③ باستخدام طريقة المكونات الرئيسية لدينا $\hat{\sigma}_{i1} = \sqrt{\lambda_1}\, e_{i1}$ ، $\hat{\sigma}_{i2} = \sqrt{\lambda_2}\, e_{i2}$

i	$\hat{\sigma}_{i1} = \sqrt{\lambda_1}\, \hat{e}_{i1}$	$\hat{\sigma}_{i2} = \sqrt{\lambda_2}\, \hat{e}_{i2}$	$\hat{h}_i^2 = \sum_{j=1}^{2} \hat{\sigma}_{ij}^2$	$\hat{\psi}_i = 1 - \hat{h}_i^2$
X_1	$\hat{\sigma}_{11} = 0.8287$	$\hat{\sigma}_{12} = -0.5387$	0.9770	0.0229
X_2	$\hat{\sigma}_{21} = 0.6460$	$\hat{\sigma}_{22} = 0.7100$	0.9216	0.0784
X_3	$\hat{\sigma}_{31} = -0.7324$	$\hat{\sigma}_{32} = -0.5225$	0.8095	0.1905
X_4	$\hat{\sigma}_{41} = -0.8932$	$\hat{\sigma}_{42} = -0.0976$	0.8011	0.1988
X_5	$\hat{\sigma}_{51} = -0.5783$	$\hat{\sigma}_{52} = 0.7280$	0.8646	0.1353
	$\sum_{i=1}^{5} \hat{\sigma}_{i1}^2 = 2.7307$	$\sum_{i=1}^{5} \hat{\sigma}_{i2}^2 = 1.6048$		

وجدات تكل قيمة صحيحة $\frac{1}{4}$ درجة

لاثبات أن النموذج العاملي يعيد توليد مصفوفة الارتباط حيث

$$\hat{\sigma}\,\hat{\sigma}' + \mathrm{diag}(\hat{\psi}_i) = R$$ (3) درجات

$$\begin{pmatrix} -0.829 & -0.539 \\ -0.646 & 0.710 \\ -0.732 & -0.523 \\ -0.893 & -0.057 \\ -0.573 & -0.728 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.829 & -0.646 & -0.732 & -0.893 & -0.573 \\ -0.539 & 0.710 & -0.523 & -0.057 & -0.728 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.023 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.078 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.191 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.199 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.135 \end{pmatrix}$$

(5 درجات)

$$= \begin{pmatrix} 1.000 & 0.153 & 0.888 & 0.771 & 0.087 \\ 0.153 & 1.000 & 0.62 & 0.537 & 0.891 \\ & & 1 & 0.684 & 0.043 \\ & & & 1 & 0.475 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

بالمقارنة مع $R \approx \hat{\sigma}\,\hat{\sigma}' + \mathrm{diag}(\hat{\psi})$ وبالتالي النموذج العاملي يعيد توليد مصفوفة الارتباط جيدا

5 درجات

④ 5 درجات حساب العوامل المدورة بعد الرسم المياني

$$\hat{\sigma}^* = \hat{\sigma}\, T \;;\; T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

تكل قيمة صحيحة $\frac{1}{4}$ درجة وللقرين $\frac{5}{4}$ درجة

$$= \begin{pmatrix} -0.987 & -0.052 \\ -0.204 & 0.938 \\ -0.896 & -0.086 \\ -0.802 & 0.398 \\ -0.137 & 0.920 \end{pmatrix}$$

(5 درجات)

③ $f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sqrt{S_{11}S_{22}(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x_1-\bar{x}_1}{\sqrt{S_{11}}}\right)^2+\left(\frac{x_2-\bar{x}_2}{\sqrt{S_{22}}}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\bar{x}_1}{\sqrt{S_{11}}}\right)\left(\frac{x_2-\bar{x}_2}{\sqrt{S_{22}}}\right)\right)\right\}$

$=\frac{1}{2\pi\sqrt{21}}\exp\left(-\frac{1}{1.68}\left(\frac{x_1-5}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{x_2-9}{\sqrt{5}}\right)^2-0.8\,\frac{(x_1-5)(x_2-9)}{5}\right)$

(هذه الصيغة بدالة x_1, x_2 وباقي كل صحيح كيف الطلب 5 درجات)

