مثال (1)
P95

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2x^2y'' + (3x-2x^2)\,y' - (x+1)\,y = 0$$

في جوار النقطة $x=0$

الحل : واضح أن $x=0$ نقطة شاذة نظامية لأن:

المعادلة تكتب بالشكل (19) :

$$y'' + \left(\frac{3x-2x^2}{2x^2}\right) y' - \left(\frac{x+1}{2x^2}\right) y = 0$$

واضح أن $x=0$ نقطة شاذة لكل من $P(x), Q(x)$ وبما أن

$$xP(x) = \frac{3-2x}{2} \quad , \quad x^2Q(x) = \frac{x+1}{2}$$

تحليليات في النقطة $x_0=0$ فهي نقطة شاذة نظامية (منتظمة).

لذا نفتش عن حل من الشكل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \quad , \quad c_0 \neq 0$$

باشتقاق y نجد:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r} - 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, c_n x^{n+r+1}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

أو

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)c_n+3(n+r)c_n-c_n\right]x^{n+r}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+r)c_n+c_n\right]x^{n+r+1}=0$$

نضع في المتسلسلة الثانية كل n بـ $n-1$ فنبدأ عندئذٍ $n=1$ ونكتب العلاقة السابقة بالشكل

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+r)(n+r-1)c_n+3(n+r)c_n-c_n\right]x^{n+r}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+r-1)c_{n-1}+c_{n-1}\right]x^{n+r}=0$$

أو بالشكل

$$2r(r-1)c_0+3rc_0-c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1\right]c_n-\left[2(n+r-1)+1\right]c_{n-1}\right\}x^{n+r}=0$$

وبالمطابقة نجد:

المعادلة المميزة (I)

$$\left[2r(r-1)+3r-1\right]c_0=0\ ;\quad c_0\neq 0 \qquad (I)$$

$$\left[2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1\right]c_n-\left[2(n+r-1)+1\right]c_{n-1}=0 \qquad (II)$$

من المعادلة المميزة (I) نجد:

$$2r^2+r-1=0$$

بحل هذه المعادلة نجد أن $r_1=-1$ ، $r_2=\frac{1}{2}$ هما جذرا المعادلة المميزة ونلاحظ أن $(r_1-r_2)\notin \mathbb{Z}$ (ليس عدداً صحيحاً) فيوجد للمعادلة المعطاة حلان مستقلان خطياً

لكل منها شكل السلسلة المعممة.

من المعادلة (II) الآن إيجاد الدستور التدريجي:

$$[2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1]\,c_n = [2(n+r-1)+1]\,c_{n-1} \quad ، \quad n \geq 1$$

وهذه المعادلة يمكن كتابتها على الشكل الآتي:

$$c_n = \frac{2(n+r)-1}{2(n+r)(n+r-1)+3(n+r)-1}\,c_{n-1}$$

بوضع $r = x_1 = -1$ نجد:

$$c_n = \frac{2(n-1)-1}{2(n-1)(n-2)+3(n-1)-1}\,c_{n-1} = \frac{2n-3}{n(2n-3)}\,c_{n-1}$$

أي أن:

$$c_n = \frac{1}{n}\,c_{n-1} \quad ، \quad n \geq 1$$

وهكذا نجد:

$$c_1 = c_0$$

$$c_2 = \frac{1}{2}c_1 = \frac{1}{2}c_0$$

$$c_3 = \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{6}c_1 = \frac{1}{3.2}c_0$$

$$\text{---------}$$

$$c_n = \frac{1}{n!}c_0$$

وبذلك نجد الحل الخاص الأول للمعادلة وهو:

$$y_1 = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{-1}\left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[c_0 + c_0 x + \frac{1}{2!} c_0 x^2 + \frac{1}{3!} c_0 x^3 + \cdots\right]$$

$$[31] \Rightarrow y_1 = \frac{1}{x} e^{x} \quad ; \quad c_0 = 1$$

وبأخذ الجذر الآخر $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ نجد :

(α)

$$c_n = \frac{2}{2n+3} c_{n-1} \quad ; \quad n \geq 1$$

وهكذا فإن

$$c_1 = \frac{2}{5} c_0$$

$$c_2 = \frac{2}{7} c_1 = \frac{4}{7 \cdot 5} c_0$$

$$c_3 = \frac{2}{9} c_2 = \frac{4}{9} c_1 = \frac{16}{5 \cdot 7 \cdot 9} c_0$$

$$- - - - -$$

وتكون العبارة :

$$y_2 = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^{\frac{1}{2}}\left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow y_2 = x^{\frac{1}{2}}\left[c_0 + \frac{2}{5} c_0 x + \frac{4}{5 \cdot 7} c_0 x^2 + \frac{16}{5 \cdot 7 \cdot 9} c_0 x^3 + \cdots\right]$$

$$\Rightarrow y_2 = c_0 x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{2}{5} x + \frac{(2x)^2}{5 \cdot 7} + \frac{(2x)^3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots\right]$$

هي الحل الخاص الثاني للمعادلة والحل العام للمعادلة المفروضة هو

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2$$

توصل بناء على الجذور المتماثلة لحل هذا النوع ...

