المصانع \ الأسواق	1	2	3	4	5	الكميات المنتجة	الفروق بالأسطر
1	[5]	[7] 300	[9]	[11]	[6]	300	1 1 2 2
2	[19]	[8]	[10] 150	[13]	[5] 350	150 ~~500~~	3 3 2 2
3	[4] 350	[9]	[7] 100	[6] 250	[3]	~~450~~ 100 ~~700~~	1 1 3 2
الكمية المطلوبة	350	300	250	250	350	1500	
الفروق بالأعمدة	1 1 1	1 1 1 1	2 2 2 2	~~2~~	2 2		

شرح الجدول النهائي بالحل وفق طريقة فوجل بالأسطر وبالأعمدة:

أولاً: قمنا بملئ الجدول وفق المعطيات أي قمنا بوضع الكمية المطلوبة مقابل سوق ضمن الأعمدة فالسوق 1 كميته المطلوبة 350 وهكذا بالنسبة لبقية الأسواق (الطلب) وكذلك وضعنا الكمية المنتجة مقابل كل مصنع ضمن الأسطر فالمصنع 1 كميته المنتجة 300 وهكذا بالنسبة لبقية المصانع (العرض).

توضيح: التكاليف الموجودة ضمن المربعات الصغيرة هي عبارة عن تكلفة نقل المنتج من المصنع الذي تقع التكلفة في عموده مثل:

التكلفة 10 هي تكلفة نقل المنتج من المصنع 2 إلى السوق 3 وهكذا من أجل بقية التكاليف.

ونحسب الفروق بين أقل كلفتين بالأسطر وبالأعمدة فتكون الفروق **بالخطوة الأولى** كالتالي:

الفروق بالأسطر:

الفرق بالسطر 2 $= 8 - 5 = 3$

الفرق بالسطر 1 $= 6 - 5 = 1$

الفرق بالسطر 3 $= 4 - 3 = 1$

الفروق بالأعمدة:

1 = 4 – 5 = الفرق بالعمود 1

1 = 7 – 8 = الفرق بالعمود 2

2 = 7 – 9 = الفرق بالعمود 3

5 = 6 – 11 = الفرق بالعمود 4

2 = 3 – 5 = الفرق بالسطر 5

ثانياً: نختار أكبر هذه الفروق بالأسطر وبالأعمدة وأكبر الفروق هو الفرق 5

والآن.نحدد السطر أو العمود الذي يقابل أكبر فرق وهنا أكبر الفروق (5) يقع في العمود (4) "السوق 4"

ثالثاً: والآن نحدد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر الفروق

وهنا أكبر الفروق (5) يقع في العمود (4) وعندها نكون أقل تكلفة في العمود (4) المقابل لأكبر الفروق (5) هي التكلفة 6 الموجودة ضمن المربع الصغير.

رابعاً: نحدد أكبر كمية ممكنة نستطيع تمريرها للمربع ذو التكلفة الأقل 6 التي حددناها بالخطوة السابقة.

1-تقع التكلفة الأقل 6 بالعمود (4) أي السوق 4 الذي كميته المطلوبة هي 250.

2-تقع التكلفة الأقل 6 بالسطر (3) أي المصنع (3) الذي كميته المنتجة هي 700.

خامساً: إذاً نحن بحالة: الكمية المنتجة (700) > (250) الكمية المطلوبة

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (250) عند المربع ذو التكلفة الأقل 6 التي حددناها مسبقاً

ونشطب عمود السوق (4) لأننا أشبعنا كل حاجته من الكمية المطلوبة وأصحت الكمية المنتجة لدى المصنع (3) هي:

450 = الكمية التي قمنا بتمريرها (250) – (700) الكمية المنتجة

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 6 التي تقع بسطر المصنع (3) وبعمود السوق (4) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 250

سابعاً: الآن نعيد تكرار العمليات السابقة ونحسب الفروق بالأسطر وبالأعمدة من جديد: إذاً:

أولاً: فتكون الفروق بالأسطر وبالأعمدة بالخطوة الثانية هي:

الفروق بالأسطر:

3 = 5 − 8 = الفرق بالسطر 2

1 = 5 − 6 = الفرق بالسطر 1

1 = 3 − 4 = الفرق بالسطر 3

الفروق بالأعمدة:

1 = 7 − 8 = الفرق بالعمود 2

1 = 4 − 5 = الفرق بالعمود 1

2 = 3 − 5 = الفرق بالعمود 5

2 = 7 − 9 = الفرق بالعمود 3

انتباه: علماً أنه لم ننظر للعمود (4) عندما حسبنا الفروق بالخطوة الثانية.

