سلم تصحيح مقرر الاحصاء (1)

لطلبة السنة الثانية - احصاء رياضي

الفصل الثاني للعام الدراسي 2024 - 2025

السؤال الأول: (ثلاث اثبات من ثلاثة) (20 درجة) لكل برهان 10 درجات

(1) اذا كانت لدينا $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة عشوائية حجمها n من المجتمع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن:

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}$ له التوزيع ستودنت t بدرجة من الحرية $(n-1)$

لدينا: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ مبرهنة النهاية المركزية

ومنه: $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ مبرهنة النهاية المركزية

لدينا أيضاً: $X = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين عينة من مجتمع طبيعي
① $\bar{X}$ و S^2 مستقلان
② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

ونعلم أن: $\bar{X}$ و S^2 مستقلان.

$\left[\begin{matrix} X \sim N(0,1) \\ Y \sim \chi^2(\gamma) \end{matrix}\right] \Rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\gamma}}} \sim t(\gamma)$ مستقلان

فبالتالي هي مبرهنة ساعة خبز:

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{X}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Big/ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

له التوزيع ستودنت بدرجة من الحرية $(n-1)$

(2) عزم العينة m_r هو مقدر ممتاز لعزم المجتمع μ_r الذي جاءت منه العينة

و m_r هو مقدر متسق أيضاً لـ μ_r من أجل أي عينة حجمها n شرط أن يكون μ_{2r} موجوداً

(حيث r عدد صحيح موجب)

$$E\,m_r = E\,\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^r = \frac{1}{n}E\sum_1^n X_i^r = \frac{1}{n}\sum_1^n EX_i^r = \frac{1}{n}\sum_1^n \mu_r = \frac{1}{n}\cdot n\mu_r$$

أي: m_r هو مقدر ممتاز لـ μ_r

ولإثبات أن m_r مقدر متسق لـ μ_r يكفي إثبات أن $\lim_{n\to\infty} V(m_r) = 0$

$$V(m_r) = V\left(\frac{1}{n}\sum_1^n X_i^r\right) = \frac{1}{n^2}V\left(\sum_1^n X_i^r\right) = \frac{1}{n^2}\sum_1^n V(X_i^r) = \frac{1}{n^2}\sum_1^n V(X^r)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\,V(X^r) = \frac{1}{n}\left[E(X^r)^2 - (EX^r)^2\right] = \frac{1}{n}\left[EX^{2r} - (EX^r)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left(\mu_{2r} - \mu_r^2\right)$$

ولما أن العزم رتبة محدودة μ_{2r} موجود بالفرض.

$$\lim_{n\to\infty} V(m_r) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\mu_{2r} - \mu_r^2\right) = 0$$

إذاً m_r مقدر متسق أيضاً لـ μ_r

(3)

لتكن $X_1, \dots, X_n$ عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ حيث μ, σ^2 مجهولتان

ولكن $\bar{X}$ و S^2 متوسط وتباين العينة، على التوالي.

المطلوب: $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right]$ هو مجال الثقة لتباين المتغير عشوائي طبيعي من المستوى $100(1-\alpha)\%$

لدينا: $X \sim \chi^2(n)$

فإن:

$$P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n) \le X \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right] =$$

$$P\left[X \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right] - P\left[X \le \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right] =$$

$$1 - \alpha/2 - \alpha/2 = 1 - \alpha$$

نعلم بأن:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

وبالتعويض في العبارة أعلاه:

$$P\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \ge \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

$$P\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

وحسب تعريف مجال الثقة نجد أن المجال:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \text{ و } \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \right]$$

هو مجال ثقة لتباين متغير عشوائي طبيعي من المستوى $100(1-\alpha)\%$

السؤال الثاني: (20 درجة)

عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ $X_1, \dots, X_n$

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad ; -\infty < x < \infty \text{ و } -\infty < \mu < \infty \text{ و } \sigma > 0$$

(1) (5)

لإيجاد مقدر العزوم نأخذ معادلة

$$\mu_1 = m_1$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= EX = \mu \\ m_1 &= \frac{1}{n}\sum_1^n X_i = \bar{X} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \mu = \bar{X}$$

ومنه $\hat{\mu} = \bar{X}$ مقدر العزوم لـ μ

(2) (10)

$$S_1^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2 \qquad S_2^2 = \frac{1}{n+1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2$$

حساب متوسط مربعات الخطأ نأخذها مقرونة بدرجة الاعتبار للاختيار.

