حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة سلاسل القوى

ماهو التابع التحليلي ؟

تعريف (1): نقول عن التابع $y=f(x)$ إنه تحليلي في النقطة $x=x_0$ إذا كان هو وجميع مشتقاته معرف ومستمر عند هذه النقطة وفي جوار لها ، ونسمي عندئذ النقطة x_0 بأنها نقطة عادية للتابع $f(x)$ ويكون التابع قابل النشر حسب تايلور في النقطة x_0 ونكتب:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots \qquad (1)$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- حالة خاصة إذا كانت $x_0=0$ عندئذ فإننا نسمي المنشور (1) بمنشور ماك لوران ونكتب:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

يمكن أن نعبر عن العلاقة (1) اختصاراً بالشكل الآتي:

$$f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots+c_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

حيث $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ ثوابت معلومة، وتسمى أمثال سلسلة القوى و $x=x_0$ مركزها.

- أما إذا كان التابع غير تحليلي في النقطة x_0 عندئذ نسمي x_0 بنقطة شاذة.

مثال (1):

1) إن التابع $f(x)=\sin x$ تحليلي في النقطة $x_0=0$ وبالتالي فإن النقطة $x_0=0$ هي نقطة عادية عندئذ فإن التابع المعطى قابل للنشر حسب ما تعلمنا في جوار النقطة $x_0=0$ ومنشوره يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

وبسهولة نجد أن التوابع:

$$f(x)=e^x\ ;\quad g(x)=\cos x\ ;\quad F(x)=\frac{1}{1-x}$$

هي توابع تحليلية عند النقطة $x_0=0$.

وكمثال على التابع غير التحليلي نلاحظ أن التابع $f(x)=\ln|x|$ غير تحليلي عند النقطة $x_0=0$ وكذلك التابع $g(x)=\frac{1}{x+1}$ غير تحليلي عند النقطة $x_0=-1$.

تعريف:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

عندئذ نقول عن النقطة x_0 أنها نقطة عادية للمعادلة التفاضلية إذا كانت عادية لكل من $P(x)$ و $Q(x)$ بآن واحد (أي إذا كانت كلاً من $P(x), Q(x)$ تحليلياً عند $x=x_0$ بشكل سلسلة قوى في $(x$

ملاحظة : تكون النقطة $x = x_0$ نقطة شاذة (غير عادية) للمعادلة (1) إذا كانت شاذة (غير عادية) لـ $P(x)$ أو $Q(x)$ أو كليهما معًا

مثال : لتكن لدينا المعادلة

$$y'' + \frac{x+2}{x-1}\, y' + \frac{x}{(x+1)^2}\, y = 0$$

كما نرى أن النقطتين $x=1$ ، $x=-1$ شاذتان لهذه المعادلة وكل نقطة غير هاتين النقطتين هي نقطة عادية.

.. مقدمة في حل المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية بوساطة <u>المتسلسلات</u>

لقد درسنا في المعادلات (1) طرقًا خاصة في معاملة المعادلات التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية وهذه الطرق تعالج أشكالًا مختلفة من هذه المعادلات . ندرس الآن طريقة ايجاد حل معادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة الثانية :

$$P_0(x)\, y'' + P_1(x)\, y' + P_2(x)\, y = 0$$

حيث $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ دوال تحليلية على شكل متسلسلة قوى في x وتعتبر هذه الطريقة من أنجح الطرق وذلك لأنها الطريقة الوحيدة في إيجاد حلول صفوف هامة من المعادلات وبالحقيقة جاءت معظم المعادلات الأساسية في الفيزياء الرياضية يمكن حلها فقط بهذه الطريقة.

ويمكن تعميم هذه الطريقة إلى معادلات تفاضلية خطية متجانسة من رتب أعلى من المرتبة الثانية

ولإيجاد الحل العام للمعادلة (1a) بجوار نقطة عادية نستعرض المبرهنة الآتية:

<u>مبرهنة الوجود والوحدانية للحلول:</u>

بفرض أن x_0 نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1a):

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1a)$$

إذاً يوجد لهذه المعادلة حلان مستقلان خطياً وقابلان للنشر حسب متسلسلة تايلور إلى قوى $(x-x_0)$ ومتسلسلاتهما متقاربتان على الأقل في المجال المشترك لتقارب متسلسلتي نشر التابعين $p(x)$ و $Q(x)$ $(|x-x_0|<R)$

وفي أغلب التطبيقات تصادفنا معادلات من الشكل (7.2) فيها $p(x)$ و $Q(x)$ كثيرات حدود أو نسبة بين كثيرات حدود.