ثانياً: نختار أكبر الفروق بالأسطر وبالأعمدة الذي حسبناهم بالخطوة السابقة وهو الفرق 3 أكبر الفروق بالأسطر وبالأعمدة وهو يقع بالسطر (2) (بالمصنع 2).

ثالثاً: نحدد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر الفروق الذي هو الفرق 3 وطالما يقع في سطر المصنع (2) عندها تكون أقل تكلفة في السطر (2) هي التكلفة 5 الموجودة ضمن المربع الصغير.

رابعاً: نحدد أكبر كمية ممكنة نستطيع تمريرها في المربع ذو التكلفة الأقل 5 التي حددناها سابقاً.

1) تقع التكلفة الأقل 5 بسطر المصنع 2 الذي كميته المنتجة هي 500
2) تقع التكلفة الأقل 5 بعمود السوق 5 الذي كميته المطلوبة هي 350

خامساً: إذاً نحن بحالة:

الكمية المنتجة (500) > (350) الكمية المطلوبة

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (350) لأنه الأصغر بحيث نمررها عند المربع ذو التكلفة الأقل 5 التي حددناها سابقاً.

ونشطب عمود السوق 5 لأننا أشبعنا كامل حاجته من الكمية المطلوبة أي مررنا له كل ما يحتاجه وهو 350 وتصبح الكمية المنتجة لدى المصنع 2 هي:

150 = الكمية التي مررناها (350) − (500) الكمية المنتجة

150 الكمية المنتجة التي بقيت لدى المصنع 2

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 5 التي تقع بسطر المصنع (2) وبعمود السوق (5) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 350

سابعاً: الآن نعيد تكرار العمليات السابقة ونحسب الفروق بالأسطر وبالأعمدة من جديد: **إذاً**

أولاً: فتكون الفروق بالأسطر وبالأعمدة بالخطوة الثالثة هي:

الفروق بالأسطر:

2 = 8 − 10 = الفرق بالسطر 2

2 = 5 − 7 = الفرق بالسطر 1

3 = 4 − 7 = الفرق بالسطر 3

الفروق بالأعمدة:

1 = 7 − 8 = الفرق بالعمود 2

1 = 4 − 5 = الفرق بالعمود 1

2 = 7 − 9 = الفرق بالعمود 3

تنويه: علماً أننا اعتبرنا العمود 4 والعمود 5 غير موجودين عندما حسبنا الفروق من جديد لأننا شطبناهم.

ثانياً: نختار أكبر هذه الفروق بالأسطر وبالأعمدة وهو الفرق 3 وهو يقع بسطر المصنع 3 (السطر 3).

ثالثاً: نحدد أقل تكلفة نقل في السطر أو العمود الذي يقابل أكبر الفروق:

وهنا السطر (3) يقابل أكبر الفروق الذي هو 3 وفي السطر (3) أصغر تكلفة موجودة ضمن المربعات الصغيرة هي التكلفة 4 علماً أننا لم ننظر للعمودين 4 و5 لأننا شطبناهم. علماً أن التكاليف موجودة ضمن المربعات الصغيرة بالجدول.

رابعاً: نحدد سطر وعمود أقل تكلفة التي حددناها بالمرحلة السابقة التي هي 4

وهي موجودة بسطر المصنع (3) الذي كميته المنتجة الباقية هي 450 وموجودة بعمود السوق (1) الذي كميته المطلوبة هي 350

خامساً: إذاً نحن بالة: الكمية المنتجة (450) > الكمية المطلوبة (350)

⇦نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المطلوبة (350) لأنه الأصغر عند المربع ذو التكلفة الأقل 4 التي حددناها سابقاً.

