

السؤال الأول (20 دقة)

(10 دقة لكل تكامل)

$$I_2 = \int_0^{\infty} (1-x^2)^2 dx$$

نفرض: $x^2 = t$ ومنه $x = t^{1/2}$

المفاضلة نجد: $dx = \frac{1}{2} t^{-1/2} dt$

بالعوض في التكامل مع ملاحظة أن الحدود لا تتغير:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1-t)^2 t^{-1/2} dt$$

بالقارنة مع الشكل العام للتكامل مع الجذر نجد:

$$I_2 = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/2) \cdot \Gamma(3)}{\Gamma(7/2)}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma(7/2) = \Gamma(1 + 5/2) = \frac{5}{2} \Gamma(3/2) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$$

بالعوض في I_2 نجد: أ. جزأ:

$$I_2 = \frac{8}{15}$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^{3x})^2} dx$$

نفرض: $e^{3x} = t$ ومنه $e^{2x} = t^{2/3}$

المفاضلة نجد: $dx = \frac{1}{3} t^{-1} dt$

بالعوض في التكامل مع ملاحظة أن الحدود لا تتغير، التكامل أصبح من 0 إلى $+\infty$:

$$I_1 = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{t^{-1/3}}{(1+t)^2} dt$$

بالقارنة مع الشكل العام للتكامل مع الجذر نجد:

$$I_1 = \frac{1}{3} \beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(2/3) \cdot \Gamma(4/3)}{\Gamma(2)}$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1, \quad \Gamma(4/3) = \frac{1}{3} \Gamma(1/3)$$

$$I_1 = \frac{1}{9} \Gamma(2/3) \cdot \Gamma(1/3)$$

$$= \frac{1}{9} \Gamma(1/3) \cdot \Gamma(1 - 1/3)$$

$$I_1 = \frac{1}{9} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$$

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل

بمفاضلة $e^x = t$

2/

السؤال الثاني (10 درجات)

عدد مركبات G هو: $5^2 = 25$ ①الطبيعي

$$- G^{ij} = G(e^i, e^j) = e^i \cdot e^j \quad ①$$

$$- G^i_j = G(e^i, e_j) = e^i \cdot e_j = \delta^i_j \quad ①$$

$$- G_j^i = G(e_j, e^i) = e_j \cdot e^i = \delta_j^i \quad ①$$

$$- G_{ij} = G(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j \quad ①$$

الطبيعي
2

$$- v \cdot e^i = (v^j e_j) \cdot e^i = v^j (e_j \cdot e^i) = v^j \delta_j^i = v^i \quad ①$$

$$- v \cdot e_j = (v_i e^i) \cdot e_j = v_i (e^i \cdot e_j) = v_i \delta^i_j = v_j \quad ①$$

$$- v^i = v \cdot e^i = (v_j e^j) \cdot e^i = v_j (e^j \cdot e^i) = v_j G(e^j, e^i) = v_j G^{ji} \quad ①$$

$$- v_i = v \cdot e_i = (v^j e_j) \cdot e_i = v^j (e_j \cdot e_i) = v^j G(e_j, e_i) = v^j G_{ji} \quad ①$$

$$- G^{ij} = G(e^i, e^j) = e^i \cdot e^j = e^j \cdot e^i = G(e^j, e^i) = G^{ji} \quad ①$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -l/2 \leq x \leq l/2 \\ 0 & \text{أخرى} \end{cases}$$

- II -

المعادلة (1)

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

المعادلة (0)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l/2}^{l/2} e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right|_{-l/2}^{l/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ikl/2} - e^{+ikl/2}}{-ik}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

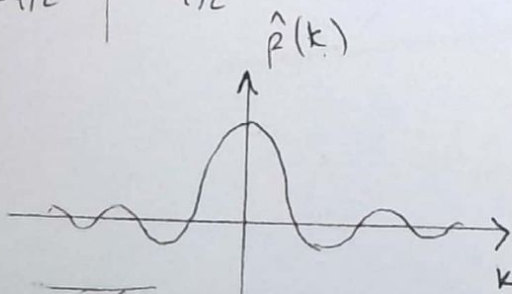
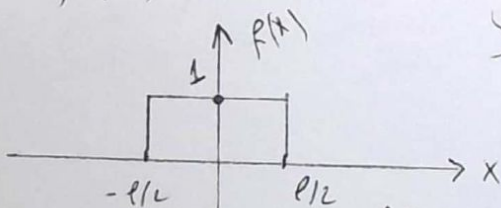
$$= \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin kl/2}{kl/2} = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{kl}{2}\right)$$

$$\hat{f}(k) = \frac{l}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{kl}{2}\right)$$

المعادلة (2)

5 درجہ

$\hat{f}(k)$ و $f(x)$ کے ترمیم کے معنی



المعادلة (2)

$$f(x) = \frac{l}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$$-\pi \leq x \leq +\pi$$

في $x=0$ المعادلة (1)

$$f(x=0) = 0 = \frac{l}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

نتيجة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} = -\frac{l}{3}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{l}{12} \right)$$

المعادلة (3)

في $x=\pi$ المعادلة (1)

$$f(x=\pi) = l = \frac{l}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{فردي } n \\ +1 & \text{زوجي } n \end{cases}$$

$$(-1)^n \cos(n\pi) = \begin{cases} +1 & \text{فردي } n \\ +1 & \text{زوجي } n \end{cases}$$

$$l = \frac{l}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

المعادلة (3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{2l}{3} \Rightarrow$$

نتيجة

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$