- في الحالة الأولى يكون الحل على شكل متسلسلة قوى متقاربة من أجل جميع قيم x (وذلك لأن متسلسلتا نشر التابعين $p(x)$ و $Q(x)$ تتقاربان في هذه الحالة من أجل جميع قيم x).
- في الحالة الثانية يكون نصف قطر تقارب متسلسلة القوى التي تمثل الحل لا يقل عن بعد النقطة x_0 عن أقرب نقطة ينعدم فيها مقام أمثال المعادلة التفاضلية. يمكن دوماً اعتبار $x_0=0$ لأنه في الحالات المعاكسة يمكن سحب المحاور إلى النقطة x_0.

• من الاعتبار المذكور إن شكل الحلول يعطى بمتسلسلات القوى $(|x-x_0|<R)$ مجال التقارب

ذات الشكل : $(*)$ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

•• الطريقة العملية لايجاد الحل العام (أو الخاص) بوساطة متسلسلات القوى :

لايجاد الحل العام (أو الحل الخاص) بوساطة متسلسلات القوى نتبع مايلي :

1 - نفرض أن للمعادلة التفاضلية (1a) حلاً في الشكل الآتي :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n \quad (2)$$

2 - نحسب كلاً من y' و y'' أي :

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-x_0)^{n-1}$$

و

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (x-x_0)^{n-2}$$

3 - نعوض في المعادلة التفاضلية (1a) ثم نوحد القوى ونوحد المجاهيل (القرائن)

4 - نجعل أمثال الحدود تساوي الصفر ، نحصل على قانون تدريجي أو علاقة تكرارية عامة).

5 - للحصول على الحل الأول نجعل $c_0=1$ ، $c_1=0$ ونحسب بقية الثوابت فنحصل على الحل الأول $y_1(x)$ ،

6 - للحصول على الحل الخاص الثاني المستقل خطياً مع الأول نجعل $c_0=0$ و $c_1=1$ ثم نحسب بقية الثوابت من العلاقة التكرارية فنحصل على الحل الثاني $y_2(x)$ ويكون الحل العام هو :

$$y=A y_1 + B y_2$$

A و B ثابتان اختياريان

مثال: بيّن طبيعة النقطة $x=0$ للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$y'' + xy = 0$$

ثم أوجد حلاً لها باستخدام طريقة متسلسلات القوى، أوجد مجال تقارب الحل.

الحل: بما أن $P(x)=0,\ Q(x)=x$ تابعان معرفان عند $x=0$ وكذلك مشتقاتها إذاً $x=0$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة.

(أي: إن كلاً من $P(0)$ و $Q(0)$ دالتان تحليليتان عند النقطة $x=0$) لذلك نبحث عن حل من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

عندئذ نجد باشتقاق هذه العلاقة أن:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n \cdot x^{n-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة عن y, y', y'' نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n \cdot x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = 0$$

- نضع في المتسلسلة الأولى كل $n-2=m+1 \Leftarrow n=m+3$

∴ وعندما $n=0$ فإن $m=-3$ ومنه يكون لدينا

$$\sum_{m=-3}^{\infty} (m+3)(m+2) c_{m+3} x^{m+1} = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+3)(m+2) c_{m+3} x^{m+1} =$$

لاحظ [illegible] $m=-3$ و $m=-2$ [illegible]

$$\sum_{m=-1}^{\infty} (m+3)(m+2) c_{m+3} x^{m+1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2) c_{n+3} x^{n+1}$$

ومنه نجد:

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)\, C_{n+3}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$2C_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)(n+2)\, C_{n+3}\, x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$2C_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+3)(n+2)\, C_{n+3} + C_n\right] x^{n+1} = 0$$

ومنه نجد بالمطابقة:

$$\begin{cases} 2C_2 = 0 \\ (n+3)(n+2)\, C_{n+3} + C_n = 0 \end{cases} \quad (I)' \Rightarrow$$ نجد