ونشطب عمود السوق (1) لأننا أشبعنا كل حاجته من الكمية المطلوبة ومررناها له بالكامل وأصبحت الكمية المنتجة لدى المصنع (3) هي:

الكمية المنتجة الباقية لدى المصنع 3 (450) – (350) الكمية المطلوبة بالسوق 1 = 100

100 الكمية المنتجة التي بقيت لدى المصنع 3

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 4 التي تقع بسطر المصنع (3) وبعمود السوق (1) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 350

سابعاً: الآن نعيد تكرار العمليات السابقة ونحسب الفروق بالأسطر وبالأعمدة من جديد.

إذاً: أولاً فتكون الفروق بالأسطر وبالأعمدة بالخطوة الرابعة هي:

الفروق بالأسطر:

2 = 8 − 10 = الفرق بالسطر 2

2 = 7 − 9 = الفرق بالسطر 1

2 = 7 − 9 = الفرق بالسطر 3

الفروق بالأعمدة:

2 = 7 − 9 = الفرق بالعمود 3

1 = 7 − 8 = الفرق بالعمود 2

❖ علماً أننا لا نأخذ بعين الاعتبار الأعمدة 1 و4 و5 لأننا شطبناهم.

ثانياً: نختار أكبر هذه الفروق هو 2 ولكن عندنا الفرق متشابه بالأسطر 1 و2 و3 والعمود 3 ⇦فنختار أي فرق نريد ولنفترض أنه اخترنا أن نمرر أكبر كمية ممكنة عند التكلفة 7 الموجودة بسطر المصنع (3) وبعمود السوق (3).

لماذا اخترنا أن نمرر أكبر كمية ممكنة عند التكلفة 7؟

لأنه لو قارنا بين الفروق السابقة أصغر تكلفة فيها هي التكلفة 7 التي يكون أكبر فرق بالأسطر وبالأعمدة عندها.

أي: أكبر الفروق بين أقل تكلفتين بالأسطر وبالأعمدة هو 2

2 = 7 − 9 = الفرق بالسطر 1

2 = 8 – 10= الفرق بالسطر 2

2 = 7 – 9 = الفرق بالسطر 3

2 = 7 – 9 = الفرق بالعمود 3

⇦أصغر التكاليف هي التكلفة 7

ولتكن التكلفة 7 الموجودة بسطر المصنع (1) وعمود السوق (2).

ثالثاً: وطالما أن التكلفة 7 التي أخذناها موجودة بسطر المصنع 1 الذي كميته المنتجة التي بقيت هي 300 وموجودة بعمود السوق 2 الذي كميته المطلوبة هي 300 إذاً نحن بحالة: الكمية المنتجة (300) = (300) الكمية المطلوبة

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا الكمية المنتجة (300 التي نفسها الكمية المطلوبة لأنهم متساويين عند المربع ذو التكلفة الأقل 7 التي حددناها مسبقاً، ونشطب سطر المصنع (1) لأننا مررنا (استخدمنا) كل الكمية المنتجة التي لديه، ونشطب عمود السوق (2) لأننا أشبعنا كل الكمية المنتجة لديه.

سادساً: ملئنا المربع ذو التكلفة الأقل 7 التي تقع بسطر المصنع (1) وعمود السوق (2) بالكمية المنقولة التي استطعنا تمريرها وهي 300

والآن نلاحظ أنه لم يتبقى لدي سوى الكمية المطلوبة الموجودة بالسوق 3 والتي هي 250 لم نقم بإشباعها بعد ولدينا الكميات المنتجة التي بقيت والتي هي بالمصنع (2) بقي 150 وبالمصنع (3) بقي 100.

إذاً نقوم بنقل الكميات المنتجة التي بقيت إلى الأسواق التي لم نقم بإشباع الكمية المطلوبة لديها في المربعات التي لم تشطب بعد وهي عند التكلفة 10 بالعمود (3) وبالسوق (2).

وعند التكلفة 7 بالعمود (3) وبالسوق (2)

وهذا سيتوضح لكم في حال رسمتوا الجدول دون الحل عليه وطبقتوا الشرح الموجود عندها سيتبين معكم المربعات التي بقيت غير مشطوبة لا من جهة الأسطر ولا من جهة الأعمدة بعد شطب الأعمدة 5,4,2,1 والسطر 1 بالخطوات السابقة بالحل.

