جامعة دمشق،

كلية **العلوم** الرابعة (**رياضيات**) في **السويداء**،

السنة **الثانية**، مقرر **طوبولوجيا 1**. 2020\2021

TOPOLOGY 1

طوبولوجيا الفضاءات المترية

Abstract

تمَّ عرض مفاهيم حول الفضاءات المترية والمنظمة وفضاءات الجداء الداخلي وتعريف أهم الخواص الطوبولوجية مترياً

Rabea Debs

RabeaDebs@Hotmail.com

Table of Contents

1. أصغر حد أعلى .sup وأكبر حد أدنى .inf

سيتم هنا عرض عدة حقائق تُمّهد لدراسة طوبولوجيا الفضاءات المترية.

1.1 تعريف Definition (مجموعة الأجزاء) بفرض X مجموعة، تُعرَّف *مجموعة أجزاء* X بالطريقة

$$A \in 2^X \Leftrightarrow A \subseteq X$$ [i]

فمثلاً، في نظرية الاحتمالات، إن أي حدث ضمن فضاء العينة Ω هو أحد عناصر 2^Ω. وتُثبِت نظرية الاحتمالات أنه عندما تكون X منتهية وعدد عناصرها n فإن عدد عناصر مجموعة أجزائها هو 2^n وهو ما يبرر ترميز التعريف بهذه الطريقة.

2.1 ترميز Notation بشكل عام يُكتب عنصر المجموعة بالنمط Small letter مِثل x، وتُكتب المجموعة التي عناصرها من النمط Small بالنمط Capital letter مِثل X، والمجموعة التي عناصرها مجموعات تُسمى جماعة Class وتُكتب بالنمط Script مثل $\mathcal{T}$، $\mathcal{A}$، $\mathcal{N}$، $\mathcal{F}$، $\mathcal{U}$، $\mathcal{E}$. وأخيراً، المجموعة التي كل من عناصرها جماعة كل من عناصرها مجموعة من العناصر تُكتب بالنمط Fraktur مثل $\mathfrak{M}$ وقد تجد نفسك أمام ترميز مثل $m \in M \in \mathcal{M} \in \mathfrak{M}$.

3.1 تعريف (الجداء الديكارتي المنتهي) بِفرْض X مجموعة، وبفرض Y مجموعة. يُعرَّف *الجداء الديكارتي* $X \times Y$ بالطريقة

$$X \times Y := \{(x, y) |\ x \in X \wedge y \in Y\}$$

أي هو مجموعة الأزواج المرتبة التي مسقط كل منها الأول من X والثاني من Y.

يُعتبر التمثيل الهندسي مألوفاً للجداء الديكارتي. مثلاً تُمثَّل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بمستقيم، وتُمثَّل المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بمستوٍ، والمجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ بالفراغ.

---

[i] يُقرأ الرمز $\Leftrightarrow$ "يُكافئ تعريفاً"

بفرض $x_1 \in X_1$ و $x_2 \in X_2$. يُنظر للزوج المرتب (x_1, x_2) على أنه تابع منطلقه المجموعة المنتهية $\{1,2\}$، ومستقره $\bigcup_{i=1}^{2} X_i$، حيث صورة 1 تُسمى مسقطاً أولاً وصورة 2 تسمى مسقطاً ثانٍ. إذاً $X_1 \times X_2$ هي مجموعة التوابع التي منطلق كل منها هو $\{1,2\}$ ومستقره $\bigcup_{i=1}^{2} X_i$ ويتحقق الشرط $x_i \in X_i$، ويتم تعميم التعريف بالطريقة

$$\Pi_{i \in \mathrm{A}} X_i \coloneqq \{f\colon \mathrm{A} \to \textstyle\bigcup_{i \in \mathrm{A}}^{2} X_i \mid f(x_i) \in X_i \forall i \in \mathrm{A}\}$$ [ii]

4.1 مثال Example اختر الإجابة الصحيح

إن $\{\emptyset\} \ni ..$ ① $\mathbb{R}$، ② $2^{\mathbb{R}}$، ③ $\{\mathbb{R}\}$، ④ الأجوبة خاطئة

الجواب هو ④. حيث $\emptyset \subseteq X$ ومنه $\emptyset \in 2^X$ ومنه $\{\emptyset\} \subseteq 2^X$ ومنه $\{\emptyset\} \in 2^{2^X}$ حيث X مجموعة. فلو كان أحد الخيارات هو $2^{2^{\mathbb{R}}}$ لكان صحيحاً.

الجواب الأكثر خداعاً هو $2^{\mathbb{R}}$ لكن $\emptyset \in 2^{\mathbb{R}}$ أو $\emptyset \subseteq 2^{\mathbb{R}}$ وليس $\{\emptyset\} \in 2^{\mathbb{R}}$.

5.1 تعريف (المجموعة المرتبة) بفرض P مجموعة. تكون العلاقة $\leq$ *علاقة ترتيب* على P عندما يتحقق:

1) $\forall x \in P\colon x \leq x$ "انعكاسية" [iii]

2) $\forall (x, y, z) \in P \times P \times P\colon x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$ "متعدية" [iv]

3) $\forall (x, y) \in P \times P\colon x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$ "تخالفية"

وتكون المجموعة P *مرتبة كلياً* عندما يتحقق أيضاً

[ii] يُرمز للمجموعة المنتهية بـ E أو F مثل مجموعة عوامل العدد 15. المجموعة القابلة للعد والغير منتهية هي بالتعريف التي يوجد تقابل بينها وبين $\mathbb{N}$، مِثل $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Q}$. أثبت كانتور وجود مجموعات غير قابلة للعد مِثل $\mathbb{R}$ والتي يوجد تقابل بينها وبين $2^{\mathbb{N}}$. المجموعة الكيفية هي المنتهية أو القابلة للعد أو الغير عدودة ويُرمز لها بـ A. وكمثال على الاجتماع الكيفي فإن $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$. وأيضاً يُرمز لاجتماع الجماعة $\Gamma \coloneqq \{B_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ الذي هو بالتعريف اجتماع عناصرها بِـ $\bigcup \Gamma$ أو $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} B_\alpha$.

[iii] يُقرأ المكمم $\forall$ "أيا كان" ويُقرأ $\exists$ "يوجد" وتُقرا النقطتان: بعد $\forall$ "فإن أو فإنه" وبعد $\exists$ "حيث".

[iv] يُقرأ $\land$ "وَ" ويقرأ $\lor$ "أو". مثلاً تُقرأ القضية $[\forall x \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{Z}\colon x > 0 \Rightarrow x < n_0 \land x > n_0 - 1]$ بالطريقة "أيا كان العدد الحقيقي x فانه يوجد عدد صحيح n_0 بحيث انه إذا كان x موجب تماما فان $x \in]n_0 - 1, n_0[$".

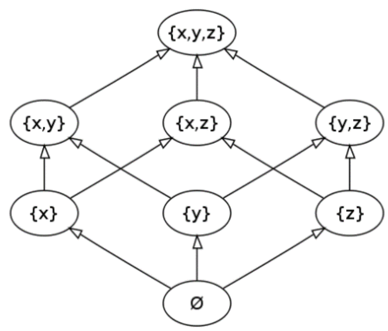
4) $\forall(x,y) \in P \times P: x \leq y \vee y \leq x.$

بدءاً من علاقة الترتيب $\leq$ تُعرَّف *علاقة الترتيب التام* $<$ بالطريقة

$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

كمثال لتوضيح 4. إن $(\mathbb{R}, \leq)$ مرتبة كلياً لأن أحَد أي عددين حقيقيين هو أصغر من الآخر. بينما $(2^{\mathbb{R}}, \subseteq)$ مرتبة جزئياً فمثلاً $[1,3] \nsubseteq [0,2]$ وَ$[0,2] \nsubseteq [1,3]$.

طبعاً إن $<$ ليست علاقة ترتيب لأنها لا تحقق 1 في التعريف 5.1.