وبالتالي نجد

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ (n+3)(n+2)\, C_{n+3} + C_n = 0 \end{cases} \quad (I)'' \Rightarrow$$

$$C_2 = 0$$

$$C_{n+3} = \frac{-C_n}{(n+3)(n+2)} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1)''' \quad \cancel{(III)}$$

وهذه العلاقة $(1)'''$ تمثل الدستور التدريجي العام (العلاقة التكرارية)

لنعطي الآن لـ n قيماً فنجد:

$n=0 \Rightarrow C_3 = \frac{-C_0}{3\cdot 2} = \frac{-C_0}{6}$

$n=1 \Rightarrow C_4 = \frac{-C_1}{12}$

$n=2 \Rightarrow C_5 = \frac{-C_2}{20} = 0$

$n=3 \Rightarrow C_6 = \frac{-C_3}{30} = \frac{C_0}{180}$

$n=4 \Rightarrow C_7 = \frac{-C_4}{42} = \frac{C_1}{(42)\cdot(12)}$

$n=5 \Rightarrow C_8 = \frac{-C_5}{8.7} = 0$

$C_8 = 0$

وإذاً الحل العام هو :

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + \cdots$$

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{6} x^3 - \frac{c_1}{12} x^4 + \frac{c_0}{180} x^6 + \cdots$$

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{180} x^6 + \cdots\right) + c_1 \left(x - \frac{1}{12} x^4 + \cdots\right)$$

وهو الحل العام حيث c_1, c_2 ثابتين اختياريين وهذا الحل متقارب من أجل $|x| < \infty$

ملاحظة: P.442

إذا كانت المعادلة التفاضلية في الشكل

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

فإن هذه المعادلة تأخذ الشكل المعادلة (1a) وذلك بعد التقسيم على $a_0(x) \neq 0$

ملاحظة: إذا كانت المعادلة التفاضلية من الشكل:

$$a_0(x) y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0$$

فإن هذه المعادلة تأخذ شكل المعادلة (1a) وذلك بعد التقسيم على التابع: $a_0(x) \neq 0$

مثال أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$(1+x^2) y'' + x y' - y = 0$$

باستخدام المتسلسلات في جوار النقطة $x = 0$

الحل: لتحويل المعادلة المعطاة إلى الشكل (1a) نقسم طرفي المعادلة على $(1+x^2) \neq 0$ فنجد أن:

$$p(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad Q(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

بما أن هذه التابعات معرفات عند النقطة $x=0$ وكذلك مشتقاتها

إذن $x=0$ نقطة عادية للمعادلة المعطاة لذا تقبل المعادلة المعطاة حلاً

من الشكل : $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ولتعيين الثوابت سنشتق مرتين

فنجد كلاً من y' و y'' حيث :

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد :

$$(1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Longrightarrow$$

في المتسلسلة الأولى نضع $n-2=m$ أي $n=m+2 \Leftarrow$ وعندما $n=0$ تكون $m=-2$

المتسلسلة الأولى

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

نعوض فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1) c_{n+2} + \underbrace{n(n-1) c_n + n c_n - c_n}_{(n^2-1)c_n}\Big] x^n = 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)\,c_{n+2} + (n^2-1)\,c_n\right]x^n = 0$$

وبمساواة معاملات قوى x المختلفة بالصفر (ومنه نجد):

$$(n+2)(n+1)\,c_{n+2} + (n^2-1)\,c_n = 0 \Rightarrow$$

$$c_{n+2} = -\frac{\overset{(n-1)(n+1)}{(n^2-1)}}{(n+2)(n+1)}\,c_n \Rightarrow c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}\,c_n \qquad (*)$$

والعلاقة (*) تمثل الدستور التدريجي العام (العلاقة التكرارية

$$n=0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}c_0 = \frac{c_0}{2}$$

$$n=1 \Rightarrow c_3 = 0\,c_1 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = \frac{-c_0}{8}$$

$$n=3 \Rightarrow c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$n=4 \Rightarrow c_6 = -\frac{\cancel{3}}{\cancel{6}}c_4 = +\frac{3c_0}{8\cdot 5} = \frac{3\,\cancel{c_0}}{\cancel{40}}\quad \frac{1}{16}c_0$$

$$n=5 \Rightarrow c_7 = -\frac{4}{7}c_5 = 0$$

ويتضح من العلاقة (*) أن

أولاً: $c_{n+2}=0$ إذا كانت n فردياً ومنه $c_3=c_5=c_7=\dots=0$

ثانياً: أما إذا كانت n زوجياً عندئذ $(n=2k)$ لنصح بالعلاقة (*) $n+2=2k \Leftarrow n=2k-2$ ومنه نجد

