جمل المعادلات التفاضلية الخطية:

الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة هي الجمل التفاضلية من الخط

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{ki}(x)\, y_i + f_k(x) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \qquad (1)$$

إذا كان $f_k(x) = 0$ حيث $k = 1, 2, \dots, n$ من أجل جميع قيم x فإن الجملة التفاضلية (1) تسمى جملة تفاضلية خطية متجانسة، نفرض أن جميع الدوال $P_{ki}(x)$ ، $f_k(x)$ معرفة ومستمرة على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$ تكون عندها الجملة (1) حل وحيد

$y_1 = y_1(x)$ ، $y_2 = y_2(x)$ ، ... ، $y_n = y_n(x)$ معرف على المجال I ويحقق الشروط الابتدائية:

$y_1 = y_1^{(0)}$ ، $y_2 = y_2^{(0)}$ ، ... ، $y_n = y_n^{(0)}$ ، $x = x_0$ حيث إنه يمكن اعطاء المعطيات الابتدائية بشكل اختياري x_0 من المجال I.

واضح أن الجملة التفاضلية الخطية هي جملة تفاضلية نظامية لذا يمكن حلها بالطرائق السابقة التي مرت معنا ولكن يوجد طريقة خاصة لحل الجمل التفاضلية الخطية تعتمد على خواص هذه الجملة وخواص حلولها.

لنبدأ أولاً بدراسة الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة الموافقة لها:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{ki}(x)\, y_i \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \qquad (2)$$

يوجد للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (2) دائماً الحل الصفري

$y_1=0, y_2=0, \ldots, y_n=0$ وهو الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الابتدائية $x=x_0$

$y_1=0, y_2=0, \ldots, y_n=0,$ ولا يوجد حلول أخرى تحقق شروط البدء الصفرية. لإنشاء الحل العام للجملة

التفاضلية الخطية المتجانسة (2) يكفي معرفة n حل خاص غير صفري مستقل خطياً

على المجال I.

$$y_1=(y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n}) \qquad (3)$$
$$y_2=(y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n})$$
$$\text{———————}$$
$$y_n=(y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn})$$

وتكون هذه الحلول مستقلة خطياً على المجال I إذا تحققت المطابقة:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}\, y_{ik} \equiv 0 \qquad ; \; k=1,2,\ldots,n, \; x\in I$$

حيث $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ ثوابت فقط عندما يكون $\alpha_{i1}=0, \alpha_{i2}=0, \ldots, \alpha_{in}=0$

فإننا نسمي جملة الحلول (3) المستقلة خطياً على المجال I جملة حلول أساسية للجملة

التفاضلية الخطية المتجانسة (2)، ويمكن التحقق من أن الشرط اللازم

والكافي كي تكون جملة الحلول (3) للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (2)

جملة حلول أساسية هو أن يكون محدد رونسكي لها:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

مخالفاً للصفر على الأقل في نقطة من المجال I.

اذا علمت جملة حلول أساسية (3) فإن تركيبها الخطي:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_{ik}\, y_{ik} \; ; \; k=1,2,\dots,n \qquad (4)$$

حيث $c_{1k}, c_{2k}, \dots, c_{nk}$ ثوابت اختيارية تمثل حلاً عاماً للجملة النظامية المتجانسة في الساحة:

$$D = \{x \in I \; ; \; |y_1| < +\infty, |y_2| < +\infty, \dots, |y_n| < +\infty\} \qquad (5)$$

ملاحظة: إن كل حلول الجملة الخطية المتجانسة (2) محتواة في الصيغة (4)

- لإيجاد الحل العام للجملة غير المتجانسة (1) تكفي معرفة حل عام للجملة الخطية المتجانسة الموافقة لها (2) من الشكل (4) وحل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة (1) من الشرط $[(y_p)_1, (y_p)_2, \dots, (y_p)_n]$ ويعطى الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (1) في الساحة D كما يلي:

$$y_k = (y_p)_k + \sum_{i=1}^{n} C_i\, y_{ik} \; ; \; k=1,2,\dots,n \qquad (6)$$

وتكون كل حلول الجملة (1) محتواة في الصيغة (6)

يمكن إيجاد الحل العام للجملة (1) باستخدام طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) وذلك انطلاقاً من جملة الحلول الأساسية للجملة الخطية المتجانسة الموافقة (2)

طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) :

نبحث عن حل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة (1) على الشكل :

$$(y_p)_k = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y_{ik} \quad ; \quad k=1,2,\dots,n \qquad (7)$$

حيث $c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ دوال في x قابلة للاشتقاق باستمرار على المجال I