تمرين: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x(x+1)\,y''+(1+x)\,y'-y=0 \qquad (a)$$

في جوار النقطة $x=0$.

حـ، P198

بما أن $x=0$ نقطة شاذة منتظمة نبحث عن حل من الشكل:

$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$ بالاشتقاق مرتين نجد:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\,c_n x^{n+r-2}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بـ x و ~~بالتعويض نجد~~ نجد:

$$(x^3+x^2)\,y''+(x+x^2)\,y'-xy=0$$

بالتعويض نجد:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\,c_n x^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\overset{(n+r-1)}{}\,c_n x^{n+r}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,c_n x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,c_n x^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^{n+r+1}=0 \qquad (b)$$

لتعيين المعادلة المميزة، نجعل أمثال أقل قوة في x عندما $n=0$ (أمثال الحد الثابت) مساوٍ الصفر، فنحصل على:

$$r(r-1)c_0+r\,c_0=0 \Rightarrow [r(r-1)+r]\,c_0=0 \quad , \quad c_0\neq 0$$

ومنه $r^2=0$ وجذور هذه المعادلة $r_1=r_2=0$ ونلاحظ أن $(r_1-r_2)\in \mathbb{Z}$ وبالتالي لإيجاد الحل العام للمعادلة المعطاة يجب أن

نجد حلاً خاصاً من الشكل :

$$y = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

ولإيجاد القانون التدريجي نجعل أمثال x^{n+r+1} مساوية للصفر في العلاقة (b) وذلك بعد تبديل كل n بـ $n+1$ بالمتسلسلتين الثانية والثالثة من العلاقة (b) فنحصل على :

$$(n+r)(n+r-1)c_n + (n+r+1)(n+r)c_{n+1} + (n+r+1)c_{n+1} + (n+r)c_n - c_n = 0$$

$$\Longrightarrow (n+r+1)(n+r+1)c_{n+1} + \left[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 1\right] = 0 \Longrightarrow$$

$$c_{n+1} = -\frac{(n+r)(n+r-1+1)-1}{(n+r+1)^2} = \frac{-(n+r)^2+1}{(n+r+1)^2}\, c_n \quad ; \; n \geq 0$$

لنبدل كل r بـ $r_1 = 0$ فنجد :

$$c_{n+1} = \frac{1-n^2}{(n+1)^2}\, c_n \; ; n \geq 0 \quad \text{أو} \quad \boxed{c_{n+1} = \frac{1-n}{1+n}\, c_n \; ; \; n \geq 0}$$

وهكذا ابتداءً :

$$c_1 = c_0 \; ; c_0 \neq 0 \; , \; c_2 = 0 \; , \; c_3 = \frac{-1}{3} c_2 = 0$$

— — — —

$$c_2 = c_3 = c_4 = \dots = c_n = 0$$

ومنه نجد أن الحل الخاص من أجل $r_1 = 0$ هو

$$y_1 = c_0 + c_1 x = c_0 + c_0 x \Longrightarrow \boxed{y_1 = 1 + x \; ; \; c_0 = 1}$$

نجري التحويل (6) $y = y_1 z$ ومنه

نشتق العلاقة (d) ونبدل في المعادلة المفروضة نحصل على معادلة $y = (1+x) z \quad (d)$

جديدة تحوي الدالة المجهولة z، كمايلي

$$y'' = 2z' + (1+x) z''$$ ؛

$$y' = z + (1+x) z'$$

بالتعويض في المعادلة المفروضة (a) المعطاه فنجد:

$$x(x+1)\left[2z' + (1+x) z''\right] + (1+x)\left[z + (1+x) z'\right] - (1+x) z = 0 \Rightarrow$$

ومنه نجد:

$$x(1+x)^2 z'' + 2x(1+x) z' + (1+x) z + (1+x)^2 z' - (1+x) z = 0$$

$\Rightarrow$ بالاختصار على $1+x$ بشرط $x \neq -1$ نجد

$$x(1+x) z'' + (2x + (1+x)) z' = 0 \Rightarrow$$

$$x(1+x) z'' + (3x+1) z' = 0$$ وهذه معادلة تحوي الدالة المجهولة z،

وحل هذه المعادلة نجد:

(d)

$\frac{2}{2-1}$

$1-\frac{2}{1}$

$\frac{2x-1}{2}$

$Z'' + \frac{3x+1}{x(1+x)} Z' = 0$ (*

الحل

$x(1+x)Z'' + (3x+1)Z' = 0$

$x=0$ نقطة شاذة منتظمة

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$$

$$Z' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1}, \quad Z'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة (*)

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}\right](x + x^2) + (3x+1)\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} = 0$$

