dx = \frac{1}{3} t^{-1}\,dt$

بالتعويض في التكامل مع ملاحظة أن حدود التكامل أصبحت من 0 إلى $+\infty$:

$$I_1 = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \frac{t^{-1/3}}{(1+t)^2}\,dt$$

بالمقارنة مع الشكل التكاملي للتابع البيتاوي نجد:

$$I_1 = \frac{1}{3}\beta(2/3, 4/3)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\Gamma(2/3)\cdot\Gamma(4/3)}{\Gamma(2)}$$

$\Gamma(2) = 1! = 1$ ، $\Gamma(4/3) = \frac{1}{3}\Gamma(1/3)$

إذن:

$$I_1 = \frac{1}{9}\Gamma(2/3)\cdot\Gamma(1/3)$$

$$= \frac{1}{9}\Gamma(1/3)\cdot\Gamma(1-1/3)$$

$$I_1 = \frac{1}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل باستعراض $e^x = t$

$$I_2 = \int_0^{\infty} (1-x^2)^2\,dx$$

نفرض: $x^2 = t$ أي $x = t^{1/2}$

بالمفاضلة نجد: $dx = \frac{1}{2} t^{-1/2}\,dt$

بالتعويض في التكامل مع ملاحظة أن الحدود لا تتغير:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (1-t)^2\, t^{-1/2}\,dt$$

بالمقارنة مع الشكل العام للتابع البيتاوي نجد:

$$I_2 = \frac{1}{2}\beta(1/2, 3) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)}$$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ، $\Gamma(3) = 2! = 2$

$$\Gamma(7/2) = \Gamma(1+5/2) = \frac{5}{2}\Gamma\frac{5}{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$$

$$= \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

بالتعويض في $I_2$ نجد أخيراً:

$$I_2 = \frac{8}{15}$$

2/ السؤال الثاني (10 درجات)

① عدد مركبات $G$ هو: $5^2 = 25$

الطلب الأول

- $G^{ij} = G(e^i, e^j) = e^i \cdot e^j$ ①

- $G^i{}_j = G(e^i, e_j) = e^i \cdot e_j = \delta^i{}_j$ ①

- $G_j{}^i = G(e_j, e^i) = e_j \cdot e^i = \delta_j{}^i$ ①

- $G_{ij} = G(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j$ ①

الطلب الثاني 2

- $v \cdot e^i = (v^j e_j) \cdot e^i = v^j (e_j \cdot e^i) = v^j \delta_j{}^i = v^i$ ①

- $v \cdot e_j = (v_i e^i) \cdot e_j = v_i (e^i \cdot e_j) = v_i \delta^i{}_j = v_j$ ①

- $v^i = v \cdot e^i = (v_j e^j) \cdot e^i = v_j (e^i \cdot e^j) = v_j \cdot G(e^i, e^j) = v_j G^{ij}$ ①

- $v_i = v \cdot e_i = (v^j e_j) \cdot e_i = v^j (e_i \cdot e_j) = v^j G(e_i, e_j) = v^j G_{ij}$

- $G^{ij} = G(e^i, e^j) = e^i \cdot e^j = e^j \cdot e^i = G(e^j, e^i) = G^{ji}$ ①

Scanned with CamScanner

# السؤال الثاني (2020)

## -I-

**الجزء 1:**

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$$-\pi \le x \le +\pi$$

نعوض $x = 0$ فنجد:

$$f(x=0) = 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

ينتج:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{3}$$

إذن:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \right)$$

نعوض $x = \pi$ فنجد:

$$f(x=\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(\pi n)$$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & n \text{ فردي} \\ +1 & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$(-1)^n \cos(n\pi) = \begin{cases} +1 & n \text{ فردي} \\ +1 & n \text{ زوجي} \end{cases}$$

إذن:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

ينتج:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right|$$

## -II-

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\ell/2 \le x \le \ell/2 \\ 0 & \text{باقي الحالات} \end{cases}$$

**الجزء 1:**

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} e^{-ikx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-\ell/2}^{+\ell/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ik\frac{\ell}{2}} - e^{+ik\frac{\ell}{2}}}{-ik}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$= \frac{\ell}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\frac{k\ell}{2}}{\frac{k\ell}{2}} = \frac{\ell}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\ell}{2}\right)$$

إذن:

$$\left( \hat{f}(k) = \frac{\ell}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Sinc}\left(\frac{k\ell}{2}\right) \right)$$

**5 درجات**

**2** لترسم كيف $\hat{f}(k)$ ، $f(x)$