رسم توضيحي 1 طريقة Hasse diagram لعرض علاقة الاحتواء كعلاقة ترتيب على $X \coloneqq \{x,y,z\}$

6.1 تعريف (مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة) إن

$$\widetilde{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

إذاً $\mathbb{R} \notin \frac{1}{0} = \pm\infty \ni \widetilde{\mathbb{R}}$.[v]

---

[v] لِفَهم الرمز ∞ يُفضَّل الاطلاع لاحقاً على نظرية رصّ النقطة الواحدة one point compactification (Adams & Robert, 2009, p. 250). لكننا نقبل الآن أن $\pm\infty = \frac{1}{0}$، وأن $(\infty + x = \infty\ \forall x \in \mathbb{R})$، وأن $(x.\infty = \infty\ \forall x > 0)$. بالطبع $(-\infty < x < +\infty\ \forall x \in \mathbb{R})$. وعند دراسة نهاية متتالية حقيقية فالحالات $\infty - \infty+$ و$\frac{\infty}{\infty}$ و$0.\infty$ و1^{∞} و$\sin\infty$ هي حالات عدم تعيين، لكن $0 = 0^{\infty}$ و$\ln -\infty = 0$ و$\ln +\infty = +\infty$ و$\frac{0}{\infty} = 0$ و$\infty^1 = \infty$.

7.1 تعريف (العدد الموجب تماماُ والموجب) إن $[x$ موجب تماما $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow x > 0]$ و$[x$ موجب $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^{+} = \mathbb{R} - \mathbb{R}^{-*} \Leftrightarrow x \geq 0]$. طبعاً إن $\pm 0 = 0$. في بعض المراجع يُسمى الموجب تماماً "موجب " والموجب "غير سالب".

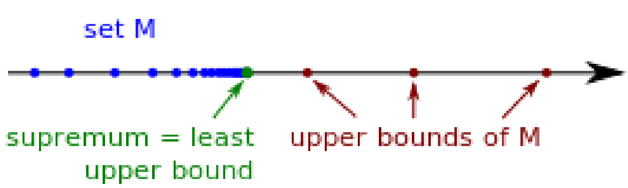
8.1 تعريف (حد أدنى وحد أعلى لمجموعة) بفرض $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة وبفرض $A \subseteq P$ إن

$$\left(l \text{ حد أدنى لـ } A\right) \Leftrightarrow (l \leq A) \Leftrightarrow (\forall a \in A : l \leq a)$$

و

$$\left(u \text{ حد أعلى لـ } A\right) \Leftrightarrow (u \geq A) \Leftrightarrow (\forall a \in A : a \leq u)$$

مثلاً ضمن المجموعة المرتبة $(\mathbb{R}, \leq)$، إن للمجموعة $\mathbb{R}^{-}$ أكثر من حد أعلى مثل $u_1 = 1$ أو $u_2 = 5$، وهي لا تملك أي حد أدنى "لكنها في الحقيقة تملك حد أدنى وحيد ضمن $\widetilde{\mathbb{R}}$ هو $-\infty$".
إذاً قد لا تملك المجموعة حد أعلى أو أدنى، وعادةً ما يكون للمجموعة عدة حدود يتم اختيار أحدها.
أهم حد أعلى لمجموعة هو .sup ، وأهم حد أدنى لها هو .inf.



رسم توضيحي 2 عدة حدود عليا للمجموعة M وأهمها sup M

9.1 ترميز أحياناً يتم وضع نقطة "." مكان متغيرات مُنطلَق التابع مثلاً يُرمز لتابع القيمة المطلقة بـ $|.|$ وللتابع التربيعي $.^2$. ويتم اختصار بعض العلاقات أيضاً مثل $\sin 2. = 2 \sin . \cos .$.

10.1 تعريف (أصغر حد أعلى .sup وأكبر حد أدنى .inf) [vi] بفرض $(P, \leq)$ مجموعة مرتبة، وبفرض $A \subseteq P$. يُعرَّف .sup بالطريقة

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \ s \geq A \\ 2) \ \ s' \geq A \Rightarrow s' \geq s \end{cases}$$

أي إن $\sup A$ هو حد أعلى لـ A ولا يوجد أي حد أعلى لـ A أكبر منه.

أيضاً يُعرَّف .inf بالطريقة

$$i = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \ i \leq A \\ 2) \ \ i' \leq A \Rightarrow i' \leq i \end{cases}$$

أي إن $\inf A$ هو حد أدنى لـ A ولا يوجد أي حد أدنى لـ A أصغر منه.

11.1 خاصيَّة Property (خواص .sup) *بفرض* $(P, \leq)$ *مجموعة مرتبة وبفرض* $A \subseteq P$ *فإنه:*

1) *إن التعريف جيد لأنه عندما يكون* $sup\ A$ *موجوداً ضمن* P *فهو وحيد.*

2) *عندما يتحقق* $sup\ A \in A$ *فإن* $sup\ A = max\ A$*. فكما أن المربع هو متوازي أضلاع، فإن الـ* $max.$ *لمجموعة هو* $sup.$ *لها.*

مثلاً ضمن $\mathbb{R}$ إن $\sup[0,1] = \max[0,1] = 1$، لكن $\sup]0,1[= 1 \neq \max]0,1[\notin \widetilde{\mathbb{R}}$. وأيضاً $\sup \mathbb{R}^+$ غير موجود ضمن $(\mathbb{R}, \leq)$.

3) *إثبات أن* $s = sup\ A$ *ضمن* $(\mathbb{R}, \leq)$ *يتم بعدة طرق مِثل:*

1) $s \geq A$

2) $r \geq A \Rightarrow r \geq s$

[vi] sup هي Supremum وتُقرأ سوبريما Suprema، inf هي Infimum وتُقرأ إنفيما Infima.

أو:

1) $s \geq A$

2) $\forall \epsilon > 0 \ \exists a \in A: a \geq s - \epsilon$

2. الفضاءات المترية

تابع المسافة هو تعميم لمفهوم المسافة المألوفة بين نقطتين في $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}^2$ او $\mathbb{R}^3$. حيث ليس هناك أهمية لترتيب نقطتي المسافة، والمسافة بين نقطتين تنعدم عندما يتم الانطباق، والخاصيَّة الأهم هي متراجحة المثلث.

1.2 ترميز يُرمز *لمجموعة التوابع* التي منطلق كل منها X ومستقره Y بـ Y^X. مثلاً مجموعة *المتتاليات العددية* هي $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ومجموعة الأزواج الحقيقية المرتبة هي $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R}^{\{1,2\}}$.

وأيضاً يُكتب التابع الذي منطلقه X ومستقره Y وقاعدة ربطه $f(x) := y_x$ بالطريقة $[Y^X \ni f := (x \mapsto y_x)]$. إن المستقر الفعلي أو مجموعة قيم التابع $f \in Y^X$ هو المجموعة $Y \supseteq f(X) := \{f(x) | \, x \in X\}$.

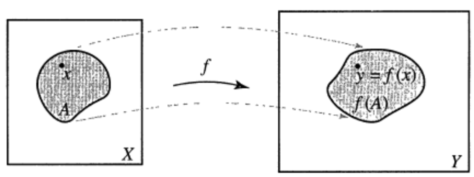


FIGURE 0.22: The image of A under f.

رسم توضيحي 3 مخطط فن لتابع ولمجموعة قيمه

2.2 تعريف (تابع المسافة) بفرض X مجموعة، يكون التابع $d \in \mathbb{R}^{X \times X}$ *تابع مسافة* على X عندما يتحقق:

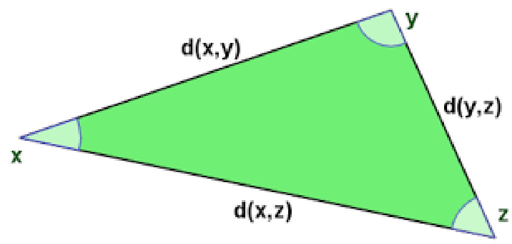
1) $\forall (x,y) \in X \times X : d(x,y) = d(y,x)$

2) $\forall (x,y) \in X \times X : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $\forall (x,y,z) \in X \times X \times X : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

ويُسمَّى الفضاء (X,d) *فضاء متري*.

الصعوبة في d أن منطلقه $X \times X$، وهو ما يبسِّطه لاحقاً تابع النظيم ولكن بوضع شروط على المجموعة X. ان مستقر d ليس $\widetilde{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$.



رسم توضيحي 4 متراجحة المثلث في المستوي $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

3.2 خاصيَّة (المسافة موجبة) *بفرض (X, d) فضاء متري فإن $d \geq 0$*[vii]*. لأنه*

$$\forall (x,y) \in X \times X : 0 \overset{2)}{=} d(x,x) \overset{3)}{\leq} d(x,y) + d(y,x)$$

$$\overset{1)}{=} 2d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq 0$$

ومنه $d \in (\mathbb{R}^+)^{X \times X}$. ■

4.2 مثال المثال الأبسط والأهم هو الفضاء المتري المألوف $(\mathbb{R}, d)$ حيث

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \ni d := \big((x,y) \mapsto |y - x|\big).$$ [viii]

إثبات أن d تابع مسافة هو بسبب خواص القيمة المطلقة وبالذات $|a + b| \leq |a| + |b|$.