والآن طالما أن المربع الذي لم يشطب بعد وهو:

عند التكلفة 10 موجود بسطر المصنع 2 وبعمود السوق 3.

نحن بحالة: بالمصنع (2) بالكمية المنتجة الباقية (150) < (250) الكمية المطلوبة بالسوق (3)

نمرر أكبر كمية ممكنة وهي هنا 150 (الكمية المنتجة) لأنه الأصغر عند المربع ذو التكلفة 10 وتسجل عنده 150.

إذاً استخدمنا كامل الكمية المنتجة لدى المصنع (2) وبقي بالسوق (3) كمية مطلوبة هي: 100 = (الكمية المنقولة) 150 − 250

وعند التكلفة 7 موجود بسطر المصنع (3) وعمود السوق (3)

نحن بحالة: بالمصنع (3) الكمية المنتجة الباقية (100) = (100) الكمية المطلوبة الباقية بالسوق (3)

ملاحظة: والآن وطالما أنه كان لم يعد لدينا كميات منتجة ولا كميات مطلوبة فسواءً شطبنا العمود 2 والأسطر 3,2 أم لم نشطبهم لا يؤثر.

والآن لنحسب تكلفة النقل كالتالي:

والتي تساوي مجموع (الكميات المنقولة × التكاليف) أي:

$$MINZ = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}X_{ij}$$

$$= 250 \times 6 + 350 \times 5 + 350 \times 4 + 300 \times 7 + 150 \times 10 + 100 \times 7$$

$$= 8950$$

هذه هي قيمة الحل وفقاً لهذه الطريقة ولكن كل هذه الحلول ليست حلولاً مثلى وكلها حلول أولية.

مشاكل التخصيص والتعيين

عرض وتعريف

إن مشكلة التخصيص والتعيين ما هي إلا فرع خاص جداً من مشكلة النقل التي تعد تطبيقاً أساسياً للبرمجة الخطية ، هذه المشكلة تتعلق بتعيين عدد من العمال على عدد من الآلات لإنجاز الوظائف الإنتاجية، وذلك عن طريق تعيين عامل واحد فقط على كل آله، هذا التعيين يتطلب تساوي عدد العمال مع عدد الآلات ، إن حل مشكلة التعيين هو عبارة عن إيجاد الطريقة المثلة لتوزيع العمال على الآلات بشكل يحقق تخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن .

حتى يمكن حل مشكلة التعيين فإنه لا بد من حقيق مجموعة من الشروط، هي التالية:

١ ـ إن عدد العمال يجب أن يساوي تماماً عدد الآلات.

٢ ـ إن كل عامل يجب أن يعمل على آلة واحدة فقط.

٣ ـ يمكن استخدام دالة هدف واحدة للتقييم، ويكون هدف هذه الدالة تخفيض تكاليف الإنتاج.

عند توفر هذه الشروط الثلاثة فإنه يمكن حل مشكلة التعيين بإحدى الطريقتين :

١ ـ طريقة التراتيب .

2- طريقة الحل المباشر: سنتطرق إلى طريقة الحل المباشر فقط.

طريقة الحل المباشر

حسب هذه الطريقة فإن الوصول إلى أفضل توزيع على الآلات يتطلب تحديد أفضل خلية في كل سطر وكل عمود ، عندما يكون الجدول يتضمن التكاليف، فإن أفضل خلية هي تلك التي تحتوي على أقل كلفة تشغيل، فإذا قمنا بطرح تكلفة هذه الخلية من تكاليف السطر الذي يحتوي على هذه الخلية وبالوقت نفسه نقوم بطرح تكلفة التشغيل الدنيا لكل عمود من باقي التكاليف؛ فإن هذه العملية تعطينا جدولاً جديداً يكون فيه كل سطر وكل عمود يحتوي على الأقل على صفر ، هذه الطريقة في الحل تتطلب منا المرور بالخطوات التالية :

١ ـــ بالنسبة لكل سطر نطرح أقل رقم من باقي أرقام السطر، مما يجعل كل سطر يحتوي على الأقل على صفر .