- $E S_1^2 = E\frac{1}{n}(n-1)S^2 = \frac{n-1}{n} E S^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$

إذاً: S_1^2 مقدر متحاز لـ σ^2 بالنقصان ومقدار النقصان $\frac{\sigma^2}{n}$

$$MSE_{S_1^2}(\sigma^2) = V(S_1^2) + b^2 = V\left(\frac{n-1}{n}S^2\right) + \frac{\sigma^4}{n^2}$$
$$= \frac{(n-1)^2}{n^2}\frac{2\sigma^4}{n-1} + \frac{\sigma^4}{n^2} = \frac{(2n-1)\sigma^4}{n^2}$$

- $E S_2^2 = E\frac{1}{n+1}(n-1)S^2 = \frac{n-1}{n+1} E S^2 = \frac{n-1}{n+1}\sigma^2 = \sigma^2 - \frac{2}{n+1}\sigma^2$

إذاً: S_2^2 مقدر متحاز لـ σ^2 بالنقصان ومقدار النقصان $\frac{2\sigma^2}{n+1}$

$$MSE_{S_2^2}(\sigma^2) = V(S_2^2) + b^2 = V\left(\frac{n-1}{n+1}S^2\right) + \frac{4\sigma^4}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}\frac{2\sigma^4}{(n-1)} + \frac{4\sigma^4}{(n+1)^2} = \frac{2\sigma^4}{(n+1)}$$

(3) (5)

$$L(\mu) = \prod_1^n f(x_i;\mu) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i-\mu)^2}$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i^2+\mu^2-2\mu x_i)}$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_1^n x_i^2 + n\mu^2 - 2\mu\sum_1^n x_i\right]}$$
$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(n\mu - 2\mu\sum_1^n x_i)} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n x_i^2}$$

$$g\left(\sum_1^n x_i, \mu\right) \qquad h(x_1 \dots x_n)$$

إذاً: حسب قاعدة عبد العاطي فإن:

$T = \sum_1^n X_i$ هو احصاء كافٍ لأجل μ

$T = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i = \bar{X}$ هو احصاء كافٍ لأجل μ أيضاً (ترتيب مضى في احصاء كافٍ هو احصاء كافٍ أيضاً)

السؤال الثالث (20 درجة)

عينة عشوائية حجمها n من مجتمع برنولي $Ber(p)$ $\quad X_1, \dots, X_n$

$f(x;p) = p^x (1-p)^{1-x}$ ، $x = 0,1$ $\quad 0 < p < 1$

(1) 10 عين دالة الاحتمالية العظمى لـ p.

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;p) = p^{\sum_i x_i} (1-p)^{n-\sum_i x_i}$$

$$\ln L(p) = \sum_i x_i \ln p + (n - \sum_i x_i) \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \sum_i x_i \frac{1}{p} + (n - \sum_i x_i) \frac{-1}{1-p}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(p)}{\partial p^2} = \sum_i x_i \frac{-1}{p^2} - (n - \sum_i x_i) \frac{1}{(1-p)^2} < 0$$

ومنه

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = 0 \iff \sum_i x_i \frac{1}{p} + (n - \sum_i x_i) \frac{-1}{1-p} = 0$$

$$\frac{\sum_i x_i}{p} = \frac{n - \sum_i x_i}{1-p}$$

$$n p - \sum_i x_i p = \sum x_i - \sum_i x_i p$$

$$\Rightarrow np = \sum_i x_i \Rightarrow p = \frac{\sum_i x_i}{n}$$

إذاً: $\boxed{\hat{p} = \bar{X}}$ هو مقدر الاحتمالية العظمى لـ p.