5.2 تعريف وخواص ($\mathbb{C}$) إن *مجموعة الأعداد المركبة* هي $\mathbb{C} := \{x.1 + y.i \,|\, (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ حيث $i^2 := -1$. العدد المركب يُمثل بنقطة على المستوي $\mathbb{R}^2$، وبسبب قانون أولر والتحويلات القطبية فإن أي عدد مركب يُكتب بعدة طرق مِثل

[vii] التابع الموجب هو الذي تكون مجموعة قيمه مُحتواة في $\mathbb{R}^+$.

[viii] هنا d تابع منطلقه $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ومستقره $\mathbb{R}$ وعلاقة ربطه $d(x,y) := |x - y|$.

$$z = x + iy = Re(z) + i.Im(z)$$

$$= r(\cos\theta + i.\sin\theta): \begin{bmatrix} r := \sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{r}, \sin\theta = \frac{y}{r}, \tan\theta = \frac{y}{x} \\ x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= re^{i\theta}: e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta$$

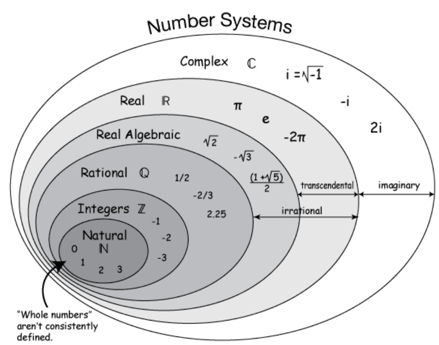
وتُعرَّف *طويلة العدد* $z = x + iy$ بأنها $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ ويتحقق:

$$|z| = r: z = re^{i\theta}$$

$$|z| \leq 2\max\{|x|, |y|\} : z = x + yi$$

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

$$|z||w| = |zw|$$



رسم توضيحي 5 المجموعات العددية بدءاً من ℕ وانتهاءً بـ ℂ

إن طويلة عدد حقيقي هي قيمته المطلقة، وهو ما يبرر الترميز.

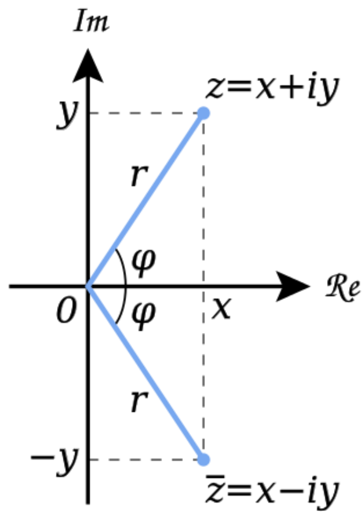
6.2 مثال إن $(\mathbb{C}, d)$ فضاء متري حيث $d(z, w) := |w - z|$. ذلك لأن $d \in \mathbb{R}^{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}$ ويتحقق:

1) $d(z, w) = |w - z| = |z - w| = d(w, z)$

2) $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow |w - z| = 0 \Leftrightarrow z = w$

3) $d(z, w) + d(w, v) = |z - w| + |w - v|$

$$\geq |(z-w)+(w-v)| = |z-v|.$$

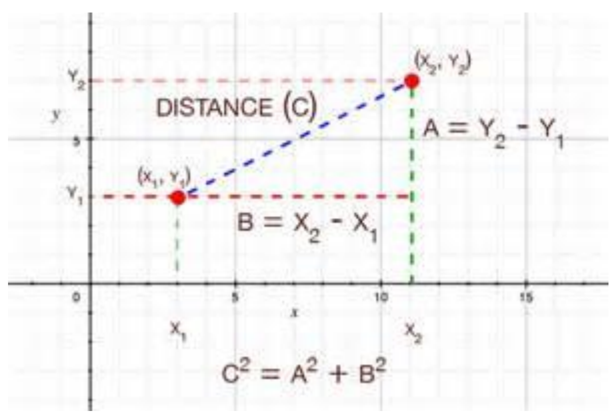


رسم توضيحي 6 مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ والاحداثيات القطبية والمُرافق

هندسيّاً وبعيدا عن الفضاءات المترية إن المسافة بين النقطتين $x := (x_1, x_2)$ و $y := (y_1, y_2)$ ضمن المستوي $\mathbb{R}^2$ هي $\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$ وباستخدام مفهوم المجموع والأسس هي $\left(\sum_{i=1}^{2}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2}$. الآن وبعد متراجحة كوشي سيتم إثبات أن

$$d(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)^{1/2} : (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$ وبالطبع الخاصية الأصعب هي متراجحة المثلث.



رسم توضيحي 7 الاستنتاج الكلاسيكي وليس المتري للبعد بين نقطتين في المستوي

7.2 خاصيَّة (متراجحة كوشي) *يتحقق دوماً*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

الإثبات. لاحقاً توجد طريقة معاصرة أكثر للإثبات "5.4"، الآن سيتم الإثبات بطريقة كوشي. إن

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 + \sum_{i<j} \left(x_i y_j - x_j y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

يمكن التأكد من المساواة الأخيرة بنشر الجهة اليمنى مع الحالة $n = 2$ ثم التعميم بالاستقراء.

الحدود الثلاثة غير سالبة ومنه

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

ومنه

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$$

■ [ix]

8.2 خاصيَّة *يتحقق دوماً*

$$\forall \left((a_i),(b_i)\right) \in (\mathbb{R}^n)^2 : \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

الإثبات. إن

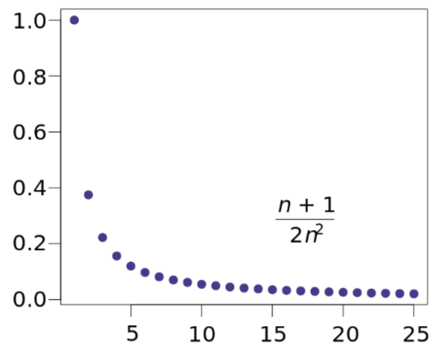
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + b_i^2 + 2a_i b_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^2\right) + 2\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i) \\
&\overset{\text{كوشي}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(b_i^2\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

[ix] يُوضع هذا الرمز ■ بعد نهاية إثبات خاصية أو تمهيدية أو مبرهنة.

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^2) \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (b_i^2) \right)^{1/2} \right)^2$$ [x]

■

يُرمز للمتتالية التي حدها الأول x_1 بـ $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$، ويرمز بـ $(x_i)_{i\leq n} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$



رسم توضيحي 8 المتتالية هي تابع منحنيه نقطي ويوضح الرسم ان نهاية هذه المتتالية هو صفر حيث محور الفواصل هو مقارب

9.2 نظرية *إن*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \ni d := \left((x := (x_i)_{i\leq}, y := (y_i)_{i\leq n}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \right)^{1/2} \right)$$

هو تابع مسافة على $\mathbb{R}^n$.

الإثبات: انه $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ فإن:

$$1)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: (y_i - x_i)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i = y_i$$

$$\Leftrightarrow (x_i)_{i\leq n} = (y_i)_{i\leq n}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

---

[x] إن $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ وطبعاً $x^{0.5} = \sqrt{x}$ حيث $(a, b, x) \in \mathbb{R}^{+3}$.

2) $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2} = d(y,x)$

3) $d(x,z) = \left(\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i + y_i - x_i)^2\right)^{1/2}$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

طبعاً إن تعريف d جيد لأن $d(x,y) \in \mathbb{R}$. ■

10.2 نتيجة Corollary إن التابع $d(z,w) := \left(\sum_{j=1}^{n}\left|z_j - w_j\right|^2\right)^{1/2}$ هو تابع مسافة على $\mathbb{C}^n$. لأن مستقره $\mathbb{R}$، ويحقق شروط تعريف تابع المسافة، ولإثبات متراجحة المثلث إن

$$d(r,t) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|r_j - s_j + s_j - t_j\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\left|r_j - s_j\right| + \left|s_j - t_j\right|\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n}\left|r_j - s_j\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left|s_j - t_j\right|^2\right)^{1/2}$$

■

11.2 مثال (الفضاء المتري المتقطع) بفرض X مجموعة، وَ

$$\mathbb{R}^{X \times X} \ni d := \left((x,y) \mapsto \begin{cases} 0: x = y \\ 1: x \neq y \end{cases}\right)$$

إن d يحقق:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = \begin{cases} 0: x = y \\ 1: x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0: y = x \\ 1: y \neq x \end{cases} = d(y,x)$

$$3)\ d(x,y)+d(y,z)=\begin{cases}0 & : x=y=z\\ 2\geq d(x,z) & : x\neq y \wedge y\neq z\\ 1\geq d(x,z) & : else\end{cases}$$

$$\geq d(x,z)$$

إذاً d تابع مسافة يسمى تابع المسافة المتقطع، ويسمى الفضاء المتري (X,d) المتقطع.