④ $\underline{R}=\begin{pmatrix}1 & 0.4\\ 0.4 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow|\underline{R}|=\begin{vmatrix}1 & 0.4\\ 0.4 & 1\end{vmatrix}=0.84\Rightarrow \underline{R}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{0.84} & \frac{-0.4}{0.84}\\ \frac{-0.4}{0.84} & \frac{1}{0.84}\end{pmatrix}$ ①

$\underline{R}_p=\begin{pmatrix}1 & 0.4\\ 0.4 & 1\end{pmatrix}$ ①؛ $\underline{R}_p=(\rho_{ij})$ $1\le i\le 2$, $1\le j\le 2$ صح، $\underline{R}^{-1}=(k_{ij})$ $1\le i\le 2$, $1\le j\le 2$

$\rho_{ij}=-\frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii}k_{jj}}}$ ① $KMO=\frac{\sum\sum_{i\neq j} r_{ij}^2}{\sum\sum_{i\neq j} r_{ij}^2+\sum\sum_{i\neq j}\rho_{ij}^2}$ ①

وبالتالي $=\frac{1}{2}=50\%$

العينة مقبولة لاجراء التحليل العاملي.

السؤال الثالث: ① لدينا 4 درجات، وهي عبارة عن اختبار بارتليت للكروية نختبر $H_0:\underline{\rho}=\underline{I}$ مقابل $H_1:\underline{\rho}\neq\underline{I}$ عند $\alpha=0.01$ $\alpha=0.05$

بالتالي باستخدام معطيات الاختبار السابق في السؤال الأول نحسب

$\bar{r}_1=\frac{1}{4}(0.12+0.85+0.77+0.11)=0.4675$

$\bar{r}_2=\frac{1}{4}(0.12+0.13+0.54+0.81)=0.40$

$\bar{r}_3=\frac{1}{4}(0.85+0.13+0.50+0.11)=0.3975$

$\hat{\sigma}=\frac{6.18}{3.16}=1.96$

$F_4=0.55$ $F_5=0.35$ $\bar{r}=\frac{1}{20}(0.12+0.85+\dots+0.37)=0.2165$

$\sum_{i<k}\sum(r_{ik}-\bar{r})^2=1.3305$, $\sum_{i<k}\sum(\bar{r}_k-\bar{r})^2=0.5056\Rightarrow T_0=81.54$

بالتالي نرفض H_0 وبالتالي $T_0>\chi^2_{0.05}$ ، أي بالمقارنة مع $T_0>\chi^2_{(0.01)}$ قيمة للتحليل العاملي

② لدينا 12 درجة لقد حاصل 3 درجات، وطلب منه أخذ 3 درجات

$f_1=\{X_1,X_3,X_4\}\Rightarrow\frac{\lambda_1}{\sum\lambda_i}=\frac{2.77}{5}=55.4\%$

السؤال الثاني 40 درجة (تم توزيعها 5+5+25+5/16)

① $\underline{X} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 6 \\ 6 & 12 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ (خطوة 2)، $\hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$

$\Rightarrow \hat{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$\Rightarrow S = \hat{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ (خطوة 4)

② $det(\underline{S} - \lambda \underline{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_1 = 7$ ②

$\hat{\lambda}_2 = 3$ ②

$\lambda_1 = 7 \Rightarrow (\underline{S} - \hat{\lambda}\underline{I})(\hat{\underline{e}}_1) = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_{11} = e_{21}$

$\hat{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{pmatrix}$ ضع $\hat{\underline{e}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (2) عندئذ $e_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ لو فرضنا أن

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow (\underline{S} - \lambda \underline{I})(\hat{\underline{e}}_2) = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_{12} = -e_{22}$

بالتالي لو فرضنا $e_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ عندئذ $\hat{\underline{e}}_2 = \begin{pmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (2) هي متجهات الخاصية

ونلاحظ أنها متعامدة منظمة

$\hat{y}_1 = \hat{\underline{e}}_1' \underline{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} X_2$ (3)

$\hat{y}_2 = \hat{\underline{e}}_2' \underline{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X_2$ (3) $\Rightarrow$ نسبة التباين المفسرة بـ $\hat{y}_1$ هي $\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2} = \frac{7}{10} = 0.7 < 87\%$ (3)