٢ ـــ بالنسبة لكل عمود أيضاً يقوم بطرح أقل رقم من باقي أرقام العمود بشكل يصبح كل عمود يحتوي على الأقل على صفر .

٣ ـــ نقوم برسم مجموعة من الخطوط المستقيمة الأفقية والعمودية .

٤ ـــ إذا كان عدد الخطوط المستقيمة أقل من عدد العمال أو عدد الآلات فإننا نقوم بأخذ أقل رقم من الأرقام غير المغطاة، ثم نقوم بطرحه من باقي الأرقام وأضافته إلى الأرقام التي تشكل تقاطع المستقيمات .

٥ ـــ إذا أصبح عدد الخطوط يساوي عدد العمال أو عدد الآلات، فإننا نختار السطر الذي يحتوي على صفر واحد، ثم بعد ذلك نحذف السطر والعمود التي يكون الصفر تقاطعهما، ثم تكرر العملية حتى يتم توزيع جميع العمال على جميع الآلات، وهذا يعطينا التوزيع الأمثل للعمال على الآلات داخل المصنع .

لو افترضنا أنه لدينا أربعة عمال وأربع آلات، وأن تكاليف التشغيل تأخذ شكل الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	70	50	50	60
B	30	30	90	110
C	30	10	20	60
D	50	20	70	60

في هذا الجدول نلاحظ أن أقل قيمة في السطر الأول هي 50 وفي السطر الثاني هي 30 وفي السطر الثالث 10 وفي السطر الرابع هي 20 لو قمنا بطرح هذه القيم من باقي قيم الأسطر لحصلنا على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	10
B	0	0	60	80
C	20	0	10	50
D	30	0	50	40

من هذا الجدول نلاحظ أن العمود الرابع لا يحتوي على صفر، وأن أقل قيمة في هذا العمود هي 10 . بطرح هذه القيمة من باقي قيم العمود و نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	0
B	0	0	60	70
C	20	0	10	40
D	30	0	50	30

هذا الجدول يحتوي على الأقل صفر في كل عمود وكل سطر وبرسم الخطوط المستقيمة التي تصل بين الأصفار نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	0	0	0
B	0	0	60	70
C	20	0	10	40
D	30	0	50	30

من دراسة هذا الجدول نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هو ثلاثة، أي أقل من عدد العمال والآلات وهذا يقودنا إلى القول إنه لا يوجد حل أمثل .

بعد دراسة الأرقام غير المغطاة نلاحظ أن قيمة هي 10 ، بطرح هذه القيمة من القيم والمغطاة وإضافتها إلى أرقام الخانات التي تكون تقاطع المستقيمات نحصل على الجدول التالي:

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	10	0	0
B	0	10	60	70
C	10	0	0	30
D	20	0	40	20

برسم الخطوط المستقيمة نحصل على الجدول التالي :

آلات / عمال	1	2	3	4
A	20	10	0	0
B	0	10	60	70
C	10	0	0	30
D	20	0	40	20

من هذا الجدول نلاحظ أن عدد الخطوط المستقيمة هي أربع خطوط أي يساوي تماماً عدد العمال وعدد الآلات ، بتحقق هذه المساواة يمكن القول إننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل بإجراء الخطوات التالية :

في السطر الرابع يوجد صفر واحد فقط، ويشغل ملتقى العمود الثاني مع السطر الرابع، وهذا ما يقودنا إلى القول إن العامل يجب أن يعين على الآلة الثانية ، نقوم بحذف العمود الثاني والسطر الرابع نحصل على الجدول التالي :

	آلات / عمال	1	3	4
	A	~~20~~	~~0~~	~~0~~
	B	~~0~~	~~60~~	~~70~~
	D	10	~~0~~	30

في هذا الجدول نلاحظ أن السطرين الثاني والثالث يحتوي كل منهما على صفر واحد ، هذه النتيجة تقودنا إلى القول بضرورة تعيين العامل B على الآلة الأولى والعامل D على الآلة الثانية والعامل A على الآلة الربعة ، بعد ذلك يمكن القول إن التخصيص الأمثل يأخذ شكل الجدول التالي :

تكاليف التشغيل	الآلة	العامل
60	4	A
30	1	B
20	3	D
20	2	C

أي إن الحد الأدنى لتكاليف التشغيل هو مساو إلى ما يلي :

$$\text{Min } C = 60 + 30 + 20 + 20 = 130$$

وفي النهاية لا بد من الإشارة إلى عدة حقائق وهي :

١ ـــ يمكن أن يستخدم الأسلوب في حالة تنظيم الربح .