12.2 تعريف (مقصور تابع والفضاء المتري الجزئي) بفرض $f\in Y^X$ تابع. إن مقصور f على $A\subseteq X$ هو التابع $Y^A\ni f|_A := (x\in A\mapsto f(x)\in Y)$.

بفرض (X,d) فضاء متري وبفرض $Y\subseteq X$ ان مقصور d على $Y\times Y$ هو تابع مسافة. يسمى $(Y,d|_Y)$ فضاء متري جزئي من (X,d).

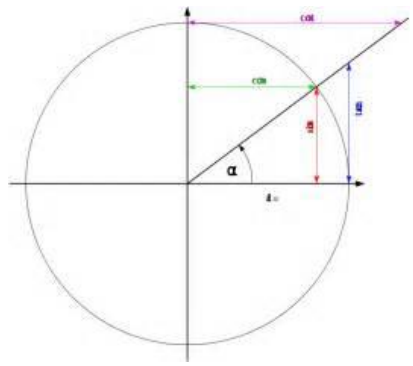
13.2 خاصيَّة *بفرض (X,d) فضاء متري وبفرض $f\in X^Y$ تابع متباين وليكن $\rho\in\mathbb{R}^{Y\times Y}$ المُعرَّف بالطريقة $\rho(x,y):=d\big(f(x),f(y)\big)$. فإن (Y,ρ) فضاء متري.*

الإثبات: تمرين. ■

14.2 مثال إن التقابل $\tan.\in\widetilde{\mathbb{R}}^{\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]}$ ضمن الخاصية السابقة سيساعد في بناء تابع مسافة على $\widetilde{\mathbb{R}}$. ليكن d هو تابع المسافة المألوف على $\mathbb{R}$ فإن المقصور $d|_{\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]\times\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]}$ هو تابع مسافة على $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$. ولأن $\tan.$ تقابل فإن $\rho(x,y):=d(\tan^{-1}x,\tan^{-1}y)$ هو تابع مسافة على $\widetilde{\mathbb{R}}$. إن $\tan^{-1}\mp\infty=\mp\frac{\pi}{2}$ ويتحقق مثلاً:

$$\rho(-\infty,b)=\left|-\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}b\right|=\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}b$$

$$\rho(-\infty,+\infty)=\left|-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right|=\pi$$



رسم توضيحي 9 إن منطلق tan المُعطى هو القوس الأيمن للدائرة المثلثية ومستقره $\mathbb{R}$

الآن سيتم تعريف مجموعة من التوابع تحقق خواص معينة ثم سيتم بناء جيد لتابع مسافة عليها.

15.2 تعريف (قطر مجموعة ومجموعة التوابع المحدودة $\boldsymbol{\mathcal{B}_{(X,d)}(S)}$) بفرض S مجموعة وبفرض (X,d) فضاء متري يُعرَّف *التابع المحدود* بالطريقة

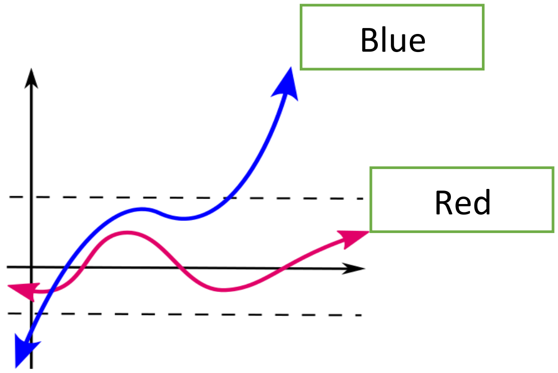
$$\left(f \in X^S \text{ محدود}\right) \Leftrightarrow \left(\sup\left\{d\left(f(a),f(b)\right):(a,b)\in S\times S\right\}<\infty\right)$$

ويُرمز *لمجموعة التوابع المحدودة* بـ $\mathcal{B}_X(S) := \left\{f \in X^S : \text{محدود } f\right\}$. *قطر مجموعة* $A \subseteq X$ ضمن الفضاء المتري (X,d) هو سوبريما المسافات بين نقاطها ويُعرَّف بالطريقة

$$\operatorname{diam} A \coloneqq \sup\{d(a,b)|\ (a,b)\in A\times A\}$$

ينتج مباشرةً من تعرف قطر مجموعة أن $\mathcal{B}_X(S)=\{f\in X^S|\operatorname{diam} f(S)<\infty\}$. إن سوبريما أي مجموعة حقيقية ينتمي إلى $\tilde{\mathbb{R}}$، فالتعريف السابق يكافئ أن

$$\sup\left\{d\left(f(a),f(b)\right)|\ (a,b)\in S\times S\right\}\neq+\infty$$



رسم توضيحي 10 المنحني الأحمر هو لتابع محدود اما الأزرق فالمسافات بين عناصر مجموعة قيمه تزداد نحو اللانهاية

إن مجموعة التوابع المحدودة هي البيئة المناسبة لبناء تابع مسافة بين تابعين.

16.2 نظرية (التعريف الجيد لتابع المسافة المنتظمة) *إن التابع d_∞ المُعرَّف بالطريقة*

$$\widetilde{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}_X(S)\times\mathcal{B}_X(S)} \ni d_\infty := \Big((f,g) \mapsto sup\big\{d\big(f(x),g(x)\big) |\ x\in X\big\}\Big)$$

هو تابع مسافة على $\mathcal{B}_X(S)$.

الإثبات. إن التعريف جيد حيث مستقر التابع d_∞ هو $\mathbb{R}$ "أي إن $\forall(f,g)\ d_\infty(f,g)\neq +\infty$"، لأنه بفرض $s_0\in S$ ولأن d تابع مسافة فإن

$$d\big(f(s),g(s)\big) \le d\big(f(s),f(s_0)\big) + d\big(f(s_0),g(s_0)\big) + d\big(g(s_0),g(s)\big)$$
$$\le \operatorname{diam} f(S) + d\big(f(s_0),g(s_0)\big) + \operatorname{diam} g(S)$$
$$< \infty$$ [xi]

المتراجحة الأخيرة هي لأن d تابع مسافة ومنه $d\big(f(s),g(s)\big)<\infty$، وأيضاً لأن $(f,g)\in\mathcal{B}_X(S)\times\mathcal{B}_X(S)$ ومنه $\operatorname{diam} f<\infty$ و$\operatorname{diam} g<\infty$.

الآن سيتم إثبات أن $d_\infty\in\mathbb{R}^{\mathcal{B}_X(S)\times\mathcal{B}_X(S)}$ يحقق شروط تابع المسافة، إن:

[xi] بفرض $a\in\mathbb{C}$. إن $a<\infty$ يكافئ أن $a\in\mathbb{R}$ ويكافئ أن $a\neq+\infty$.

1) $d_\infty(f,g) = 0 \Leftrightarrow \sup\{d\big(f(s),g(s)\big) : s \in S\} = 0$

$$\overset{d\geq 0}{\Longleftrightarrow} \forall s \in S\colon f(s) = g(s)$$

$$\Leftrightarrow f = g$$

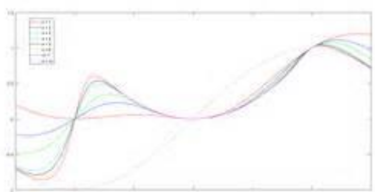
2) $d_\infty(f,g) = \sup\{d\big(f(s),g(s)\big) : s \in S\}$

$$= \sup\{d\big(g(s),f(s)\big) : s \in S\} = d_\infty(g,f)$$

3) $\begin{bmatrix} \forall s \in S\colon d\big(f(s),h(s)\big) \leq d\big(f(s),g(s)\big) + d\big(g(s),h(s)\big) \\ \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\sup\{d\big(f(s),h(s)\big)\colon s \in S\} \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \Rightarrow$$

$$d_\infty(f,g) \leq d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h)$$



■

3. الفضاءات المنظمة

ستتم هنا دراسة حالة مهمة يكون فيها الفضاء المتري فضاء شعاعي ويكون تابع المسافة مولداً يتابع منطلقه أبسط يُسمى النظيم ويتمتع بخواص مميزة كأن يكون صامد تجاه الانسحاب فعند سحب دائرة مثلا في المستوي المألوف $\mathbb{R}^2$ عدة وحدات لن يتغير طول قطرها..