$\boxed{n+2=2k \\ n=2k-2}$

$$c_{2k} = -\frac{2k-3}{2k}\,c_{2k-2} = -\frac{(2k-3)(2k-5)}{2k(2k-2)}\,c_{2k-4} = \dots =$$

$$= \dots = (-1)^{k+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-3)}{2^k\cdot k!}\,c_0$$

إذاً الحل العام يعطى بالعلاقة:

$$y = c_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{40}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \cdots\right) + c_1 x \quad (**)$$

وهو الحل العام حيث c_0, c_1 ثابتين اختياريين وهذا الحل متقارب عندما $|x|<1$

ملاحظة أن (**) يمكن أن يكتب بالشكل:

$$y = c_0\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k\, k!} x^{2k}\right) + c_1 x$$

وبتطبيق اختبار النسبة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}x^{n+2}}{c_n x^n}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+2}}{c_n}\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\left|-\left(\frac{n-1}{n+2}\right)\right| = x^2 \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+2} = x^2$$

وبالتالي فالمتسلسلة متقاربة $|x|<1$.

تمرين: أوجد حل المعادلة التفاضلية (المعطاة) $y'' + y = 0$ في جوار $x=0$

الحل: واضح أن $x=0$ نقطة عادية لذا نبحث عن حل من الشكل $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ باشتقاق y مرتين والتعويض في المعادلة نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

نضع في المتسلسلة الأولى كل $n-2 = m+1$

وبالتالي فإن $n = m+3$ وعندما $n=0$ فإن $m=-3$

لإيجاد القانون التدريجي لحساب c_n نوحد أدلة $\sum$ وذلك بوضع كل n بـ $n+2$ في السلسلة الأولى لذا: ~~n=m+2~~ , ~~m=n+2~~ في ...

$n-2=m \Leftarrow n=m+2$ وعندما $n=0$ يكون $m=-2$ فنحصل على

ملاحظة: الآن نغير الحد $n = n+2$ ...

$$\sum_{m=-2}^{\infty}(m+2)(m+1)\,c_{m+2}\,x^{m} = \sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)\,c_{m+2}\,x^{m}$$

نعوض في المعادلة المعطاة نجد:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,c_{n+2}\,x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)\,c_{n+2}+c_n\right]x^n=0$$

ولكي تتحقق هذه المعادلة لجميع قيم x فمن الضروري أن يكون معامل كل قوة من قوى x المختلفة مساوياً للصفر ولذا نستنتج أن:

$$(n+2)(n+1)\,c_{n+2}+c_n=0 \quad (*) \;\Rightarrow\; c_{n+2}=\frac{-c_n}{(n+2)(n+1)}$$

والمعادلة (*) تسمى بالقانون التدريجي (صيغة تراجعية) وهكذا نحصل على:

$$n=0 \Rightarrow c_2=\frac{-c_0}{2\cdot 1}=-\frac{c_0}{2!}$$

$$n=1 \Rightarrow c_3=\frac{-c_1}{3\cdot 2}=\frac{-c_1}{3!}$$

$$n=2 \Rightarrow c_4=\frac{-c_2}{4\cdot 3}=\frac{c_0}{4\cdot 3\cdot 2!}=\frac{c_0}{4!}$$

$$n=3 \Rightarrow c_5=\frac{-c_3}{5\cdot 4}=\frac{c_1}{5\cdot 4\cdot 3!}=\frac{c_1}{5!}$$

$$n=4 \Rightarrow c_6=\frac{-c_4}{6\cdot 5}=\frac{-c_0}{6!}$$

$$n=5 \Rightarrow c_7=\frac{-c_5}{7\cdot 6}=\frac{-c_1}{7!}$$

وبالعموم إذا كانت $n = 2k+1$ فإن :

$$c_n = c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} c_1 \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

وبالتالي فإن الحل يأخذ الشكل

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \cdots \Rightarrow$$

$$y = c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!} x^2 - \frac{c_1}{3!} x^3 + \frac{c_0}{4!} x^4 + \frac{c_1}{5!} x^5 + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} c_0 x^{2n} + \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots$$

$$y = c_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots \right] +$$

$$+ c_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \right]$$

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

$$\Rightarrow y = c_0 \cos x + c_1 \sin x$$

د. محمود p. 36

تمرين

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية :

$y'' - xy = 0$ في جوار النقطة

$x = 1$

الحل: ان النقطة $x=1$ نقطة عادية للمعادلة ولذا نبحث عن حل من الشكل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$$ ومن ثم فإن :

نعوض كل $n-1$ بـ m ← $n = m+1$ ، عندما $n=0$ ← $m=-1$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-1)^{n-1} = \sum_{m=-1}^{\infty} (m+1) c_{m+1} (x-1)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} (x-1)^m$$

ملاحظة كان من الممكن أن نعوض في y' كل n بـ $n+1$ فنكون $n=n+1$ ومعطينا والدليل السابق ابدأ من الصفر

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, C_{n+1}\, (x-1)^{n}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, C_{n}\, (x-1)^{n-2}$$

نعوض في y'' كل $n-2$ بـ m فيكون :

$n-2=m \Leftarrow n=m+2$ وعندما $n=0$ فإن $m=-2$

$$y'' = \sum_{m=-2}^{\infty} (m+2)(m+1)\, C_{m+2}\, (x-1)^{m} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, C_{m+2}\, (x-1)^{m}$$

وبالتالي $\Rightarrow$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, C_{n+2}\, (x-1)^{n}$$

بالتعويض عن y و y' و y'' في المعادلة المعطاة نجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, C_{n+2}\, (x-1)^{n} - x \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}\, (x-1)^{n} = 0 \Rightarrow$$

الآن ولمساواة معاملات قوى $(x-1)$ المتناظرة يجب أن نكتب معامل y في المعادلة المعطاة بدلالة قوى $(x-1)$ لذا نكتب $x = 1 + (x-1)$ ومنه (
لاحظ أن هذا هو بالضبط متسلسلة تايلور الدالة x حول النقطة $x=1$ وبذلك فإن المعادلة الأخيرة تأخذ الصيغة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, C_{n+2}\, (x-1)^{n} - [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}\, (x-1)^{n} = 0$$

أو :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, C_{n+2}\, (x-1)^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}\, (x-1)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n}\, (x-1)^{n+1} \quad (I)$$

وبإزاحة ترقيم الجمع في المتسلسلة الثانية في الطرف الأيمن ينتج أن :

نعوض عن n بـ $n-1$ نجد

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (x-1)^{n}$$

ومنه يكون بالتعويض في نجد

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, c_{n+2} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} (x-1)^n$$

وبمساواة معاملات $(x-1)$ المتناظرة نحصل على:

كل $n=0$ $\Rightarrow 2c_2 = c_0$, $n=1$ $3\cdot 2\, c_3 = c_1 + c_0$, $n=2$ $4\cdot 3\, c_4 = c_2 + c_1$,

$$(n+2)(n+1)\, c_{n+2} = c_n + c_{n-1} \; ; \; n \geq 1$$

$n=3$

$$5\cdot 4\, c_5 = c_3 + c_2 \; , \ldots ,$$

وهكذا يكون:

$$c_2 = \frac{c_0}{2} \; , \; c_3 = \frac{c_1}{6} + \frac{c_0}{6} \; , \; c_4 = \frac{c_2}{12} + \frac{c_1}{12} = \frac{c_0}{24} + \frac{c_1}{12}$$

$$c_5 = \frac{c_3}{20} + \frac{c_2}{20} = \frac{c_0}{6\cdot 20} + \frac{c_1}{120} + \frac{c_0}{40} = \frac{c_1}{120} + \frac{c_0 + 3c_0}{120}$$

$$= \frac{c_1}{120} + \frac{c_0}{30} = \frac{c_0}{30} + \frac{c_1}{120}$$

$, \ldots$

وبالتالي فإن :

$$y = c_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots \right] +$$

$$+ c_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots \right]$$

أو

أو

$$y = c_0\, y_1(x) + c_1\, y_2(x)$$

وهما حلان مستقلان خطيًا للمعادلة المدروسة.

مسألة: هرميت التفاضلية أوجد الحل العام

$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ ، $x < \infty$ ، λ عدد ثابت

هل يجب ادخال .