٢ ـــ يمكن أن يستخدم الأسلوب نفسه في حال عدم تساوي عدد العمال مع عدد الآلات، وذلك بإضافة متغيرات (عامل ـــ آلة) وهمية بتكاليف أو عائد صفر في الجدول الأصلي ، وفي هذه الحالة سوف ينطوي الحل الأمثل على آلة عاطل أو عامل لا يعمل.

٣ ـــ في حالة المواقف الأكثر تعقيد يمكن استخدام طريقة النقل أو البرمجة الخطية للوصول إلى الحل الامثل .

٤ ـــ في حالة عدم إمكانية تخصيص عامل معين على آلة معينة لأسباب تقنية، فإنه يتم وضع تكاليف مرتفعة في الخلية التي هي التقاء سطر العامل مع عمود الآلة.

مسألة ثانية: ترغب إحدى المعامل بتخصيص ثلاثة أجهزة لانجاز ثلاثة مهمات والجدول التالي يمثل التكاليف المتعلقة بانجاز كل مهمة عن طريق أي من الأجهزة الثلاث.

مهمات / أجهزة	1	2	3
س	26	18	24
ص	20	14	18
ع	18	12	20

المطلوب ايجاد التخصيص الأمثل (الوصول إلى الحل الأمثل) بأدنى تكلفة.

الحل:

الخطوة الأولى طرح أقل تكلفة من كل سطر ومن كل عمود فنحصل على الجدول التالي:

مهمات / أجهزة	1	2	3	أقل تكلفة في السطر
س	8	0	6	18
ص	6	0	4	14
ع	6	0	8	12

أقل التكاليف في الأعمدة

مهمات / أجهزة	**1**	**2**	**3**
س	2	0	2
ص	0	0	0
ع	0	0	4
أقل تكلفة في العمود	6	0	4

نقوم بعد الاصفار في كل سطر وفي كل عمود ونأخذ عدد الاصفار الأكثر ونشطب

مهمات أجهزة	1	2	3
س	2	0	2
ص	0	0	0
ع	0	0	4

تم تشطيب ثلاثة خطوط والمسألة لدينا ثلاثة آلات وثلاثة عمال أي الحل أمثل

ننتقل للجدول التالي بدون التشطيب لإجراء عملية التخصيص

مهمات أجهزة	1	2	3
س	2	0	2
ص	~~0~~	~~0~~	0
ع	0	~~0~~	4

عملية التخصيص: انظر إلى السطر أو العمود الذي يكون فيه صفر لوحده

في السطر الأول يوجد صفر واحد أضعه في دائرة وأشطب بقية الأصفار في عموده وفي العمود الثالث اضع الصفر في دائرة واشطب بقية الأصفار التي معه بالسطر. وبقي في العمود الأول صفر أضعه ضمن دائرة وبذلك فإن التخصيص بأقل التكاليف

هو: س/2 بتكلفة /18/

ص/3 بتكلفة /18/

ع/1 بتكلفة /18/

فتكون التكلفة الإجمالية هي: 18+18+18=54 وحدة نقدية.

مسألة ثالثة: ليكن لدينا أربعة آلات سيتم توزيعها على أربعة عمال ومصفوفة تكاليف التشغيل كما يلي:

آلات عمال	1	2	3	4
A	70	50	50	60
B	30	30	90	110

C	30	10	20	60
D	50	20	70	60

المطلوب اوجد التخصيص الامثل للعمال على الآلات؟ (يترك الحل للطالب)