1.3 تعريف (الفضاء الشعاعي أو المتجهي) بفرض V مجموعة وبفرض F حقل يكون $V(F)$ *فضاء شعاعي* عندما يتحقق

$$\forall(u, v, w, \alpha, \beta) \in V \times V \times V \times F \times F$$

1') $u + v = v + u$

2') $u + (v + w) = (u + v) + w$

3') $u + 0_V = 0_V + u = u$

4') $u + (-u) = -u + u = 0_V$

1) $1. u = u$

2) $(\alpha + \beta). u = \alpha. u + \beta. u$

3) $\alpha. (u + v) = \alpha. u + \alpha. v$

4) $\alpha. (\beta. u) = \alpha\beta. u$

الشروط '1، '2، '3، '4 تكافئ أن $(V, +, -, 0_V)$ هي زمرة. والشروط 1، 2، 3، 4 تربط الحقل F بالمجموعة V.

من المهم الانتباه إلى عدة عمليات عند التعامل مع الفضاء الشعاعي كجمع شعاعين وضرب عدد بشعاع وجمع عددين وضرب عددين بالإضافة لعمليات إضافية كطرح عددين وقسمة شعاع على عدد. ومن المهم تمييز حيادي الجمع في F ورمزه 0 وحيادي الضرب في F ورمزه 1 وحيادي

الجمع في V وهو الشعاعي الصفري ورمزه 0_V. غالبا ما يتم التعامل مع الحقل $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ ويرمز بـ $\mathbb{K} \dot{\in} \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

2.3 تعريف (الفضاء المنظم) بفرض $V(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي. يكون التابع $\|.\| \in \mathbb{R}^V$ *نظيم* على $V(\mathbb{K})$ عندما يتحقق:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

2) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3) $|\alpha|.\|x\| = \|\alpha.x\|$

3.3 مثال يمكن ببساطة إثبات أن تابع القيمة المطلقة لعدد حقيقي هو نظيم، وأن تابع طويلة عدد عقدي هو نظيم، وان تابع طول شعاع فيزيائي الذي يعبر عن شدة القوة هو نظيم، لكن محدد مصفوفة ليس نظيم لأنه توجد مصفوفة غير الصفرية محددها صفر.

4.3 خاصيّة *إن* $\|.\| \geq 0$.

الإثبات: إن

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{1}{=} \|0_V\| \\
&= \|x + (-x)\| \\
&\overset{2}{\leq} \|x\| + \|-x\| \\
&\overset{3}{=} \|x\| + |-1|\|x\| \\
&= 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0
\end{aligned}
$$

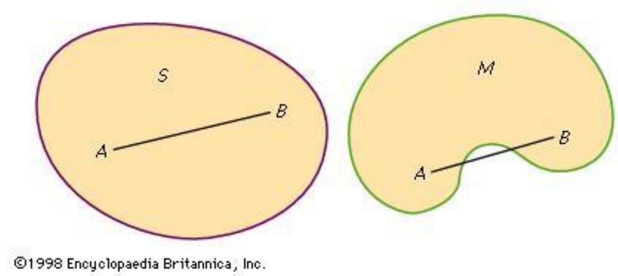
■

فيزيائياً ضمن الفضاء $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ تكون المجموعة محدبة إذا كانت تحوي كل ضلع رأسيه نقطتين منها، انتماء النقطة M إلى القطعة المستقيمة $[AB]$ يُكافئ أن $\overrightarrow{AM} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ ويكافئ أن $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$. التعريف التالي يضمن تعميم مفهوم المجموعة المحدبة ضمن فضاء شعاعي.

5.3 تعريف (المجموعة المحدبة) بفرض $(V(\mathbb{K}), \|.\|)$ فضاء منظم ولتكن $C \subseteq V$ فإن

$$(C \text{ محدبة}) \Leftrightarrow (\forall (x,y) \in C \times C : \{t.x + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subseteq C)$$

تسمى المجموعة $\{t.x + (1-t)y | t \in \mathbb{R}\}$ مستقيما يمر بـ x وy. وتسمى المجموعة $\{t.x + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ *ضلعا* راسيه x وy.



رسم توضيحي 11 ان M ليست محدبة حيث يوجد ضلع راسيه من M وليس محتوىً فيها بينما S محدبة

6.3 نظرية *بفرض* $(V(\mathbb{K}), \|.\|)$ *فضاء شعاعي إن المجموعة* $U := \{x \in V \mid \|x\| < 1\}$ *هي مجموعة محدبة.*

الإثبات. ليكن $(a,b) \in U \times U$ وليكن $t \in [0,1]$. سيتم إثبات أن $t.a + (1-t)b \in U$، إن

$$\|t.a + (1-t)b\| \overset{2)}{\leq} \|t.a\| + \|(1-t).b\|$$

$$\overset{3)}{=} |t|.\|a\| + |(1-t)|.\|b\|$$

$$\overset{U \text{ تعريف}}{<} |t|.1 + |(1-t)|.1$$

$$\overset{t\in[0,1]}{<} t.1+(1-t).1=1 \Rightarrow t.a+(1-t).b\in U$$

ومنه

$$\forall(a,b)\in U\times U: \{t.a+(1-t).b \mid t\in[0,1]\}\subseteq U$$

■

7.3 نظرية (المسافة المولدة بنظيم) *بفرض* $(V(\mathbb{K}),\|.\|)$ *فضاء منظم فإن النظيم* $\|.\|$ *يُعرِّف تابع مسافة* $d(x,y):=\|x-y\|$

الإثبات: إن تعريف d جيد حيث $d(V\times V)\subseteq\mathbb{R}$. ويتحقق:

1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow \|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=0_V \Leftrightarrow x=y$

2) $d(x,y)=\|x-y\|=\|-1(y-x)\|=|-1|\|y-x\|=d(y,x)$

3) $d(x,z)=\|x-z\|=\|x-y+y-z\|$

$$\leq\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z)$$

■

ويسمى d تابع المسافة المولد بالنظيم $\|.\|$.

8.3 نتيجة *أي فضاء منظم هو فضاء متري ويتحقق* $d(.,.):=\|.-.\|$.

4. فضاءات الجداء الداخلي

إن التعميم الرياضي لمفهوم الجداء السلمي المألوف فيزيائياً والممثل لعمل قوة أو استطاعتها، قاد إلى إثبات جديد لمتراجحة كوشي وتعريف جداء داخلي لتابعين باستخدام مفهوم التكامل.

1.4 تعريف (الجداء الداخلي) بفرض $V(\mathbb{K})$ فضاء شعاعي. يكون التابع $\langle .,. \rangle \in \mathbb{K}^{V\times V}$ *جداء داخلي* على $V(\mathbb{K})$ عندما يتحقق

$$\forall(x_1, x_2, x, y, \lambda) \in V \times V \times V \times V \times \mathbb{K}:$$

1) $\langle \lambda x_1 + x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$

2) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$

3) $x \neq 0_V \Rightarrow \langle x, x\rangle > 0$

2.4 خاصية *إن الشرط 1) في التعريف يكافئ*

$$1')\ \begin{matrix}\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \wedge \\ \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle\end{matrix}$$

الإثبات: إن 1) $\Leftrightarrow$ '1) لأن:

$$\Rightarrow)\ \langle \lambda x_1 + x_2, y\rangle = \langle \lambda x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \lambda\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$$

وَ

$$\Leftarrow)\ \langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle 1x_1 + x_2, y\rangle = 1\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$$

سيتم الآن إثبات أن $\langle 0_V, y\rangle = 0$ ولإثبات ذلك إن

$$\langle 0_V, y\rangle = \langle 1.0_V + 0_V, y\rangle = 1.\langle 0_V, y\rangle + \langle 0_V, y\rangle \Rightarrow \langle 0_V, y\rangle = 2\langle 0_V, y\rangle$$

$$\Rightarrow \langle 0_V, y\rangle = 0$$

إذاً $\langle \lambda x, y\rangle = \langle \lambda x + 0_V, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \langle 0_V, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. ■

3.4 نتيجة *إن* $\langle x,y\rangle\in\mathbb{C}$ *ولكن* $\langle x,x\rangle\in\mathbb{R}$.