تحدد هذه الدوال من جملة المعادلات

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x)\, y_{ik} = f_k(x) \quad ; \quad k=1,2,\dots,n$$

ويكون لهذه الجملة الجبرية في المجاهيل $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$ حل وحيد لأن محدد الأمثال لها لا يساوي الصفر، وهو محدد رونسكي لجملة الحلول (3)، وبحلها نجد:

وعليه فإن :

$$c_i'(x) = \varphi_i(x) \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

مع إهمال ثوابت المكاملة لأننا نبحث عن حل خاص. نعوض هذه النتائج في الصيغة (7) فنحصل على حل خاص للجملة (1) في الساحة D. وبالتعويض في العلاقة (6) نحصل على الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (1) .

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} y_{ik} \int \varphi_i(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} c_i\, y_{ik}$$

وسنوضح هذه الطريقة في المثال الآتي

مثال :

أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الخطية الآتية :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y\sin x = e^{-\cos x}, \quad \dfrac{dz}{dx} - y\, e^{\cos x} = 2x^2+1 \end{cases}$$

الحل: ان الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة سبق لنا ايجاده

نحل ~~xx~~ المعادلة الأولى بفرض النظم من التالية:

$$\frac{dy}{y} = \sin x\,dx \Rightarrow \ln\frac{y}{c_1} = -\cos x \Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{-\cos x}}$$

نعوض هذه القيمة في المعادلة الثانية من الجملة المتجانسة فنجد:

$$\Leftarrow \frac{dz}{dx} = y e^{\cos x}$$

$$\frac{dz}{dx} = c_1 e^{-\cos x} \cdot e^{\cos x} = c_1 \Rightarrow dz = c_1 dx \Rightarrow \boxed{z = c_1 x + c_2}$$

اذا الحل العام للجملة المتجانسة يعطى بالعلاقات

$$y = c_1 e^{-\cos x} \,,\; z = c_1 x + c_2$$

• الآن نفرض أن الحل الخاص للجملة المعطاة يعطى بالعلاقات

$$y = c_1(x) e^{-\cos x} \,,\; z = c_1(x)\, x + c_2(x) \quad (i)$$

نشتق هذه الحلول ونعوض في الجملة التفاضلية المعطاة فنحصل على المعادلات:

$$c_1'(x) e^{-\cos x} + \sin x\, c_1(x) e^{-\cos x} - \sin x\, c_1(x) e^{-\cos x} = e^{-\cos x} \Rightarrow$$

$$\boxed{c_1'(x) e^{-\cos x} = e^{-\cos x}}$$

نعوض في المعادلة الثانية من الجملة نجد:

$$c_1'(x)\, x + c_1(x) + c_2'(x) - c_1(x) e^{-\cos x} e^{\cos x} = 2x^2 + 1 \Rightarrow$$

$$(ii) \quad \boxed{c_1'(x)\, x + c_2'(x) = 2x^2 + 1}$$

من المعادلة الأولى نجد : $c_1' = 1$ وعليه فإن $\boxed{c_1 = x}$

نعوض c_1 بما يساويه في المعادلة الثانية في العلاقة (ii) فنجد :

$$x + c_2'(x) = 2x^2 + 1 \Rightarrow c_2'(x) = 2x^2 - x + 1 \Rightarrow dc_2 = (2x^2 - x + 1)dx$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$$

بالتعويض في العلاقة (i) نحصل على الحل الخاص للجملة المعطاة، وهو :

$$y = x e^{-\cos x} , \quad z = x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

ومنه فإن الحل العام للجملة المعطاة المطلوب هو :

$$\left\{ y = (x + c_1) e^{-\cos x} , \quad z = (x + c_1)x + c_2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right.$$

حيث c_1 و c_2 ثابتات اختيارية

الجمل التفاضلية الخطية بأمثال ثابتة :

هي من الشكل

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i + f_i(x) \; ; \; k = 1, 2, \ldots, n \qquad (8)$$

حيث أن المعاملات a_{ki} ثوابت حقيقية ونحل بالطرق التي مرت معنا سابقا كما يوجد طرق أخرى لحلها كطريقة دالامبير وطريقة المحددات. وقبل ذلك فلابد من الإشارة إلى أنه في حل الجمل المعادلات غير المتجانسة (8

نقتضي حل جملة المعادلات التفاضلية المجانسة الموافقة لها:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} y_i \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, n \qquad (9)$$

• حل الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة بأمثال ثابتة - طريقة أولر.