تطبيقات عملية

شركة ما لديها ثلاثة مصانع حيث يبلغ إنتاج المصنع الأول/300/ وحدة منتجة وإنتاج المصنع الثاني /500/ وحدة منتجة، وإنتاج المصنع الثالث/700/ وحدة منتجة. وتوزع منتجاتها في أربعة أسواق حيث تبلغ كميات الطلب لهذه الأسواق على التوالي: 350 وحدة منتجة، 400 وحدة منتجة،300 وحدة منتجة، 450 وحدة منتجة وفق مصفوفة التكاليف كما يلي:

الاسواق/المصانع	**1**	**2**	**3**	**4**	**الكميات المنتجة**
1	5	7	10	4	**300**
2	9	8	7	2	**500**
3	4	6	5	11	**700**
الكميات المطلوبة	**350**	**400**	**300**	**450**	

المطلوب: حساب تكلفة النقل الأولي وفق أسلوب الزاوية الشمالية الغربية؟

الحل: المسألة متوازنة لأن الكميات المطلوبة 350+400+300+450=1500 تساوي الكميات المنتجة

1500=700+500+300

نبدأ بالخلية الناجمة عن تقاطع السطر الأول بالعمود الأول(الزاوية الشمالية الغربية) والتي تكلفتها/5/يحتاج السوق الأول الى 350 وحدة وانتاج المصنع الاول 300 وحدة يتم تمرير هذه الكمية الى هذه الخلية وتصبح كمية السوق الأول 50 وحدة، وويشطب الشطر الأول لأن تم تمرير كامل انتاج المصنع الاول ، ننتقل إلى الزاوية (الخلية) الناجمة عن تقاطع سطر المصنع الثاني مع عمود السوق الأول والتي تكلفتها/9/ الذي يحتاج 50 وحدة يتم تمريرها من انتاج المصنع الثاني ويتبقى لدى هذا المصنع 450 وحدة يشطب العمود الاول لآن السوق الاول اشبع بكامل كميته المطلوية، ويشبع السوق الثاني ويشطب عموده، وهكذا.

تصبح الخلايا المشبعة كما في الجدول التالي:

الاسواق/المصانع	**1**	**2**	**3**	**4**	**الكميات المنتجة**
1	**300** 5	7	10	4	**300**
2	**50** 9	**400** 8	**500** 7	2	**500**
3	4	6	**250** 5	**450** 11	**700**

الكميات المطلوبة	350	400	300	450	

الكلفة الاجمالية= $minz=\sum\sum C_{ij}X_{ij}$

Minz=300*5+9*50+400*8+500*7+5*250+11*450=11700

<u>المسألة الثانية</u>: شركة ما لديها مصنعين حيث يبلغ إنتاج المصنع الأول/600/ وحدة منتجة وإنتاج المصنع الثاني /400/ وحدة منتجة، وتوزع منتجاتها في أربعة أسواق حيث تبلغ كميات الطلب لهذه الأسواق على التوالي: 200 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة، 300 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة وفق مصفوفة التكاليف كما يلي:

الاسواق/المصانع	1	2	3	4	الكميات المنتجة
1	$\boxed{3}$	$\boxed{2}$	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$	600
2	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$	$\boxed{2}$	400
الكميات المطلوبة	200	250	300	250	

المطلوب: حساب تكلفة النقل الأولي وفق أسلوب تقريب فوجل بالأسطر والأعمدة؟

الحل: المسألة متوازنة الكمية المطلوبة (200+250+300+250=1000)= الكمية المنتجة(400+600=1000)

نوجد الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وعمود فنجد السطر الأول /1/ والسطر الثاني الفرق /5/ بينما الفرق للعمود الأول /4/ وللعمود الثاني/6/ وللعمود الثالث /3/ وللعمود الرابع/3/ اكبر هذه الفروق للأسطر والأعمدة هو الفرق /6/ في العمود الثاني نشبع طلب السوق الثاني البالغ 250 من منتجات المصنع الأول حيث كمية إنتاجه هي 600 ويتبقى منها 350

نكرر الخطوة السابقة ونوجد الفروق للأسطر والأعمدة بعد حذف العمود الثاني الذي تم إشباع طلبه.