ملاحظة: لقد درسنا طريقة ايجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية في جوار النقاط العادية أي في النقاط التي تكون فيها التوابع $p(x)$ ، $Q(x)$ في المعادلة (19) $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$ توابع تحليلية. أما في حال كون التوابع $p(x)$ و $Q(x)$ ليست تحليلية في النقطة x_0 عندئذ فإن الطريقة السابقة لا يمكن تطبيقها وبالتالي لا يمكن ايجاد الحل العام بجوار هذه النقطة غير العادية. فيما يلي نعرض الطريقة التي تمكننا من ايجاد الحلول للمعادلة التفاضلية بجوار بعض النقاط غير العادية.

- اذا كانت x_0 نقطة غير عادية للمعادلة التفاضلية (19) وإذا كانت التوابع $(x-x_0)p(x)$ ، $(x-x_0)^2 Q(x)$ تحليلية في النقطة x_0 فإننا نسمي النقطة x_0 المحققة للشروط المذكورة بنقطة شاذة نظامية للمعادلة المعطاة. ويكون للمعادلة التفاضلية (19) حلولاً من الشكل

مبرهنة الوحيد: يوجد حل واحد على الأقل للمعادلة (1a) في جوار النقطة الشاذة المنتظمة $x = x_0$ قابل للنشر على شكل متسلسلة معممة:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r} = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

و $c_0 \neq 0$ بحيث تكون السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ متقاربة على الأقل في المجال $|x-x_0| < h$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{r+n} \quad (I)$$

r و c_n ثوابت و $c_0 \neq 0$،

لإيجاد هذه الحلول نتبع الطريقة الواردة في حالة النقطة العادية نفسها لذا نشتق العلاقة (I) ثم نعوض في المعادلة التفاضلية (1a) ونطابق فنحصل على العلاقات التي تربط الأمثال c_n والتي تعين الثابت r.

• إن أمثال أصغر قوة لـ x تحدد (x^r) (عند المطابقة) المعادلة التي تعين r. نسمي هذه المعادلة بالمعادلة المعينة (المميزة)، وجذورها تؤدي دورًا كبيرًا في طريقة إيجاد الحلول وفي معرفة كون الحلول الناتجة مستقلة خطيًا أم لا. ويمكن القول إنه في أغلب الحالات نحصل على حل (واحد على الأقل) في جوار النقطة x_0 حيث يمكن استعماله من أجل تخفيض مرتبة المعادلة التفاضلية (وسنتعرض لذلك في هذه الفقرة أيضًا).

•• إذا حصلنا على جذرين مختلفين r_1, r_2 للمعادلة المعينة (المميزة)، وإذا كان $r_2 - r_1$ لا يساوي عددًا صحيحًا، فإننا نحصل في هذه الحالة على حلين للمعادلة (1a)

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$$

من الشكل الذي حصلنا عليه لحل المثال $y'' + xy = 0$ في جوار النقطة العادية $x = 0$

$$\left.\begin{aligned} & 2c_2 = 0 \\ & (n+3)(n+2)c_{n+3} + c_n = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

لكن في الحالات الباقية قد لا نتمكن من الحصول على أكثر من حل واحد.

ملاحظة: سنقتصر في دراستنا على الحالة التي تكون فيها جذور المعادلة المميزة حقيقية ونفرض أن $r_1 \geq r_2$

نتيجة :

• بما أن المعادلة المميزة هي المعادلة التي نحصل عليها عند المطابقة وتمثل أمثال أصغر قوة لـ x (x^0) وهي التي يعطى الجذر r ويرمز لها بـ $I(r+n)$ وهي معادلة من الدرجة الثانية بـ r ويرمز لجذريها بـ r_1, r_2 تقتصر على دراسة الحالة التي يكون فيها جذرا المعادلة المميزة حقيقيين. ونفرض أن $r_1 \geq r_2$ ونبرهن أنه يوجد دوما حل للمعادلة $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ (3) في جوار النقطة $x=0$ له شكل السلسلة (المعممة) $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^{n+r}$ ويوافق r_1 وذلك سواء كان r_1 أكبر تماما من r_2 أو مساوية. من المعادلة التي نحصل عليها بالمطابقة بين أمثال x^n نجد أمثال c_n ... عكس استعمال علاقة التدرج الناتجة لتعيين الأمثال c_n ولتكن a_n نحصل بذلك على الحل : $y_1=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1}$ ونصف التقارب هذه السلسلة h غير معدوم لأن r يوجد لدينا وكما تنص النظرية حل واحد على الأقل في جوار النقطة الشاذة المنتظمة $x=0$ P.102