وهي طريقة مشابهة للطريقة المتبعة في حل المعادلات الخطية بأمثال ثابتة (في الرياضيات ...) التفاضلية العادية. نبحث عن حل الجملة (9) من الشكل

$$Y = \left(y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x} , y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x} , \dots , y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \right) \qquad (10)$$

حيث λ ثابت وكذلك $\gamma_1 , \gamma_2 , \dots , \gamma_n$ ثوابت أحدها على الأقل مخالف للصفر. نعوض الحل (10) في الجملة (9) ونقسم على $e^{\lambda x}$ فنحصل على الجملة:

$$\left.\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n &= 0 \\
a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

ولكي يكون لهذه الجملة حلاً غير صفري يلزم ويكفي أن يكون محدد الأمثال مساوياً للصفر أي أن يكون λ جذراً للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (12)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة n في λ وتسمى المعادلة المميزة للجملة التفاضلية (9) وتسمى جذورها الأعداد المميزة للجملة ويقابل كل عدد مميز على الأقل حل خاص من النمط (10) :

$$Y_i = \left(y_{i1} = \gamma_{i1} e^{\lambda_i x},\ y_{i2} = \gamma_{i2} e^{\lambda_i x},\ \ldots,\ y_{in} = \gamma_{in} e^{\lambda_i x} \right) \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

حيث $(\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in})$ هو حل لجملة المعادلات (11) المقابل للقيمة $\lambda = \lambda_i$ ونميز هنا حالتين :

أولاً : جميع جذور المعادلة المميزة بسيطة : لتكن $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ جذوراً حقيقية بسيطة للمعادلة (12) نحصل في هذه الحالة على n حلاً خاصاً للجملة المتجانسة (9) :

$$Y_1 = \left(\gamma_{11} e^{\lambda_1 x},\ \gamma_{12} e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x} \right)$$

$$Y_2 = \left(\gamma_{21} e^{\lambda_2 x},\ \gamma_{22} e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x} \right)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_n = \left(\gamma_{n1} e^{\lambda_n x},\ \gamma_{n2} e^{\lambda_n x},\ \ldots,\ \gamma_{nn} e^{\lambda_n x} \right)$$

وعليه فإن الحل العام للجملة التفاضلية المتجانسة (9) هو :

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_{ik} e^{\lambda_i x} \quad ; (k = 1, 2, \dots, n)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت اختيارية .

• إذا كانت بعض الجذور البسيطة عقدية مثلاً $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ جذر عقدياً للمعادلة المميزة (12) عند ئذ يكون المرافق $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ هو أيضاً جذر لهذه المعادلة ستشكل حلاً للجملة التفاضلية المتجانسة (9) من الشرط (10) يقابل الجذر λ :

$$Y_1 = \left(y_{11} = \gamma_1 e^{(\alpha+i\beta)x}, \; y_{12} = \gamma_2 e^{(\alpha+i\beta)x}, \dots, y_{1n} = \gamma_{1n} e^{(\alpha+i\beta)x}\right)$$

نعزل من هذا الحل الجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالاستفادة من علاقة أولر $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ وبذلك نحصل على حلين خاصين حقيقيين مستقلين خطياً للجملة المتجانسة (9) يقابلان الجذران العقديان المترافقات $\lambda, \lambda_2 = \bar{\lambda}$ نستشئ الحلول الخاصة المقابلة لجميع أزواج الجذور العقدية المترافقة وجميع الجذور الحقيقية إن وجدت ونأخذ التركيب الخطي للحلول الخاصة المستقلة خطياً التي أوجدناها مع ثوابت اختيارية فنحصل على الحل العام (9) .

ثانياً : بعض الجذور مكررة : لتكن مثلاً λ_1 جذراً حقيقياً مكرراً k مرة للمعادلة المميزة (12) وعند ئذ يوافق أنه يقابل هذا الجذر حل خاص من النمط :

$$Y = \{y_1 = P_1(x)\, e^{\lambda x},\ y_2 = P_2(x)\, e^{\lambda x},\ \dots,\ y_n = P_n(x)\, e^{\lambda x}\} \quad (13)$$

حيث

$P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ حدوديات من الدرجة $(k-1)$ على الأكثر وبحيث أنه يوجد هناك k ثابتاً اختيارياً من بين أمثال هذه الحدوديات مستقلة خطياً وباقي الأمثال تنتج من هذه الثوابت الاختيارية المستقلة.

نفرض بالتالي أن أحد هذه الثوابت مساو للواحد والبقية مساوية للصفر وهكذا نحصل على k حل خاص مستقلة خطياً مقابلة للجذر λ.