نعوض كل n بـ n+1 في المتسلسلة الأولى و الرابعة الأخيرة نجد

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)\,c_{n+1}x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\,c_n x^{n+r}+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,c_n x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)\,c_{n+1}x^{n+r}=0 \quad \Longrightarrow$$

$$r(r-1)\,c_0 x^{r-1}+r\,c_0 x^{(r-1)}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\big((n+r+1)(n+r)+(n+r+1)\big)c_{n+1}\Big]x^{n+r}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\big((n+r)(n+r-1)+3(n+r)\big)c_n\Big]x^{n+r}$$

$$\big(\big(r(r-1)+1\big)c_0\big)x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\big((n+r+1)(n+r+1)\big)c_{n+1}+(n+r)(n+r-1+3)\,c_n\Big]x^{n+r}$$

$$\Rightarrow \big(\big(r^2 \cdots c_0\big)x^{r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+r+1)^2 c_{n+1}+(n+r+2)(n+r)\,c_n\Big]x^{n+r}=0$$

بالمطابقة

$(r^2 \cdots)$, $c_0=0$, $c_0\neq 0$ (I) $\Longrightarrow$ المعادلة ... $r=r_1=r_2=0$

$$c_{n+1}=\frac{(n+r+2)(n+r)}{(n+r+1)^2}\,c_n\ , \ n\geq 0 \qquad (II)$$

من المعادلة I نجد المعادلة المميزة

إن التمرين التالي يعالج إيجاد الحل في جوار النقطة الشاذة المنتظمة x_0 حيث $x_0 = 1 \neq 0$

تمرين : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x^2(1-x)^2y'' + x(1-x)(1-2x)y' - y = 0 \quad (1)$$

في جوار النقطة $x = 1$

الحل: نجري التحويل $x - 1 = t$ ونلاحظ أن :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy'}{dt}\cdot 1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$

فتأخذ المعادلة التفاضلية الشكل الآتي

$$t^2(t+1)^2\frac{d^2y}{dt^2} + t(t+1)(1+2t)\frac{dy}{dt} - y = 0 \quad (2)$$

إن النقطة $t=0$ نقطة شاذة منتظمة لهذه المعادلة لأن المعادلة تكتب بالشكل

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1+2t}{t(t+1)}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{t(t+1)(1+2t)}y = 0$$

[illegible] التي بها معرفات عند النقطة $t=0$ [illegible]

$t^2 q(t)$ ، $t\,p(t)$ تحليليات عند النقطة $t=0$ ،

لذلك فللمعادلة حل من الشكل :

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

بالاشتقاق نجد:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-2}$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد :

$$t^2(1+t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-2}+t(t+1)(1+2t)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r-1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r}=0$$

$1+2t+t^2$ $\quad t(2t^2+3t+1)$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r}+(2t^2+3t+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r}=0$$

نعوض في السلسلة (2) كل $n+2\to n$ في السلسلة (3) كل $n+1\to n$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r}+\sum_{n=-2}^{\infty}(n+r+2)(n+r+1)c_{n+2}t^{n+r}$$

$$+2\sum_{n=-1}^{\infty}(n+r+1)(n+r)c_{n+1}t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r+2}$$

$$+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r}=0$$

نعوض في السلسلة (5) كل $n\to(n-2)$ وفي السلسلة (6) كل $n\to n-1$

فنجد :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r} + r(r-1)c_0 t^{r-2} + r(r+1)c_1 t^{r-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+2)(n+r+1)c_{n+2} t^{n+r} + 2r(r-1)c_0 t^{r-1}$$

$$+2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)c_{n-2} t^{n+r} + 3\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1} t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r} = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r} + r(r-1)c_0 t^{r-2} + r(r+1)c_1 t^{r-1}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+2)(n+r+1)c_{n+2} t^{n+r} + 2r(r-1)c_0 t^{r-1}$$

$$+2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)c_{n-2} t^{n+r} + 3\sum_{n=1}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1} t^{n+r} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r} = 0 \Longrightarrow$$

$$\cancel{r(r-1)c_0 t^{r} + r(r-1)c_0 t^{r-2} + r(r+1)c_1 t^{r-1}}$$

$$\cancel{r(r-1)c_0 t^{r} + r(r+1)c_1 t^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r}} + r(r-1)c_0 t^{r-2}$$

$$+ r\,\cancel{(r+1)c_1 t^{r-1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r+2)(n+r+1)c_{n+2} t^{n+r} + (r+2)(r+1)c_2 t^{r}}$$

$$+\cancel{(r+3)(r+2)c_3 t^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r+2)}(n+r+1)c_{n+2} t^{n+r}$$

$$r(r-1)c_0 t^r + r(r+1)c_1 t^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n t^{n+r}$$

$$+ r(r-1)c_0 t^{r-2} + r(r+1)c_1 t^{r-1} + (r+2)(r+1)c_2 t^r$$

$$+ (r+3)(r+2)c_3 t^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r+2)(n+r+1)c_{n+2} t^{n+r}$$

$$+ 2r(r-1)c_0 t^{r-1} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-2)c_{n-2} t^{n+r} + 3rc_0 t^{r+1}$$

$$+ 3\sum_{n=2}^{\infty}(n+r-1)c_{n-1} t^{n+r} + rc_0 t^r + (r+1)c_1 t^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+r)c_n t^{n+r}$$

$$- c_0 t^r - c_1 t^{r+1} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0 \Longrightarrow$$