الإثبات. ينتج من التعريف ولأن $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ أن $\langle x,y\rangle\in\mathbb{C}$. وبسبب 3) فإن $\langle x,x\rangle=\overline{\langle x,x\rangle}$ لكل $x\in V$ ومنه $\langle x,x\rangle$ هو حقيقي دوماً. ■

4.4 نتيجة إن $x=0_{\mathrm{V}}\Leftrightarrow\langle x,x\rangle=0$ لكل $x\in V$.

الإثبات: من وجهة نظر المنطق الرياضي يتم إثبات القضية $[P\Rightarrow Q]$ بطريقة نقض الفرض $[\sim(P\wedge\sim Q)]$ أو بالقضية المكافئة $[\sim Q\Rightarrow\sim P]$. وبالاستفادة من القضية الأخيرة فإن الشرط 3) في التعريف يكافئ $0\not>\langle x,x\rangle\Leftarrow x=0$ ومنه

$$\langle x,x\rangle=0\Rightarrow x=0_V$$

ويتم المطلوب لأن $\langle x,0_V\rangle=0=\langle 0_V,x\rangle$. ■

5.4 نظرية (متراجحة كوشي شفارتز) *بفرض* $(V,\langle .,.\rangle)$ *فضاء جداء داخلي فإنه*

$$\forall(x,y)\in V\times V:|\langle x,y\rangle|\leq\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$$

الإثبات. إنه

$$\forall\lambda\in\mathbb{K}:0\leq\langle x+\lambda y,x+\lambda y\rangle=\langle x,x\rangle+\lambda\bar{\lambda}\langle y,y\rangle+\lambda\langle y,x\rangle+\bar{\lambda}\langle x,y\rangle$$

وبتعويض $\lambda:=-\frac{\langle x,y\rangle\langle x,x\rangle^{1/2}}{|\langle x,y\rangle|\langle y,y\rangle^{1/2}}$ "بشرط المقام $\neq 0$" ولأن $\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|^2$ و $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$ ينتج

$$\langle x,x\rangle+\frac{\langle x,x\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y,y\rangle-\frac{\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle\langle x,x\rangle^{1/2}}{|\langle x,y\rangle|\langle y,y\rangle^{1/2}}-\frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}\langle x,x\rangle^{1/2}}{|\langle x,y\rangle|\langle y,y\rangle^{1/2}}\geq 0\Rightarrow$$

$$2\langle x,x\rangle-2\frac{|\langle x,y\rangle|\langle x,x\rangle^{1/2}}{\langle y,y\rangle^{1/2}}\geq 0\xRightarrow{\times\langle y,y\rangle^{1/2}/\langle x,x\rangle^{1/2}}$$

$$\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}\geq|\langle x,y\rangle|$$

عندما ينعدم المقام تبقى العلاقة الأخيرة صحيحة لأن

$$\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} \geq |\langle x,y\rangle| = 0$$

$$\langle y,y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0_V \Rightarrow \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} \geq |\langle x,y\rangle| = |\langle x,0_V\rangle| = 0$$

■

النتيجة التالية هي التعميم لـ $|r| = (r.r)^{1/2}$ في $\mathbb{R}$، ولـ $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$ في $\mathbb{C}$، ولـ $\|\vec{u}\| = (\vec{u}.\vec{u})^{1/2}$ في فضاء الأشعة المألوف فيزيائياً

6.4 نتيجة (النظيم المولد بالجداء الداخلي) *بفرض* $(V,\langle .,.\rangle)$ *فضاء جداء داخلي فإن* $\langle .,.\rangle$ *يُعرّف النظيم*

$$\mathbb{R}^V \ni \|.\| := \left(x \mapsto \langle x,x\rangle^{1/2}\right)$$

الإثبات. إن التعريف جيد لأنه $\forall x \in V: \langle x,x\rangle \in \mathbb{R}^+$ سيتم الآن إثبات شروط التعريف:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x,x\rangle^{1/2} = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$

2) $\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle$

$$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \langle y,y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$

$$\leq \langle x,x\rangle + 2|\langle x,y\rangle| + \langle y,y\rangle$$

$$\overset{th.}{\leq} \langle x,x\rangle + 2\langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle$$

$$= \left(\langle x,x\rangle^{1/2} + \langle y,y\rangle^{1/2}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

ومنه $\sqrt{\|x+y\|^2} \leq \sqrt{(\|x\|+\|y\|)^2}$ ومنه $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x,\alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}\langle x,x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\alpha|\|x\|$

■

7.4 نتيجة *كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم ومتري، حيث:*

1) $\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle}$

2) $d(x,y) \coloneqq \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$

8.4 تعريف (الارتباط الخطي ∥ والتعامد⊥) بفرض $(V, \langle .,. \rangle)$ فضاء جداء داخلي وليكن $(x,y) \in V \times V$ فإن:

1) $x \parallel y \,\dot{\Leftrightarrow}\, \exists \lambda \in \mathbb{K}: x = \lambda y$

2) $x \perp y \,\dot{\Leftrightarrow}\, \langle x, y\rangle = 0$

5. التقارب والاستمرار ضمن الفضاءات المترية

سيتم تعميم العديد من التعاريف بدءا من الفضاء المتري المألوف $\mathbb{R}$.

على خط الأعداد $\mathbb{R}$ تكون نهاية المتتالية الحقيقية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هي العدد الحقيقي a عندما $n \to \infty$، إذا كانت حدود المتتالية تقترب في اللانهاية من بعضها وتسعى نحو العدد a. فيزيائيا بتمثيل الحدود a_n والعدد a كنقاط مادية على خط الأعداد، فإنه عند النظر إلى a بمكبرة مهما كانت نسبة التكبير ستتم رؤية حدود المتتالية بدءا من حد معين. أي إن أي حلقة مركزها a ونصف قطرها ϵ ستحوي داخلَها جميع حدود المتتالية بدءا من حد معين n_0. الطبيعي أنه كلما كان ϵ أصغر ضاقت هذه الحلقة أكثر وكان n_0 أكبر. أخيراً يمكن صياغة التعريف الدقيق للتقارب على خط الأعداد، بانه أياً كان $\epsilon > 0$ نصف قطر المجال المفتوح الذي مركزه a، فإنه يوجد دليل n_0 يتعلق بـ ϵ، تكون جميع حدود المتتالية بعده $\{a_n : n \geq n_0\}$ ضمن هذا المجال بجانب a. أي

$$\left(a_n \xrightarrow{n\to\infty} a\right) \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \{a_n : n \geq n_0\} \subseteq]a-\epsilon, a+\epsilon[)$$

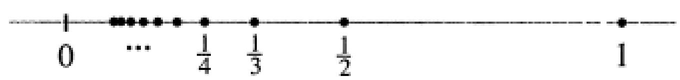


FIGURE 2.3: The set $A = \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.

رسم توضيحي 12 المتتالية الأبسط والأهم $\frac{1}{n} \to 0$

بعد التعريف التالي للكرة المفتوحة سيتم التعميم إلى الفضاءات المترية.

1.5 تعريف (الكرة المفتوحة والكرة المغلقة) بفرض (X,d) فضاء متري. تُعرَّف *الكرة المفتوحة* التي مركزها $x \in X$ ونصف قطرها $\epsilon > 0$ بالطريقة $N_{(x,\epsilon)} := \{y \in X: d(y,x) < \epsilon\}$ و*الكرة المغلقة* التي مركزها x ونصف قطرها r بالطريقة $B_{(x,r)} := \{y \in X: d(y,x) \leq r\}$.

وبشكل خاص فإن $B_{(x,0)} = \{x\}$. لاحقاً عند دراسة النقاط الحدية والاستمرار سيتم الاهتمام *بالكرة المفتوحة عدا مركزها* ويرمز بـ $N^*_{(x,\epsilon)} := N_{(x,\epsilon)} - \{x\}$. طبعاً إن

$$y \in N^*_{(x,\epsilon)} \Leftrightarrow 0 < d(y,x) < \epsilon$$

2.5 مثال في الفضاء المألوف $\mathbb{R}$. إن كل مجال مفتوح ومحدود هو كرة مفتوحة، وكل مجال مغلق ومحدود هو كرة مغلقة لأن

$$N_{(x,\epsilon)} = \{y \in \mathbb{R}: |y-x| < \epsilon\} = \{y \in \mathbb{R}: -\epsilon < y-x < \epsilon\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R}: x-\epsilon < y < x+\epsilon\}$$

$$=]x-\epsilon, x+\epsilon[$$

ومنه وبفرض $a := x-\epsilon$ و $b := x+\epsilon$ فإن $]a,b[= N_{\left(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2}\right)}$ حيث $a < b$.