3) إذا كان $\lambda = \alpha + i\beta$ جذراً عقدياً مكرراً k مرة للمعادلة المميزة (12) فإن مرافقه $\lambda_2 = \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ كذلك جذراً مكرراً k مرة. نوجد كما فعلنا أعلاه k حلاً عقدياً خاصاً مستقلة خطياً تقابل الجذر λ وهي من النمط (13) نعزل الجزء الحقيقي والجزء التخيلي فنحصل على $2k$ حلاً خاصاً حقيقياً مستقلة خطياً تقابل $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}$ وإذا كان هناك حلول أخرى غير λ بسيطة أو مكررة) فإنه بإنشاء n حلاً خاصاً حقيقياً مستقلة خطياً تقابل الجذور كلها وبأخذ تركيبها الخطي مع ثوابت اختيارية نحصل على الحل العام للجملة المتجانسة (9)

مثال: أوجد الحل العام للجملة

$$\frac{dy}{dx} = -y - 2z, \quad \frac{dz}{dx} = 3y + 4z$$

الحل: نبحث عن حل عام للجملة المعطاة من النمط:

$$\{y = \gamma_1 e^{\lambda x},\ z = \gamma_2 e^{\lambda x}\} \quad (*)$$

نكتب المعادلة المميزة المقابلة للجملة :

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

والجذور هي $\lambda_1 = +1$ و $\lambda_2 = +2$ الآن ننشئ الحل الخاص من النمط (*) المقابل للجذر λ_1 من العلاقة ~~(13)~~ ، نبحث عن العددين γ_1 و γ_2 من الجملة الخطية :

$$-2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0 \quad , \quad 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$$

والتي توافق معادلة واحدة $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$

أي يجب اختيار أحد العددين γ_1 أو γ_2 اختياريا. لنفرض أن $\gamma_1 = 1$ ويكون $\gamma_2 = -1$ وعليه فإن الحل المقابل للجذر λ_1 هو

$$\{ y_1 = e^{t} \ , \ z_1 = -e^{t} \}$$

وبأسلوب مشابه لإيجاد الحل الخاص المقابل للجذر λ_2 :

$$\{ y = \gamma_1 e^{2t} \ , \ z = \gamma_2 e^{2t} \}$$

لنبحث عن العددين γ_1, γ_2 من الجملة الخطية المعطاة :

$$2\gamma_1 e^{2t} = -\gamma_1 e^{2t} - 2\gamma_2 e^{2t} \Rightarrow \boxed{3\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0}$$

ومن المعادلة الثانية في الجملة نجد :

$$2\gamma_2 e^{2t} = 3\gamma_1 e^{2t} + 4\gamma_2 e^{2t} \Rightarrow \boxed{3\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0}$$

والتي توافق معادلة واحدة $3\gamma_1 + 2\gamma_2 = 0$ باختيار $\gamma_1 = 2$ تكون $\gamma_2 = -3$ وعليه فإن الحل المقابل للجذر $\lambda_2 = 2$ هو

$$\{ y_2 = 2e^{2t} \ , \ z_2 = -3e^{2t} \}$$

وبالتالي فإن الحل العام للجملة المعطاة هو :

حيث c_1, c_2 ثابتات اختياريان و $\{y = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} , \; z = -c_1 e^{x} - 3c_2 e^{2x}\}$ مستقلان

تمرين: أوجد الحل العام للجملة: $\left\{\frac{dy}{dx} = 2y - z , \; \frac{dz}{dx} = y + 2z\right\}$

الحل: نكتب المعادلة المميزة للجملة:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

إيجاد جذور المعادلة المميزة:

إن المميز هو: $\Delta = 16 - 20 = -4 = 4i^2$ وبالتالي فللمعادلة جذران عقديان هما

$$\lambda_1 = \frac{4+2i}{2} = 2+i \quad , \quad \lambda_2 = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

نشئ الحلول العقدية المقابلة للجذر $(2+i)$ من الشكل:

$$y = \gamma_1 e^{(2+i)x} , \; z = \gamma_2 e^{(2+i)x}$$

وتحصل على العددين γ_1, γ_2 من المعادلة $-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0$ بفرض $1 = \gamma_1$

نجد $\gamma_2 = -i$ ومنه:

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x)$$

$$z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x)$$

وبعزل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي نحصل على حلين خاصين مستقلين خطياً.

$y_1 = e^{2x}\cos x$ ، $y_2 = e^{2x}\sin x$ ، $z_1 = e^{2x}\sin x$ ، $z_2 = -e^{2x}\cos x$

و الحل العام للجملة المعطاة :

$y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$ و $z = e^{2x}(c_1\sin x + c_2\cos x)$

حيث c_1 ، c_2 ثابتات اختياريان مستقلان.