(1)

سلم تصحيح امتحان مقر: تحليل الانحدار
لطلبة السنة الرابعة - إحصاء رياضي
السداسي الثاني
2024-2025

السؤال الأول: لتتحقق من المساواة الصحيحة التالية:
(20 د/ع)

$$y_i - \hat{y}_i = (y_i - \bar{y}) - (\hat{y}_i - \bar{y})$$

وبأخذ التربيع للطرفين ثم نجمع نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) + \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (I)$$

ونلاحظ أن الحد الثاني في العلاقة (I) يكتب كما يلي:

$$-2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) = -2\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$$

$$= -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y}) = -2\sum_{i=1}^{n}\left[\hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})\right]^2 = -2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 \quad (II)$$

نعوض في (I) نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 - \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

ومنه نجد:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

السؤال الثاني: (تعريف) مصفوفة القبعة H (10 درجات)

ندعو المصفوفة $H = X(X'X)^{-1}X'$ مصفوفة القبعة أو المصفوفة H مقبعة، حيث X مصفوفة الأعمدة تمثل توزيع الانحدار الخطي المتعدد. 3

(1) نلاحظ أن:

$$H^2 = H \cdot H = X(X'X)^{-1}X' \cdot X(X'X)^{-1}X'$$
3
$$= X(X'X)^{-1}(X'X)(X'X)^{-1}X'$$
$$= X(X'X)^{-1}X' = H$$

أي أن H مصفوفة قوى حسب التعريف

(2)
$$X'(I-H) = X'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]$$
4
$$= X' - X'X(X'X)^{-1}X' = X' - X' = 0$$

السؤال الثالث: نلاحظ أن: (صفحة 35)

$$\sum X = 33 \quad \sum X^2 = 195 \quad \sum XY = 825$$
5
$$\sum Y = 166 \quad \sum Y^2 = 3992$$

وأن:

$$S_{xx} = 39.43 \quad S_{yy} = 55.43$$
3
$$S_{xy} = 42.43$$

(1)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{42.43}{39.43} \simeq 1.076$$
4
$$\hat{\beta}_0 = \frac{\sum Y_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i}{n} = \frac{166 - 1.076(33)}{7} = 18.64$$

معادلة الانحدار:

$$\hat{y} = 18.64 + 1.076X$$
3

أي كلما زاد متوسط مصاريف الدعاية مليون جنيه زاد متوسط الأرباح 1.076 مليون جنيه

(2) إن 95% فترة ثقة للوسيط β_1 طرفاها:

$$\hat{\beta}_1 \mp t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-2)} S(\hat{\beta}_1)$$

ومن جدول توزيع ستيودنت نجد:

4 $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-2)} = t_{0.9750}^{(5)} = 2.57$

ونلاحظ أن:

$$S^2 = \frac{S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2}{(n-2) S_{xx}} = 1.954$$

4 $$S(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{S^2}{S_{xx}}} = \sqrt{\frac{1.954}{39.43}} \simeq 0.223$$

أي أن فترة الثقة طرفاها:

$$1.076 \mp (2.57)(0.223)$$

أي هي الفترة

4 $[0.50289 \ , \ 1.64911]$

ونلاحظ أن طرفي فترة الثقة من إشارة واحدة فهذا يعني أن الانحدار معنوي لذن $\beta_1 = 0$ لاتقع ضمن ذلك المجال 2

(3) معامل الارتباط:

3 $$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} \simeq 0.908$$

أي أن العلاقة بين x, y إيجابية وقوية

(4) معامل التحديد:

3 $$r^2 = (0.908)^2 \simeq 0.82$$

أي أن 82% من التباين الكلي للمتغير y يفسره نموذج الانحدار الخطي البسيط.

السؤال الرابع : معادلة الانحدار لـ Y على X_1, X_2 هي : (35 درجة)

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

حيث :

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_1 & \Sigma X_2 \\ \Sigma X_1 & \Sigma X_1^2 & \Sigma X_1X_2 \\ \Sigma X_2 & \Sigma X_1X_2 & \Sigma X_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 67 & 16 \\ 67 & 759 & 187 \\ 16 & 187 & 56 \end{bmatrix}$$

$$|X'X| = 6(759\times56 - 187^2) - 67(67\times56 - 16\times187) + 16(67\times187 - 759\times16)$$

$$= 6(7535) - 67(760) + 16(385)$$

$$= 450$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \Sigma Y \\ \Sigma X_1Y \\ \Sigma X_2Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 377 \\ 103 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \frac{1}{450}\begin{bmatrix} 7535 & -760 & 385 \\ -760 & 80 & -50 \\ 385 & -50 & 65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 33 \\ 377 \\ 103 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{450}\begin{bmatrix} 1790 \\ -70 \\ 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.978 \\ -0.156 \\ 1.222 \end{bmatrix}$$

(1) معادلة الانحدار :

$$\hat{Y} = 3.978 - 0.156X_1 + 1.222X_2$$

كلما زاد متوسط درجة الحرارة درجة واحد قل متوسط الطول 0.156 متر

كلما زاد متوسط قيمة السداد الإضافية ألف جنيه زاد متوسط الطول 1.222 متر

(2) القيمة التقديرية الموافقة لـ $x_1 = 15$ ، $x_2 = 6$

بالتعويض في معادلة الانحدار:

$$\hat{y} = 3.978 - (0.156)(15) + (1.222)(6)$$

$$= 8.979$$

95% فترة ثقة لمتوسط أطوال أشجار الخيل المزروعة في منطقة متوسط درجة الحرارة فيها 15 وكمية السماد المضافة 6 كيلوغرام طرحاها:

$$\hat{y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-3)} \, s \sqrt{\underline{x}_i' C \underline{x}_i}$$

حيث:

$$\underline{x}_i = (1, 15, 6)$$

ونلاحظ أن:

$$s^2 = \frac{y'y - \hat{\beta}' x' y}{n - p}$$

$$= \frac{199 - (3.978, -0.156, 1.222) \begin{bmatrix} 33 \\ 377 \\ 103 \end{bmatrix}}{6 - 3}$$

$$= \frac{199 - 198.328}{3} = 0.224$$

ومنه:

3 $s = \sqrt{0.224} \simeq 0.473$

ونلاحظ أن، من جدول ستيودنت

4 $t_{0.975}^{(3)} = 3.18$

ونلاحظ أن:

$$x_i C x_i' = \frac{1}{450}(1,15,6)\begin{bmatrix} 7535 & -760 & 385 \\ -760 & 80 & -56 \\ 385 & -56 & 65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{450}(1,15,6)\begin{bmatrix} -1555 \\ 140 \\ 25 \end{bmatrix} = 105.44$$

نترة الثقة طرفاها:

$$8.979 \mp (3.18)(0.473)\sqrt{105.44}$$

أي طرفاها

$$8.979 \mp 1.869$$

أي هي الفترة

$$[7.110 \; ; \; 10.848]$$

أستاذ الفرد. عدات