وبنفس الخطوات فإن $[a,b] = B_{\left(\frac{b+a}{2},\frac{b-a}{2}\right)}$ حيث $a \le b$.

3.5 تعريف (تقارب متتالية) بفرض (X,d) فضاء متري، ولتكن المتتالية $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$، وليكن $x \in X$. يُعرف *التقارب* بالطريقة

$$\left(x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\right) \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \{x_n: n \ge n_0\} \subseteq N_{(x,\epsilon)}\right)$$

و هو يكافئ

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left[n \ge n_0 \Rightarrow x_n \in N_{(x,\epsilon)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: [n \ge n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \epsilon]$$

4.5 نتيجة *بفرض (X,d) فضاء متري ولتكن $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ و $x_n \to x$ فإن*

$$x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n,x) \to 0$$

اذاً كل متتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة في X ونهايتها x تكافئ متتالية حقيقية $\left(d(x_n,x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو الصفر.

5.5 مثال إن لكل متتالية متقاربة نهاية وحيدة في فضاء متري. ولإثبات ذلك لتكن (x_n) متتالية في الفضاء المتري (X,d) وليكن $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x'$ و $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x''$ لإثبات أن $x' = x''$ إن

$$\left.\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x' \;\Rightarrow\; d(x_n,x') \to 0 \\ x_n \xrightarrow{n\to\infty} x'' \Rightarrow d(x_n,x'') \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leftarrow 0 \le d(x',x'')$$

$$\le\; d(x',x_n) + d(x_n,x'') \to\; 0+0$$

$$\Rightarrow d(x',x'') \to 0 \Rightarrow d(x',x'') = 0$$

المساواة الأخيرة لأن $\big(d(x',x'')\big)$ متتالية ثابتة.

المثال السابق يبرر ترميز المتتالية (x_n) المتقاربة نحو x بـ $x = x$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

يمكن الآن تعريف التقارب المنتظم لمتتالية توابع ضمن فضاء التوابع المحدودة.

6.5 تعريف (التقارب المنتظم والتقارب النقطي لتابع) بفرض (X,d) فضاء متري وبفرض S مجموعة يُعرَّف *التقارب المنتظم* للمتتالية $(f_n) \in \left(\mathcal{B}_{(X,d)}(S)\right)^{\mathbb{N}}$ نحو $f \in \mathcal{B}_{(X,d)}(S)$ بالطريقة

$$\lim_{\substack{uni \\ n\longrightarrow\infty}} f_n = f \Leftrightarrow f_n \underset{(\mathcal{B}_X(S),d_\infty)}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f$$

$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: [n \ge n_0 \Rightarrow d_\infty(f_n,f) < \epsilon]$$

$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 = n_\epsilon \in \mathbb{N}\ \forall s \in S: \big[n \ge n_0 \Rightarrow d\big(f_n(s),f(s)\big) < \epsilon\big]$$

أي هو التقارب المألوف ضمن الفضاء المتري (X,d_∞). ويعرف التقارب النقطي لمتتالية التوابع $(f_n) \in (X^S)^{\mathbb{N}}$ نحو $f \in X^S$ بالطريقة

$$\lim_{n\to\infty\ pnt} f_n = f \Leftrightarrow \forall s \in X: f_n(s) \underset{(X,d)}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} f(s)$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in X\ \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \left[n \geq n_0 \Rightarrow d\big(f_n(s), f(s)\big) < \epsilon\right]$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \forall s \in X\ \exists n_0 = n_{(s,\epsilon)} \in \mathbb{N}: \left[n \geq n_0 \Rightarrow d\big(f_n(x), f(x)\big) < \epsilon\right]$$

توجد عدة تعاريف متكافئة لاستمرار تابع.

7.5 تعريف (التعريف المتري $\boldsymbol{\epsilon - \delta}$ لاستمرار تابع) بفرض $f \in (Y,\rho)^{(X,d)}$ فإن

مستمر $f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: f\left(N^*_{(x,\delta)}\right) \subseteq N_{(f(x),\epsilon)}$

6. المجموعات المفتوحة والمغلقة مترياً

1.6 تعريف (A' و $\bar{A}$ والمجموعة المغلقة مترياً) بفرض (X,d) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ ولتكن $x \in X$ تُعرَّف *النقطة الحدية* بالطريقة

$$x \text{ نقطة حدية لِـ } A \Leftrightarrow x \in A' \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0: N^*_{(x,\epsilon)} \cap A \neq \emptyset$$

وتعرف *النقطة الغُلاقية* بالطريقة

$$x \text{ نقطة غُلاقية لِـ } A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0: N_{(x,\epsilon)} \cap A \neq \emptyset$$

وتعرف *المجموعة المغلقة* [xii] بالطريقة

$$(A \text{ مغلقة}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{T}^{\hat{c}} \Leftrightarrow A = \bar{A}$$

2.6 نتيجة *إن* $\bar{A} = A \cup A'$ و $A \subseteq \bar{A}$.

3.6 خاصية *نهاية متتالية متقاربة هي نقطة غُلاقية لمجموعة قيمها.*

4.6 مثال في الفضاء المألوف $(\mathbb{R}, |.|)$ بفرض المجموعة $A := \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ فإن $A' = \{-1, +1\}$ ومنه $\bar{A} = A \cup \{\pm 1\}$. وبفرض $I := [3,5[$ فإن $I' = [3,5] = \bar{I}$. طبعاً إن $\mathbb{R}' = \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$.

5.6 خاصية *بفرض* (X,d) *فضاء متري إن*

$$c \in N_{(b,\epsilon)} \wedge b \in N_{(a,\epsilon)} \Rightarrow c \in N_{(a,2\epsilon)}$$

[xii] عند تعريف الفضاء الطوبولوجي "مقرر تبولوجيا 2، سنة رابعة" والذي هو تعميم للفضاء المتري. سيتم تعميم معظم التعاريف كالمجموعة المغلقة والمفتوحة والمتراصة بشكل مختلف ولكن يُثبت تكافؤ تلك التعاريف عندما يكون الفضاء الطوبولوجي مترياً.

الإثبات: هو نتيجة مباشرة لمتراجحة المثلث وتعريف الكرة المفتوحة حيث

$$c \in N_{(b,\epsilon)} \wedge b \in N_{(a,\epsilon)} \Rightarrow d(c,b) < \epsilon \wedge d(b,a) < \epsilon$$

$$\Rightarrow d(c,a) \leq d(c,b) + d(b,a) < 2\epsilon \Rightarrow c \in N_{(a,2\epsilon)}$$

■

6.6 نظرية (خواص الغُلاقة) *بفرض* (X,d) *فضاء متري، ولتكن* $A \subseteq X$ *و* $B \subseteq X$ *فإن:*

1) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

2) $\bar{A}$ مجموعة مغلقة

3) $\bar{A} = \min\{F \in 2^X : F \supseteq A \wedge$ مغلقة $F\}$

الإثبات:

1) بفرض $A \subseteq B$ سيتم اثبات ان $[x \in \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{B}]$ إن

$$x \in \bar{A} \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : N_{(x,\epsilon)} \cap A \neq \emptyset$$

$$\overset{A\subseteq B}{\Longrightarrow} \forall \epsilon > 0 : N_{(x,\epsilon)} \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{B}$$

2) سيتم إثبات أن $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$: $\supseteq$) أي مجموعة محتواة في غلاقتها ومنه $(\bar{A}) \subseteq \overline{(\bar{A})}$.