إيجاد الحل الآخر: يتوقف شكل الحل الآخر على الفرق $r_1 - r_2$ ونميز الحالات التالية :

1- $r_1 - r_2$ ليس عددا صحيحا بتعويض r بـ r_2 في دستور التدرج (علاقة التدرج) نجد أن أمثال c_n هو $I(r_2+n)$ وهو لا ينعدم من أجل أية قيمة لـ n ~~وبالحقيقة ولو وضعنا جدلاً أن $I(r_2+n)$ ينعدم من أجل~~ .

• يمكن إذاً استخدام علاقة التدرج لتعيين جميع الأمثال c_n كافة

و لتكن b_n ونحصل بالتالي على حل آخر y_2 في جوار أيمن للنقطة $x=0$

وباستبدال $|x|^{r_2}$ بـ x^{r_2} في عبارة y_2 نحصل على:

$$y_2 = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

وهي عبارة الحل y_2 في جوار النقطة الشاذة المنتظمة $x=0$. $0<|x|<h$

2) $r_1 = r_2$ (المعادلة المميزة جذر مضاعف)

يوجد لدينا حل y_1 بشكل متسلسلة معممة، وأما الحل الآخر y_2 فليس له شكل المتسلسلة المعممة وإنما y_2 يعطى كما يلي:

$$y_2 = y_1 \ln|x| + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

3) $r_1 - r_2$ عدد صحيح.

يوجد كما رأينا حل y_1 بشكل متسلسلة معممة وأما الحل الآخر y_2 يعطى بالشكل التالي:

$$y_2(x) = c\, y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

حيث $b_0=1$ والثابتة c تكون أحيانا مساوية للصفر.

والأمثلة المحلولة الآتية توضح كيفية إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من المرتبة الثانية.

مثال: أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية الآتية في جوار الصفر

$$x^2 y'' + 2x y' - x y = 0$$

الحل: بما أن $x_0 = 0$ نقطة شاذة نظامية (المعادلة تكتب $y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{1}{x} y = 0$)

وبما أن $(x-0)P(x) = 2$ و $(x-0)^2 Q(x) = -x$ تحليلات في النقطة $x_0 = 0$

فإن x_0 نقطة شاذة نظامية

لذا نفتش عن حلول للمعادلة من الشكل:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

بالاشتقاق والتعويض نحصل على المطابقة:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) c_n x^{r+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) c_n x^{r+n-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r) c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1) c_n + 2(n+r) c_n\right] x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1) c_n\right] x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0 \quad (II)$$

نعوض في السلسلة الثانية كل n بـ $n-1$ فيكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r}$$

وهكذا نأخذ المعادلة السابقة (II) الشكل التالي

الحل الأول

$$r(r+1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1)c_n\right] x^{n+r} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+r} \equiv 0$$

$$r(r+1)c_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+r)(n+r+1)c_n - c_{n-1}\right] x^{n+r} \equiv 0$$

بالمطابقة نجد: $\quad r(r+1)c_0 \equiv 0 \quad$ أمثال x^r

أمثال x^n : $\quad c_n \equiv \dfrac{c_{n-1}}{(n+r)(n+r+1)} \quad ; \quad n \geq 1$

من الجذر الأول $r=0$ نجد:

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n(n+1)}$$

$$c_1 = \frac{c_0}{1\cdot 2} \quad , \quad c_2 = \frac{c_1}{2\cdot 3} = \frac{c_0}{3!\cdot 2}$$

$$c_3 = \frac{c_2}{3\cdot 4} = \frac{c_0}{4!\cdot 3!} \Longrightarrow c_n = \frac{c_0}{n!\cdot(n+1)!} \quad ; \quad n \geq 1$$

وبالتالي نحصل على الحل:

$$y = x^0 c_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(n+1)!}\right]$$

, هو الحل المطلوب

ملاحظة:

يجب أن نلاحظ هنا أنه من أجل الجذر $r=-1$ نحصل على العلاقة الآتية:

$$n(n-1)c_n = c_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

و هذا يؤدي الى عدم ايجاد الحل الآخر بطريقة تعيين الأمثال، طبعا هناك طريقة أخرى لإيجاد هذا الحل لكننا لن نتعرض اليها.