ومنه:

$$\widehat{EX} = \hat{p} = \bar{X}$$

$$\widehat{VX} = \widehat{p(1-p)} = \hat{p}(1-\hat{p}) = \bar{X}(1-\bar{X})$$

(2) 6 معلومات فيشر حول العينة حول الوسيط p.

$$f(x,p) = p^x (1-p)^{1-x}$$

$$\ln f(x,p) = x \ln p + (1-x) \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ln f(x,p)}{\partial p} = x \frac{1}{p} + (1-x) \frac{-1}{1-p}$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(x,p)}{\partial p^2} = x \frac{-1}{p^2} - (1-x) \frac{1}{(1-p)^2}$$

معلومات فيشر في مشاهدة واحدة

$$I(p) = E\left[-\frac{\partial^2 \ln f(x,p)}{\partial p^2}\right] = E\left[\frac{X}{p^2} + \frac{1-X}{(1-p)^2}\right] = \frac{1}{p^2} EX + \frac{1}{(1-p)^2}(1 - EX)$$

$$= \frac{1}{p^2} p + \frac{1}{(1-p)^2}(1-p)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p(1-p)}$$

معلومات فيشر في العينة $\Rightarrow I_n(p) = n\, I(p) = \frac{n}{p(1-p)}$

(3)
H

$$E\bar{X} = EX = p$$

$\bar{X}$ مقدر غير متحاز لـ p ⇐

$$V\bar{X} = \frac{VX}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\frac{1}{nI(p)} = \frac{1}{I_n(p)} = \frac{p(1-p)}{n}$$

وعليه

$$V\bar{X} = \frac{1}{nI(p)}$$

إذاً: $\bar{X}$ مقدر غير متحاز ذو تشتت أصغري.

السؤال الرابع: (28 درجة)

أولاً: عينة السماد A : $n_1 = 9$, $\bar{X} = 4$, $S_1 = 0.5$

عينة السماد B : $n_2 = 6$, $\bar{Y} = 4.15$, $S_2 = 2$

مستعيناً بالدراسة لجدول التوزيع الطبيعي

(1) 95٪ مجال ثقة لمتوسط إنتاج العينة الأولى من شجيرات التفاح التي طبق عليها السماد من النوع A هو:

$$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$$

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975$

$t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.975}(8) = 2.31$ من جدول ستودنت

بالتعويض نجد:

$$\left[4 - (2.31) \frac{0.5}{\sqrt{9}} \; ; \; 4 + (2.3) \frac{0.5}{\sqrt{9}} \right]$$

$$[3.615 \; ; \; 4.385]$$

أي: متوسط إنتاج شجيرات التفاح التي طبق عليها السماد من النوع A لن ينقص عن (3.615) كغ ولن يزيد عن (4.385) كغ بثقة 95٪

(2) 98٪ مجال ثقة للنسبة بين تباين إنتاج شجيرات التفاح لكل نوعي السماد المطبقين A , B هو

$$\left[\frac{S_2^2}{S_1^2} f_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \; ; \; \frac{S_2^2}{S_1^2} f_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \right]$$

$1-\alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \alpha/2 = 0.01$

$1-\alpha/2 = 0.99$

$$f_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = f_{0.01}(8,5) = \frac{1}{f_{0.99}(5,8)} = \frac{1}{6.63} = 0.15$$

$$f_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = f_{0.99}(8,5) = 10.3$$

$$\left[\frac{4}{0.25}(0.15) \; ; \; \frac{4}{0.25}(10.3) \right]$$

بالتعويض نجد:

$$[2.4 \; ; \; 164.8]$$

أي:

أي أن نسبة تباين إنتاج شجيرات التفاح لكل من نوعي السماد المطبقين A , B لن تقل عن (2.4) ولن تزيد عن (164.8)

حلسياً: عينة الشركة الأولى A

$\hat{P}_1 = \frac{x}{n_1} = \frac{120}{200} = 0.6$ ، $x = 120$ ، $n_1 = 200$

عينة الشركة الثانية B

$\hat{P}_2 = \frac{y}{n_2} = \frac{240}{500} = 0.48$ ، $y = 240$ ، $n_2 = 500$

(7) (1) حجم العينة التي ينبغي دراستها لكي لا يتجاوز الخطأ في تقدير نسبة المرضى الذين تم شفاؤهم بعد تطبيق دواء الشركة الثانية B للمدة (0.04) بثقة (99%)

يحدد بالعلاقة:

$$n \geq \left[\frac{z_{1-\alpha_2}}{2\varepsilon}\right]^2$$

لدينا: $\varepsilon = 0.04$

$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha_2 = 0.005 \Rightarrow 1-\alpha_2 = 0.995$

من جدول التوزيع المعياري:

$z_{1-\alpha_2} = z_{0.995} = \begin{matrix} 2.57 \\ 2.58 \end{matrix}$

بالتعويض نجد:

$$n \geq \left[\frac{2.58}{2(0.04)}\right]^2 = 1040.06 \quad \text{أي: } n \geq 1041$$

$$\left[\frac{2.57}{2(0.04)}\right]^2 = 1032.01 \Rightarrow n \geq 1033$$

هو حجم العينة المطلوب

(2) (3) مجال الثقة للفرق بين نسبتي المرضى الذين تم شفاؤهم بعد تطبيق دواء الشركتين A و B هو $[-0.24 \text{ و } -0.08]$ 97.1

نلاحظ أن طرفي المجال من إشارتين متماثلتين بالتالي: $P_1 - P_2 < 0$

أي: يوجد دلالة احصائية على وجود فرق بين نسبتي المرضى الذين تم شفاؤهم بعد تطبيق الدواء للشركة A و B.

وبما أن: $P_1 - P_2 < 0$

أي: $P_1 < P_2$

أي يمكن القول بأن نسبة المرضى الذين تم شفاؤهم بعد تطبيق دواء الشركة B هو الأعلى

بالتالي: دواء الشركة B هو الأكثر فعالية.

السؤال الخامس: (12 درجة)

$X_1, \dots, X_{13}$ عينة من X ، $X \sim N(2,4)$

$Y_1, \dots, Y_{19}$ عينة من Y ، $Y \sim N(3,6)$

العينات مستقلة

(1) 3

$\bar{X} - \bar{Y}$

$\bar{X} \sim N(2, \frac{4}{13})$

$\bar{Y} \sim N(3, \frac{6}{19})$

$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N(2-3, \frac{4}{13} + \frac{6}{19})$

$\sim N(-1, \frac{154}{247})$

(2) 3

$3S_1^2 + 3S_2^2$

$\frac{(13-1)S_1^2}{4} = \frac{12}{4} S_1^2 = 3S_1^2 \sim \chi^2(12)$

$\frac{(19-1)S_2^2}{6} = \frac{18}{6} S_2^2 = 3S_2^2 \sim \chi^2(18)$

$\Rightarrow 3S_1^2 + 3S_2^2 \sim \chi^2(12+18)$

$\sim \chi^2(30)$

(3) 3

$\frac{2S_2^2}{3S_1^2}$

$\frac{\frac{3S_2^2}{18}}{\frac{3S_1^2}{12}} = \frac{\frac{S_2^2}{6}}{\frac{S_1^2}{4}} = \frac{S_2^2}{6} \times \frac{4}{S_1^2} = 2\frac{S_2^2}{3S_1^2} \sim f(18,12)$

- انتهت الأسئلة -

أ. صفاء الطاسي