نسبة التباين المفسرة بـ $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ هي $\frac{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2} = 1$ (3) وبالتالي المكونات الأساسية هي $\hat{y}_1, \hat{y}_2$ (1)

قاعدة Gram-Schmidt: لتحويل مجموعة متجهات غير منتظمة $v_1, \dots, v_k$ إلى مجموعة متعامدة منظمة $u_1, \dots, u_k$ حيث $k \le n$ يتم اتباع ما يلي في فضاء $\mathbb{R}^n$ وحسب العلاقة:

$\underline{u}_1 = \underline{v}_1$

$\underline{u}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\underline{u}_1' \cdot \underline{v}_2}{\underline{u}_1' \cdot \underline{u}_1}\underline{u}_1$ (3)

$\underline{u}_3 = \underline{v}_3 - \frac{\underline{u}_1' \cdot \underline{v}_3}{\underline{u}_1' \cdot \underline{u}_1} \cdot \underline{u}_1 - \frac{\underline{u}_2' \underline{v}_3}{\underline{u}_2' \cdot \underline{u}_2}\underline{u}_2$

⋮

الجواب الثاني أتممت تنفيذ هذه القاعدة لحساب $\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2$ وهذا الجواب يخالف سؤال

سلم تصحيح مقرر تحليل المعطيات - سنة رابعة إحصاء رياضي

السؤال الأول: الزمن اللازم لحل هذا السؤال هو 15 دقيقة فقط

$n=25$ أي $P=24$ و $\alpha=0.05$ و $\chi^2_{0.95}(253)=291.1$ و $|R|=0.0005271$

إن Alpha و Cronbach هو ثبات الاستبانة وهو جيد كونه أكبر من 80%

وبالتالي للدراسي للاختبار تأثير كل متغير في ثبات الاستبانة (لكل سؤال 2 اختبار)

لكنه الطالب غير مهم لكن أن يعطي الحل المطلوب منه (أربع درجات)

اختبار بارتليت له 8 درجات لكتابة إحصاء الاختبار والتناقض مع الجدول

$$T=\frac{n-1}{(1-\bar{r})^2}\left(\sum_{i<k}\sum(r_{ik}-\bar{r})^2-\hat{\theta}\sum_{k=1}^{P}(\bar{r}_k-\bar{r})^2\right)\sim\chi^2\left(\frac{(P+1)(P-2)}{2}\right)$$

حيث

$$\bar{r}_k=\frac{1}{P-1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{P}r_{ik}\;;\;k=1,2,\dots,P\;,\;\bar{r}=\frac{1}{P(P-1)}\sum_{i<k}\sum r_{ik}$$

$$\hat{\theta}=\frac{(P-1)^2\left(1-(1-\bar{r})^2\right)}{P-(P-2)(1-\bar{r})^2}$$

(كتابة الصيغة له أربع درجات)
والتناقض مع الجدول هي

$T_0=19334.5$ $\nu=253$ $\chi^2_{0.95}(253)=291.1$ $P\text{-value}=0.6000$

بالمقارنة نرفض الفرضية $H_0:\underline{\rho}=I$ بالتالي $H_1:\underline{\rho}\neq I$

هناك رأي، ضرورة التحليل العاملي. سوف نختبر صحة الفرضية نقدم اختبار

Haitovsky وختبر صحة الفرضية $H_0:|\underline{R}|=0$ مقابل $H_1:|\underline{R}|\neq 0$

وعند صحة الفرضية H_0 سوف نقدم $\underline{R}$ مصفوفة ارتباط العينة.

$$K=\left(1+\left(\frac{2P+5}{6}\right)-n\right)\ln(1-|R|)\sim\chi^2\left(\frac{P(P-1)}{2}\right)$$

$K_0=1.35$ $\chi^2_{0.95}(253)=291.1$ وبالتالي بالمقارنة نقبل H_0

يوجد قيمة مفقودة وهناك مشكلة في تفسير المتغير الأول عند الكتابة بالتحليل PCA

(لكل اختبار 8 درجات: كتابة الصيغة له 4 درجات، والتناقض لها
4 درجات وبكيفية التعامل حسب كل حالة)