طوبولوجيا عشوائية (1) - الفصل الثاني 2024 - 2025

الأول

1- نفرض X متحول عشوائي على $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ كمول ولنأخذ $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ عندئذ يوجد X_0 $\mathcal{G}$-قيوس ومكمول ويرمز له بالرمز $E[X|\mathcal{G}]$ ندعو X_0 بالتوقع الشرطي لـ X بالنسبة للحيز الثانوي $\mathcal{G}$ وتحقق العلاقة $\forall C \in \mathcal{G}: \int_C X dP = \int_C X_0 dP$ a.s. $X_0 = E[X|\mathcal{G}]$

2- ندعو أسرة المتحولات العشوائية $\{X_t\}_{t \in I}$ المعرفة على $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ مع قيم في $(G, \mathcal{G})$ بالطولية العشوائية.

3- نفرض $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_n, P)$ فضاء احتمالي مرشح ولتكن τ زمن توقف بالنسبة للأسرة $\{\mathcal{F}_n\}$ (أسرة متزايدة من الجبور الثانوية الجزئية من $\mathcal{F}$). لتكن $\{X_n\}_n$ متتالية عشوائية. نعرف المتحول العشوائي X_τ بأنه

$$X_\tau : (\Omega, \mathcal{F}_\tau, P) \to (G, \mathcal{G})$$
$$\omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$$

4- هو المتحول العشوائي الدال على عدد العبورات من الأعلى (المتزايدة) من a إلى b مع الخطأ N للمتتالية $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

الثاني

5- لنعرف المتحول العشوائي τ كالتالي

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \inf_{n \in \{1,\dots,k\}} \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq \lambda\} ; \{X_n \geq \lambda\} \neq \emptyset \\ k ; \{X_n \geq \lambda\} = \emptyset \end{cases}$$

إن τ زمن توقف بالنسبة للأسرة $\{\mathcal{F}_n\}$ لأنه زمن دخول المتتالية $\{X_n\}$ الأول إلى $[\lambda, \infty)$. تكون $\{X_n\}$ فوق مارتنغال محدب برهنا إن $EX_1 \geq EX_\tau$ حيث

$$EX_1 \geq EX_\tau = \int_\Omega X_\tau dP = \int_{\{\sup X_n \geq \lambda\}} X_\tau dP + \int_{\{\sup X_n < \lambda\}} X_\tau dP \geq$$

τ هو أصغر n بحيث $X_n \geq \lambda$ (أجل) ... $\Rightarrow X_n \geq \lambda$ لأجل n أصغر من الخطأ n

$$\geq \int_{\{\sup X_n \geq \lambda\}} \lambda \, dP + \int_{\{\sup X_n < \lambda\}} X_k \, dP = \lambda P(\sup X_n \geq \lambda) + \int_{\{\sup X_n < \lambda\}} X_k \, dP$$

بما أن $X_k = X_k^+ - X_k^-$ وبالتالي $X_k \geq -X_k^-$

$$EX_1 \geq EX_k \geq \lambda P(\quad) - \int_{\{\sup X_n < \lambda\}} X_k^- \, dP \geq \lambda P(\quad) - \int_{\Omega} X_k^- \, dP$$

$$\Rightarrow P[\sup X_n \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda}[E(X_1) + E(X_k^-)]$$

الثالث 6- نص القانون: لتكن $X_1, \dots, X_n$ متحولات عشوائية مستقلة معرفة على $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ولها نفس التوزيع الاحتمالي بتوقع μ وتحولة $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ عندئذ متحققة

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{a.s \& L^1} \mu$$

البرهان:

نعرف $\forall n \in \mathbb{N}: \mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \dots)$ أي $\mathcal{G}_{-n} = \sigma(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$

و $\{\mathcal{G}_{-n}\}_n$ متتالية متناقصة من الجبور الجزئية من $\mathcal{F}$ وأن $X_1 \in L^1$ وبالتالي حسب التعريف $\mathcal{G}_{-\infty} = \bigcap_n \mathcal{G}_{-n}$.

$$E[X_1 | \mathcal{G}_{-n}] \xrightarrow[n \to \infty]{a.s \& L^1} E[X_1 | \mathcal{G}_{-\infty}]$$

(مبرهنة تعين التنازلية)

بما أن $\mathcal{G}_{-\infty}$ قيمة وبالتالي حسب قانون كولموغوروف 0-1 فإن $E[X_1 | \mathcal{G}_{-\infty}]$

$E(X_1 | \mathcal{G}_{-\infty}) \overset{a.s.}{=} a$ أي $a \in \mathbb{R}$ حيث $P[E(X_1 | \mathcal{G}_{-\infty}) = a] = 1$

وكون توقع العدد الثابت هو ذاته فإن

$$a \overset{a.s.}{=} E(X_1 | \mathcal{G}_{-\infty}) = E[E(X_1 | \mathcal{G}_{-\infty})] = E(X_1) = \mu$$

- بما أن

$$E[X_1 | \mathcal{G}_{-n}] = E[X_1 | S_n, X_{n+1}, \dots] \overset{\text{مستقلة}}{=} E[X_1 | S_n]$$

$$= \frac{n}{n} E(X_1 | S_n) = \frac{E(X_1 | S_n) + E(X_1 | S_n) + \dots + E(X_1 | S_n)}{n}$$

تناظري

$$= \frac{E(X_1|S_n)+E(X_2|S_n)+\cdots+E(X_n|S_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i|S_n)}{n}$$

$$\frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid S_n\right]}{n} = \frac{E[S_n|S_n]}{n} \overset{\text{خطية}}{=\!=} \frac{S_n}{n}$$

الرابع | 7- لتكن $F_n = \sigma(X_1,\cdots,X_n)$ و S_n عنصر F_n

$$E|S_n| = E\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \le E\sum_{i=1}^{n}|X_i| = \sum_{i=1}^{n} E|X_i| < +\infty$$

↳ مجموع منتهي لمقادير توقعها منتهي

$$\forall n\in\mathbb{N}: E[S_{n+1}|F_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n+1} X_i \mid F_n\right] = E[S_n + X_{n+1}|F_n]$$

$$= S_n + E(X_{n+1}) = S_n$$

↳ خطية واستقلال

الخامس | 8- إذا عبر مرات العبور للمتتالية $\{X_n\}_n$ في $[a,b]$ فإن
عدد مرات العبور للمتتالية $\{-X_n\}_n$ في $[-b,-a]$

ولدينا:

$$E[D_N((-X_n),[-b,-a])] = E[U_N((X_n),[a,b])]$$

$$\le \frac{E[-X_N+a]^-}{-a+b} = \frac{E(X_N-a)^+}{b-a}$$

↳ برهنة دوب للعبور المتناقص

$$(-X_N+a)^- =$$

$$\max\{-(X_N+a),0\} = \max\{X_N-a,0\} = (X_N-a)^+$$