$\subseteq$) سيتم إثبات أن $[x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow x \in \bar{A}]$ بالاستفادة من الخاصية السابقة حيث

$$x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow \forall \epsilon > 0 : N_{(x,\epsilon)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists y \in \bar{A} : y \in N_{(x,\epsilon)}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists y \in \bar{A}\ \exists z \in A : y \in N_{(x,\epsilon)} \wedge z \in N_{(y,\epsilon)}$$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists z \in A: z \in N_{(x,2\epsilon)} \Rightarrow x \in \bar{A}$

3) هنا تم التعامل مع الاحتواء كعلاقة ترتيب وبترميز $\mathcal{F} := \{F \in 2^X |\ F \supseteq A \wedge$ مغلقة $F\}$
سيتم إثبات إن $[\bar{A} \in \mathcal{F}]$ وانه $[\forall F \in \mathcal{F}: F \supseteq \bar{A}]$ ولإثبات ذلك إن:

1) مغلقة $\bar{A} \wedge \bar{A} \supseteq A \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

2) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow$ مغلقة $F \supseteq A \Rightarrow$ مغلقة $\bar{F} \supseteq \bar{A} \Rightarrow\ F = \bar{F} \supseteq \bar{A}$

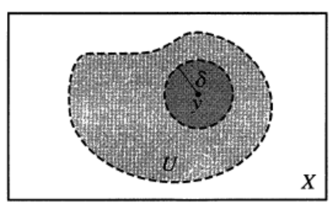
■

7.6 تعريف (الداخل A° والمجموعة المفتوحة مترياً) بفرض (X, d) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ وليكن $x \in X$ يعرف *داخل مجموعة* بالطريقة

$\left(x \text{ نقطة داخلية لـ } A\right) \Leftrightarrow (x \in A^{\circ}) \Leftrightarrow \left(\exists \delta > 0: N_{(x,\delta)} \subseteq A\right)$

وتُعرَّف *المجموعة المفتوحة* بالطريقة

$\left(A \text{ مفتوحة}\right) \Leftrightarrow A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = A^{\circ}$



رسم توضيحي 13 y نقطة داخلية لـ U ضمن الفضاء المتري (X, d).

8.6 نتيجة $A^{\circ} \subseteq A$

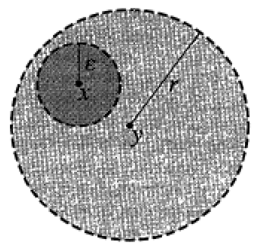
9.6 نظرية *كل كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.*

الاثبات: بفرض (X,d) فضاء متري ولتكن $N_x(\epsilon)$ كرة مفتوحة حيث $(x,\epsilon) \in X \times \mathbb{R}^{+*}$ المطلوب إثبات أن $N_{(x,\epsilon)} = N^{\circ}_{(x,\epsilon)}$، إن $N_{(x,\epsilon)} \supseteq N^{\circ}_{(x,\epsilon)}$ والآن ليكن $y \in N_{(x,\epsilon)}$ سيتم البحث عن كرة مفتوحة مركزها y ومحتواة في $N_{(x,\epsilon)}$. بفرض $\delta := \epsilon - d(x,y)$ فإن

$$z \in N_{(y,\delta)} \Rightarrow d(z,y) < \delta = \epsilon - d(x,y)$$

$$\Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \epsilon \Rightarrow z \in N_{(x,\epsilon)}$$

ومنه $N_{(y,\delta)} \subseteq N_{(x,\epsilon)}$. ■



رسم توضيحي 14 أي نقطة ضمن أي كرة مفتوحة هي داخلية

10.6 نظرية (خواص الداخل) *بفرض* (X,d) *فضاء متري ولتكن* $A \subseteq X$ *و* $B \subseteq X$ *ان:*

1) $A \subseteq B \Rightarrow A^{\circ} \subseteq B^{\circ}$

2) A° مفتوحة

3) $A^{\circ} = \max\{U \in 2^X : U \text{ مفتوحة } \wedge U \subseteq A\}$

الإثبات: 1) بفرض $A \subseteq B$ سيتم إثبات أن $[x \in A^{\circ} \Rightarrow x \in B^{\circ}]$

$$x \in A^{\circ} \Rightarrow \exists \delta > 0 : N_{(x,\delta)} \subseteq A \overset{A \subseteq B}{\subseteq} B \Rightarrow x \in B^{\circ}$$

2) سيتم إثبات أن $\left[A^{\circ} = A^{\circ\circ}\right]$: $\subseteq$) يتم المطلوب لأن داخل أي مجموعة محتوىً فيها. $\supseteq$) سيتم إثبات أن $\left[x \in A^{\circ} \Rightarrow x \in A^{\circ\circ}\right]$

$$x \in A^{\circ} \Rightarrow \exists \delta > 0 : N_{(x,\delta)} \subseteq A$$

$$\Rightarrow \exists\delta > 0: N_{(x,\delta)} = \left(N_{(x,\delta)}\right)^{\circ} \subseteq A^{\circ} \Rightarrow x \in A^{\circ\circ}$$

المساواة الأخيرة بسبب النظرية السابقة.

3) المطلوب إثبات أن $A^{\circ} \in \mathcal{U}$ و $[\forall U \in \mathcal{U}: U \subseteq A^{\circ}]$:

1) A° مفتوحة $\wedge A^{\circ} \subseteq A \Rightarrow A^{\circ} \in \mathcal{U}$

2) $U \in \mathcal{U} \Rightarrow$ مفتوحة $U \subseteq A \Rightarrow U = U^{\circ} \subseteq A^{\circ}$

■

النظرية التالية تمهد لملامح العمل طوبولوجياً في فضاء بعيداً عن تابع المسافة..

11.6 نظرية (المفتوحة والمغلقة) *بفرض* (X, d) *فضاء متري ولتكن* $A \subseteq X$ *ان:*

1) $A^{\circ c} = \overline{A^c}$

2) A مفتوحة $\Leftrightarrow$ A^c مغلقة

الإثبات: 1) الإثبات ينتج مباشرة من التعاريف وبسبب الخاصية $[A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B^c = \emptyset]$

$$x \in A^{\circ c} \Leftrightarrow x \notin A^{\circ} \Leftrightarrow \sim\left(\exists\delta > 0: N_{(x,\delta)} \subseteq A\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall\delta > 0: N_{(x,\delta)} \nsubseteq A$$

$$\Leftrightarrow \forall\delta > 0: N_{(x,\delta)} \cap A^c \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{A^c}$$

2) إن

A مفتوحة $\Leftrightarrow A = A^{\circ} \Leftrightarrow A^c = A^{\circ c} = \overline{A^c} \Leftrightarrow$ A^c مغلقة

■

12.6 نظرية (اجتماع المفتوحات وتقاطع المغلقات مترياً) *بفرض* (X, d) *فضاء متري فإنه:*

$1)\ \forall \mathcal{U} \subseteq 2^X: \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{T}$ *"أي اجتماع لمفتوحات هو مفتوحة"*

$2)\ \{U_i\}_{i\leq n} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow\ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$ *"التقاطع المنتهي لمفتوحات هو مفتوحة"*

$1')\ \forall \mathcal{F} \subseteq 2^X: \mathcal{F} \subseteq \mathcal{T}^{\hat{c}} \Rightarrow \bigcap \mathcal{F} \in \mathcal{T}^{\hat{c}}$ *"أي تقاطع لمغلقات هو مغلقة"*

$2')\ \{F_i\}_{i\leq n} \subseteq \mathcal{T}^{\hat{c}} \Rightarrow\ \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{T}^{\hat{c}}$ *"الاجتماع المنتهي لمغلقات هو مغلقة"*

الإثبات: 1) لتكن $\mathcal{U} \subseteq 2^X$ جماعة مفتوحات في X المطلوب إثبات أن $\bigcup \mathcal{U} = (\bigcup \mathcal{U})^{\circ}$. إن $\bigcup \mathcal{U} \supseteq (\bigcup \mathcal{U})^{\circ}$ سيتم إذاً اثبات أن $[x \in \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow (\bigcup \mathcal{U})^{\circ}]$

$$x \in \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}: x \in U = U^{\circ}$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0: N_x(\delta) \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{U} \Rightarrow x \in (\bigcup \mathcal{U})^{\circ}$$

2) إن

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: x \in U_i = U_i^{\circ}$$

$$\Rightarrow \forall i\ \exists \delta_i > 0: N_x(\delta_i) \subseteq U_i$$

$$\Rightarrow \forall i\ \exists \delta := \min_{i \in \{1,\dots,n\}} \delta_i > 0: N_x(\delta) \subseteq N_x(\delta_i) \subseteq U_i$$

$$\Rightarrow \forall i\ \exists \delta > 0: N_x(\delta) \subseteq U_i \Rightarrow \exists \delta > 0: N_x(\delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

'1) ينتج مباشرةً من 1 ومن النظرية السابقة بدءاً من قوانين دومورغان

$$\mathcal{F} \subseteq \Gamma \Rightarrow \{F^c: F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow (\bigcap F)^c = \bigcup\{F^c: F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{T}$$

$$\Rightarrow \bigcap F \in \mathcal{T}^{\hat{c}}$$

'2) تمرين.

■

References .7

Adams, C., & Robert, F. (2009). *Introduction to topology Pure and Applied.* India: Pearson.

Garling, D. J. (2013). Metric and Topological Spacees. In *A Course in Mathematical Analysis.* Cambridge: Cambridge University.