الاسواق/المصانع	1	2	3	4	الكميات المنتجة	فرق السطر		
1	$\boxed{3}$ 200	$\boxed{2}$ 250	150 $\boxed{10}$	$\boxed{5}$	~~350~~ ~~600~~ ~~150~~	1	2	7
2	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	150 $\boxed{7}$	250 $\boxed{2}$	~~400~~ ~~150~~	5	5	0
الكميات المطلوبة	200	250	300	250				
فرق العمود	4	6	3	3				
	4	-	3	3				
	4	-	3	-				

$$minz = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

$$minz = 200 \times 3 + 2 \times 250 + 10 \times 150 + 7 \times 150 + 2 \times 250 = 4150$$

المسألة الثالثة شركة ما لديها مصنعين حيث يبلغ إنتاج المصنع الأول/600/ وحدة منتجة وإنتاج المصنع الثاني /400/ وحدة منتجة، وتوزع منتجاتها في أربعة أسواق حيث تبلغ كميات الطلب لهذه الأسواق على التوالي: 200 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة،300 وحدة منتجة، 250 وحدة منتجة وفق مصفوفة التكاليف كما يلي:

الاسواق/المصانع	1	2	3	4	الكميات المنتجة
1	3	2	10	5	600
2	7	8	7	2	400
الكميات المطلوبة	200	250	300	250	

المطلوب: حساب تكلفة النقل الأولي وفق أسلوب التكلفة الأقل؟

المسألة متوازنة لأن الكميات المطلوبة (200+250+300+250=1000) تساوي الكميات المنتجة (1000=600+400)

نختار أقل تكلفة في الجدول وهي /2/ في السوق الرابع والسوق الثاني نشبع كل السوق بحاجته فنضع بالخلية التي تكلفتها/2/ حاجة السوق الثاني 250 وحدة وتصبح الكمية المنتجة في المصنع الأول /350/ وحدة ونشبع حاجة السوق الرابع من انتاج المصنع الثاني بـــ 250 وحدة وتصبح الكمية المنتجة في المصنع الثاني هي 150 وحدة. ونحذف العمود الثاني والعمود الرابع ونبحث عن التكلفة الأقل من جديد وهكذا نكرر الخطوات حتى نشبع حاجة كافة الأسواقويصبح الجدول بعد الاشباع كما يلي

الاسواق/المصانع	1	2	3	4	الكميات المنتجة
1	200 (3)	250 (2)	150 (10)	(5)	600
2	(7)	(8)	150 (7)	250 (2)	400
الكميات المطلوبة	200	250	300	250	

الكلفة الاجمالية= $minz = \sum\sum C_{ij}X_{ij}$

Minz=3*200+2*250+10*150+7*150+250*2=4150

المسألة الرابعة

لدينا ثلاثة عمال وثلاث آلات وتكاليف التشغيل موضحة كما يلي:

آلات / عمال	1	2	3

A	50	20	40
B	30	60	30
C	70	90	80

المطلوب أوجد التوزيع الأمثل للعمال على هذه الآلات بالحد الأدنى من تكاليف التشغيل، أوجد هذا الحد؟

الحل:

نبحث في كل سطر عن أقل قيمة للتكلفة ونطرحها من باقي القيم في السطر المختارة منه بحيث نحصل على صفر في كل سطر. ونطبق ذلك على الأعمدة أيضاً بحيث نحصل في كل سطر وفي كل عمود على صفر. مثلاً في السطر الاول اقل تكلفة 20 وفي الثاني /30/ وفي الثالث 70

فنحصل على الجدول التالي

آلات / عمال	1	2	3
A	30	0	20
B	0	30	0
C	0	20	10

نجد من الجدول أعلاه أن ه لدينا في كل سطر وكل عمود صفر واحد على الاقل. نصل بين الاصفار بخطوط مستقيمة كما يلي

آلات / عمال	1	2	3
A	30	0	20
B	0	30	0
C	0	20	10

عدد الخطوط المستقيمة يساوي عدد الالات ويساوي عدد العمال فالحل أمثل

السطر الأول يحوي صفر واحد فقط لذلك يخصص العامل A على الالة الثانية والسطر الثالث يحوي صفر واحد فيخصص العامل C على الالة الاولى، وبالتالي العاملB على الالة الثالثة.

التكلفة	الالة	العامل
20	2	A
30	3	B
70	1	C

أو الحد الادنى للتكلفة Min z= 20+30+70=120